AM3 20/21 — Lezione 9

12/10/2020

Esercizi (avanzati dalla lezione precedente)

Se non specificato $X, \mathcal{A}, \mu$ sono generici.

1. Dati $1 \leq p_1 < p < p_2 \leq +\infty$, scrivo $\frac{1}{p}$ come combinaz. convessa di $\frac{1}{p_1}$ e $\frac{1}{p_2}$ cioè

$$\frac{1}{p} = \frac{\lambda_1}{p_1} + \frac{\lambda_2}{p_2} \quad \text{con} \quad \lambda_1, \lambda_2 > 0, \ \lambda_1 + \lambda_2 = 1.$$

Data $f : X \to \mathbb{R}$ o $\mathbb{R}^k$ misurabile vale la seguente disuguaglianza di interpolazione:

$$\|f\|_p \leq \|f\|_{p_1}^{\lambda_1} \|f\|_{p_2}^{\lambda_2}.$$

Infatti

$$\|f\|_p^p = \int_X |f|^p \, d\mu$$

$$= \int_X |f|^{\lambda_1 p} |f|^{\lambda_2 p} \, d\mu$$

applico Hölder con esponenti $\frac{p_1}{\lambda_1 p}$ e $\frac{p_2}{\lambda_2 p}$ (verificare che sono coniugati)

$$\leq \left(\int_X |f|^{\lambda_1 p \cdot \frac{p_1}{\lambda_1 p}} d\mu \right)^{\frac{\lambda_1 p}{p_1}} \left(\int_X |f|^{\lambda_2 p \cdot \frac{p_1}{\lambda_2 p}} d\mu \right)^{\frac{\lambda_2 p}{p_1}}$$

$$= \|f\|_{p_1}^{\lambda_1} \|f\|_{p_2}^{\lambda_2}.$$

2. Data $f: X \to \mathbb{R}$ o $\mathbb{R}^k$ misur. considero $g: [0,1] \to (-\infty, +\infty]$ data da

$$g(t) := \log(\|f\|_{1/t})$$

(convengo che $1/0 = +\infty$ e $\log(+\infty) = +\infty$).

Allora g è convessa e semicontinua inferiormente (s.c.i.)

Convessità:

Sia $t = \lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2$ combinazione convessa di $t_1, t_2 \in [0,1]$.
Dall' Ex. 1 ho che

$$\|f\|_{1/t} \leqslant \|f\|_{1/t_1}^{\lambda_1} \, \|f\|_{1/t_2}^{\lambda_2} \ ;$$

passando al logaritmo ottengo

$$\log(\|f\|_{1/t}) \leqslant \lambda_1 \log(\|f\|_{1/t_1}) + \lambda_2 \log(\|f\|_{1/t_2})$$

che è la disuguaglianza di convessità

$$g(t) \leqslant \lambda_1 \, g(t_1) + \lambda_2 \, g(t_2) \, .$$

Semicontinuità

Verificate che sono fatti equivalenti:

- $p \mapsto \|f\|_p$ è s.c.i. su $[1, +\infty]$;
- $t \mapsto \|f\|_{1/t}$ è s.c.i. su $[0,1]$;
- g è s.c.i. su $[0,1]$.

Per dimostrare la prima affermazione osservo che:

(1) $$\|f\|_p^p = \sup_{g \in \mathcal{Y}} \|g\|_p^p$$

dove $\mathcal{Y}$ è l'insieme delle funzioni semplici della forma

$$g = \sum_i \alpha_i \mathbb{1}_{E_i}$$

con $\alpha_i > 0$, E_i disgiunti, $\mu(E_i) < +\infty$ e tali che

$$g \leq |f|$$

Osservo quindi che per $g \in \mathcal{Y}$

$$\|g\|_p = \begin{cases} \left(\sum_i \alpha_i^p \mu(E_i) \right)^{\frac{1}{p}} & \text{per } p < +\infty \\ \sup_i \alpha_i & \text{per } p = +\infty \end{cases}$$

e che

(2) $p \mapsto \|g\|_p$ è continua su $[1, +\infty]$.

(Verificate (1) e (2) in particolare per $p = +\infty$.)

Infine la s.c.i. di $p \to \|f\|_p$ segue da (1) e (2) usando:

Lemma

Dati Y spazio metrico e $\mathcal{G}$ famiglia di funzioni $\varphi : Y \to (-\infty, +\infty]$ s.c.i., allora $\overline{\varphi} : Y \to (-\infty, +\infty]$ data da $\overline{\varphi}(y) := \sup_{\varphi \in \mathcal{G}} \varphi(y)$ è s.c.i.

3. Data $f : X \to \mathbb{R}$ misur., sia

$$I := \{ p \in [1,+\infty] : \|f\|_p < +\infty \} .$$

Allora I è un intervallo e la restrizione di $p \mapsto \|f\|_p$ alla chiusura $\bar{I}$ è continua.

Uso il cambio di variabile $t = 1/p$ e considero

$$J := \{ t \in [0,1] \text{ t.c. } \|f\|_{1/t} < +\infty \} = g^{-1}(\mathbb{R})$$

definita nell' Ex.2

- J è un intervallo perché g è convessa;
- g è continua nella parte interna di J perché è convessa e finita (fatto noto);
- la restrizione di g a $\bar{J}$ è continua perché è convessa e s.c.i. (la continuità agli estremi di $\bar{J}$ richiede una dimostrazione);
- ne segue che anche la restrizione di $t \mapsto \|f\|_{1/t}$ a $\bar{J}$ è continua.

4. Dati $1 \leq p_1 < p_2 < +\infty$ trovare funzioni f su $\mathbb{R}$ tali che:

- $I = (p_1, p_2)$ (fatto la lezione precedente);
- $I = [p_1, p_2)$ / $(p_1, p_2]$ / $[p_1, p_2]$;

- $I = (p_1, +\infty)$ / $[p_1, +\infty)$;
- $I = \{p_1\}$.

5. Sia $X \subset \mathbb{R}^d$, μ = Lebesgue, $1 \leqslant p < +\infty$. Allora $L^p(X)$ è separabile, cioè contiene un sottoinsieme Y numerabile e denso.

Prendo come V un opportuna famiglia di funzioni affini a tratti.

Dato $\delta > 0$ sia V_δ l'insieme delle $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue e con supporto compatto t.c.

- g è affine su $[k\delta, (k+1)\delta]$ $\forall k \in \mathbb{Z}$,
- $g(k\delta)$ è razionale $\forall k \in \mathbb{Z}$.

Pongo $V := \bigcup_{n=1}^{\infty} V_{1/n}$. Allora:

- siccome ogni $g \in V_\delta$ è determinata dai valori assunti su $\delta\mathbb{Z}$, V_δ è numerabile, e lo stesso vale per V;
- data $f \in C_c(\mathbb{R})$ con $\operatorname{supp} f \subset [-r, r]$ $\exists\, g_n \in V$ t.c. $\operatorname{supp} g_n \subset [-r, r]$ e $g_n \to g$ uniformemente (verificatelo) e quindi $g_n \to g$ in $L^p(\mathbb{R})$;

- quindi V è denso in $C_c(\mathbb{R})$ rispetto alla norma di $L^p(\mathbb{R})$, e siccome $C_c(\mathbb{R})$ è denso in $L^p(\mathbb{R})$, ho che V è denso in $L^p(\mathbb{R})$;
- le restrizioni a X delle funzioni in V sono dense in $L^p(X)$ (spiegare questo passaggio!)

6. Dato X spazio metrico, sono fatti equivalenti:
   (i) X non è separabile;

   (ii) $\exists\, \delta > 0$ e $Y \subset X$ più che numerabile t.c. $d(y, y') \geq \delta$ $\forall\, y, y' \in Y$ con $y \neq y'$.

Dimostro solo (ii) $\Rightarrow$ (i) (a voi l'altra implicazione)

Suppongo per assurdo che esista (x_n) successione densa in X.

Allora $\forall\, y \in Y$ esiste $n = n(y)$ t.c. $d(y, x_n) < \delta/2$.

Ma allora la mappa $y \in Y \to n(y) \in \mathbb{N}$ è iniettiva,

$(n(y) = n(y') = n \Rightarrow d(y, y') \leq d(y, x_n) + d(x_n, y') < r \Rightarrow y = y')$

che è assurdo perché Y è più che numerabile.

7. $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ non è separabile.

Prendo una successione (E_n) di insiemi misur. disgiunti in $\mathbb{R}^d$ con $|E_n|>0$ e per ogni $J\subset\mathbb{N}$ pongo

$$f_J := \sum_{n\in J} \mathbb{1}_{E_n}$$

e $Y := \{ f_J : J \in \mathbb{N} \}$.

Dati $J\neq J'$ si ha $f_J - f_{J'} = f_{J\setminus J'} - f_{J'\setminus J} \Rightarrow \|f_J - f_{J'}\|_\infty = 1$, inoltre $\operatorname{card}(Y) = \operatorname{card}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) =$ continuo.

8. Dato $X\subset\mathbb{R}^d$ con $|X|>0$, $L^\infty(X)$ non è separabile.

La dimostrazione dell'Ex. 7 funziona, ma la difficoltà è trovare la successione (E_n).
Questo è facile se X ha parte interna non vuota.
Per X qualunque si può usare un fatto visto in precedenza, cioè che $\forall m\in(0,|X|)$ esiste $X'\subset X$ t.c. $|X'|=m$.

Convoluzione

Date f_1, f_2 funzioni misur. su $\mathbb{R}^d$ il prodotto di convoluzione è la funzione $f_1 * f_2$ data da:

$$f_1 * f_2(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f_1(x-y) f_2(y)\, dy \underset{t=x-y}{=} \int_{\mathbb{R}^d} f_1(t) f_2(x-t)\, dt$$

Osservazioni

- In generale $f_1 * f_2(x)$ può non essere definito (per alcun x).
- $\boxed{\text{Se } f_1, f_2 : \mathbb{R}^d \to [0,+\infty] \text{ allora } f_1 * f_2 : \mathbb{R}^d \to [0,+\infty] \text{ è definita in tutti i punti } x \in \mathbb{R}^d.}$
- Se $f_1 * f_2(x)$ è definito, allora $f_2 * f_1(x) = f_1 * f_2(x)$
- E' importante che f_1 e f_2 siano definite su tutto $\mathbb{R}^d$ e che la misura sia Lebesgue.

  In realtà si può definire $f_1 * f_2$ anche per funzioni f_1, f_2 definite su G gruppo (dotato di misura invariante) per esempio:

  $\mathbb{Z}$ con la mis. che conta i punti

  Date $f_1, f_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, $f_1 * f_2(n) := \sum_{m \in \mathbb{Z}} f_1(n-m) f_2(m)$

Esempi di convoluzione

- Sia ρ la densità di una distrib. di massa in $\mathbb{R}^3$. Il potenziale del campo gravitaz. generato è

$$V(x) := \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|x-y|} \rho(y)\, dy$$

cioè $V = \rho * g$ con $g(x) = \frac{1}{|x|}$ ← potenziale della massa unit. nell'orig.

- Siano X_1, X_2 variabili aleatorie (a valori in $\mathbb{R}$) con distrib. di prob. continue ρ_1 e ρ_2. Se X_1 e X_2 sono indipendenti allora la distrib. di prob. di $X_1 + X_2$ è $\rho_1 * \rho_2$.

Caso più facile, X_1, X_2 var. aleat. a valori in $\mathbb{Z}$ con distrib. ρ_1 e ρ_2.
Infatti $\forall n \in \mathbb{Z}$

distrib. di X_1+X_2 →

$$\rho(n) := P(X_1+X_2=n) = P\Big(\dot{\bigcup_m} \{X_1=n-m, X_2=m\}\Big)$$

$$= \sum_{m\in\mathbb{Z}} P(X_1=n-m, X_2=m)$$

indip.! ⟶

$$= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \underbrace{P(X_1=n-m)}_{\rho_1(n-m)} \cdot \underbrace{P(X_2=m)}_{\rho_2(m)}$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \rho_1(n-m)\, \rho_2(m) = \rho_1 * \rho_2(n).$$

Lemma 1

Date $f_1, f_2 : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}^d$,

se $|f_1| * |f_2|(x) < +\infty$ allora $f_1 * f_2(x)$ è ben definito e reale, e

$$|f_1 * f_2(x)| \leqslant |f_1| * |f_2|(x).$$

Dim. Se

$$|f_1| * |f_2|(x) = \int_{\mathbb{R}^d} |f_1(x-y)\ f_2(y)|\, dy$$

è finito allora $f_1(x-\cdot)\ f_2(\cdot) \in L^1(\mathbb{R}^d)$

e quindi

$$f_1 * f_2(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f_1(x-y)\ f_2(y)\, dy$$

è ben def. e

$$|f_1 * f_2(x)| \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} |f_1(x-y) f_2(y)|\, dy = |f_1| * |f_2|(x)$$

$\square$

Corollario 2

Se $|f_1| * |f_2| \in L^p(\mathbb{R}^d)$ per qualche $p \in [1, +\infty]$ allora

- $f_1 * f_2(x)$ è ben def. per q.o. $x \in \mathbb{R}^d$
- $\|f_1 * f_2\|_p \leqslant \| |f_1| * |f_2| \|_p$.

Teorema 3

Dati $p_1, p_2, r \in [1,+\infty]$ t.c. $\boxed{1+\frac{1}{r} = \frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}}$ $\leftarrow (*)$,

e $f_1 \in L^{p_1}(\mathbb{R}^d)$, $f_2 \in L^{p_2}(\mathbb{R}^d)$, allora

- $f_1 * f_2$ è ben def. per q.o. $x \in \mathbb{R}^d$,
- $\|f_1 * f_2\|_r \leq \|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2}$.

Osservazione

$(*)$ è l'unica relaz. possibile tra p_1, p_2 e r.

Supponiamo infatti di avere $p_1, p_2, r \in [1,+\infty]$ e $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, $C>0$ t.c.

$$\|g_1 * g_2\|_r \leq C \|g_1\|_{p_1}^{\alpha_1} \|g_2\|_{p_2}^{\alpha_2} \qquad (**)$$

$\forall\, g_1, g_2 : \mathbb{R}^d \to [0,+\infty]$,

Allora $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ e $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2} = 1+\frac{1}{r}$.

Dim. Date g_1, g_2 e $\lambda > 0$ applico $(**)$ a λg_1 e g_2

$$\begin{array}{ccc} \|(\lambda g_1) * g_2\|_r & \leq & C \|\lambda g_1\|_{p_1}^{\alpha_1} \|g_2\|_{p_2}^{\alpha_2} \\ \| & & \| \\ \|\lambda (g_1 * g_2)\|_r & & C \lambda^{\alpha_1} \|g_1\|_{p_1}^{\alpha_1} \|g\|_{p_2}^{\alpha_2} \\ \| & & \\ \lambda \|g_1 * g_2\|_r & & \end{array}$$

cioè $\quad \lambda \|g_1 * g_2\|_r \leq C \lambda^{\alpha_1} \|g_1\|_{p_1}^{\alpha_1} \|g\|_{p_2}^{\alpha_2}$

Necessariamente $\alpha_1 = 1$.

Analogamente $\alpha_2 = 1$.

Date g_1, g_2, $\lambda > 0$, ~~pe~~ ponete $(g_i)_\lambda = g_i\left(\frac{x}{\lambda}\right)$ per $i = 1, 2$.

$$\|(g_1)_\lambda * (g_2)_\lambda\|_r \leq C \|(g_1)_\lambda\|_{p_1}^{\alpha_1} \|(g_2)_\lambda\|_{p_2}^{\alpha_2}$$

facendo i conti

$$\lambda^{d\left(1+\frac{1}{r}\right)} \|g_1 * g_2\|_r \leq \lambda^{d\left(\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}\right)} C \|g_1\|_{p_1}^{\alpha_1} \|g_2\|_{p_2}^{\alpha_2}$$

$\forall \lambda \implies 1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$.

$$(g_1)_\lambda * (g_2)_\lambda (x) = \int g_1\left(\frac{x-y}{\lambda}\right) \cdot g_2\left(\frac{y}{\lambda}\right) dy$$

$z = \frac{y}{\lambda} \longrightarrow \quad = \int g_1\left(\frac{x}{\lambda} - z\right) g_2(z) \lambda^d dz$

$dz = \frac{dy}{\lambda^d} \quad = \lambda^d \, g_1 * g_2\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \lambda^d (g_1 * g_2)_\lambda$

$$\|\lambda^d (g_1 * g_2)_\lambda\|_r = \lambda^d \|(g_1 * g_2)_\lambda\|_r$$

$$= \lambda^d \cdot \lambda^{\frac{d}{r}} \|g_1 * g_2\|_r$$

AM3 20/21 Lezione 10

14/10/20

Dalla lezione precedente

Teorema 3

Dati $p_1, p_2, r \in [1,+\infty]$ t.c. $\boxed{1+\frac{1}{r} = \frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}}$ (*),

e $f_1 \in L^{p_1}(\mathbb{R}^d)$, $f_2 \in L^{p_2}(\mathbb{R}^d)$, allora

(i) $f_1 * f_2$ è ben def. per q.o. $x \in \mathbb{R}^d$,

(ii) $\|f_1 * f_2\|_r \leq \|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2}$.

Casi rilevanti: a) $p_1 = 1$, $p_2 = r$: $\|f_1 * f_2\|_r \leq \|f_1\|_1 \|f_2\|_r$

b) $r = +\infty$ cioè p_1, p_2 coniugati : $\|f_1 * f_2\|_\infty \leq \|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2}$

↳ teorema successivo

Dim.

Basta dimostrare (ii) per $f_1, f_2 \geq 0$.

Infatti (ii) per $|f_1|$ e $|f_2|$ + Corollario 2 (lez. prec.)

implicano (i) e (ii) per f_1 e f_2.

Nel resto della dim. suppongo $f_1, f_2 \geq 0$

e $r < +\infty$.

Caso 1: $0 < \|f_1 * f_2\|_r < +\infty$

$$\|\underbrace{f_1 * f_2}_{h}\|_r^r = \int_{\mathbb{R}^d} h \cdot h^{r-1}\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} f_1(x-y)\, f_2(y)\, h^{r-1}(x)\, dy\, dx$$

prendo $\alpha_1, \alpha_2 \in [0,1]$, $\beta_1, \beta_2 \geq 0$ t.c. $\beta_1 + \beta_2 = r-1$ (li scelgo dopo)

$$\rightarrow = \iint \underbrace{\left(f_1^{\alpha_1} \cdot h^{\beta_1}\right)}\cdot\underbrace{\left(f_2^{\alpha_2}\cdot h^{\beta_2}\right)}\cdot\underbrace{\left(f_1^{1-\alpha_1} f_2^{1-\alpha_2}\right)}\, dx\, dy$$

applico Hölder con esponenti $\frac{1}{\gamma_1}, \frac{1}{\gamma_2}, \frac{1}{1-\gamma_1-\gamma_2}$, $\gamma_1, \gamma_2 \geq 0$ (li scelgo dopo)

$$\rightarrow \leq \left(\iint f_1^{\frac{\alpha_1}{\gamma_1}} h^{\frac{\beta_1}{\gamma_1}}\right)^{\gamma_1} \cdot \left(\iint f_2^{\frac{\alpha_2}{\gamma_2}} h^{\frac{\beta_2}{\gamma_2}}\right)^{\gamma_2} \cdot$$

$$\cdot \left(\iint f_1^{\frac{1-\alpha_1}{1-\gamma_1-\gamma_2}} f_2^{\frac{1-\alpha_2}{1-\gamma_1-\gamma_2}}\right)^{1-\gamma_1-\gamma_2}$$

Impongo ora che $\frac{\alpha_1}{\gamma} = \frac{1-\alpha_1}{1-\gamma_1-\gamma_2} = p_1$; $\frac{\alpha_2}{\gamma_2} = \frac{1-\alpha_2}{1-\gamma_1-\gamma_2} = p_2$; $\frac{\beta_1}{\gamma_1} = \frac{\beta_2}{\gamma_2} = r$. Cioè

$$\begin{cases} \alpha_1 = p_1\gamma_1 \\ 1-\alpha_1 = p_1(1-\gamma_1-\gamma_2) \\ \alpha_2 = p_2\gamma_2 \\ 1-\alpha_2 = p_2(1-\gamma_1-\gamma_2) \\ \beta_1 = \gamma_1 r, \quad \beta_2 = \gamma_2 r \end{cases}$$

(prime due) $\rightarrow 1 = p_1(1-\gamma_2) \qquad \gamma_2 = 1 - \frac{1}{p_1}$

(terza e quarta) $\rightarrow 1 = p_2(1-\gamma_1) \qquad \gamma_1 = 1-\frac{1}{p_2}$

$$\beta_1 = \gamma_1 r,\ \beta_2 = \gamma_2 r \rightarrow \beta_1 = \left(1-\frac{1}{p_2}\right)r, \quad \beta_2 = \left(1-\frac{1}{p_1}\right)r$$

(osservate che $\beta_1+\beta_2 = \left(2-\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}\right) r \underset{\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}=1-\frac{1}{r}}{=} r-1$)

Riassumendo

$$\|\underbrace{f_1 * f_2}_{h}\|_r^r \leq \left(\iint f_1^{p_1} h^r\right)^{1-\frac{1}{p_2}} \left(\iint f_2^{p_2} h^r\right)^{1-\frac{1}{p_1}} \left(\iint f_1^{p_1} f_2^{p_2}\right)^{\overbrace{\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}-1}^{\frac{1}{r}}}$$

$$\iint f_1^{p_1}(x-y)\, h^r(x)\, dx\, dy = \int\left(\int f_1^{p_1}(x-y)\, dy\right) h^r(x)\, dx$$

$$= \int \underbrace{\|f_1(x-\cdot)\|_{p_1}^{p_1}}_{\|f_1\|_{p_1}^{p_1}} h^r(x)\, dx = \|f\|_{p_1}^{p_1} \|h\|_r^r$$

$$= \left(\|f_1\|_{p_1}^{p_1} \|h\|_r^r\right)^{1-\frac{1}{p_2}} \left(\|f_2\|_{p_2}^{p_2} \|h\|_r^r\right)^{1-\frac{1}{p_1}} \left(\|f_1\|_{p_1}^{p_1} \|f_2\|_{p_2}^{p_2}\right)^{\frac{1}{r}}$$

$$= \|f_1\|_{p_1}^{p_1\underbrace{\left(1-\frac{1}{p_2}+\frac{1}{r}\right)}_{\frac{1}{p_1}}} \|f_2\|_{p_2}^{p_2\underbrace{\left(1-\frac{1}{p_1}+\frac{1}{r}\right)}_{\frac{1}{p_2}}} \|h\|_r^{r\underbrace{\left(2-\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}\right)}_{1-\frac{1}{r}}}$$

$$= \|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2} \|h\|_r^{r-1}$$

Quindi

$$\|f_1 * f_2\|_r^r \leq \|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2} \|f_1 * f_2\|_r^{r-1}$$

divido per $\|f_1 * f_2\|_r^{r-1}$ e ho finito.

Caso 2 : $\|f_1 * f_2\|_r = 0$ oppure $+\infty$

Se $\|f_1 * f_2\|_r = 0$ non c'è niente da dire.

Se $\|f_1 * f_2\|_r = +\infty$ approssimo f_1 e f_2 con successioni crescenti $f_{1,n}$, $f_{2,n}$ di funzioni limitate con supporto limitato.

$\left(f_{1,n} = (f \wedge n) \cdot \mathbb{1}_{B(0,n)} , \dots \right)$

Allora $f_{1,n} * f_{2,n}$ è limitata e con supp. limit. (verificatelo) e quindi $\|f_{1,n} * f_{2,n}\|_r < +\infty$ e per il Caso 1,

$$(*) \qquad \|f_{1,n} * f_{2,n}\|_r \leq \|f_{1,n}\|_{p_1} \|f_{2,n}\|_{p_2}$$

Inoltre $f_{1,n} * f_{2,n}(x) \uparrow f_1 * f_2(x)$ per il Teor. di convergenza monotona, e sempre per conv. monot.

$$\|f_{1,n} * f_{2,n}\|_r \uparrow \|f_1 * f_2\|_r$$

$$\|f_{1,n}\|_{p_1} \uparrow \|f_1\|_{p_1}$$

$$\|f_{2,n}\|_{p_2} \uparrow \|f_2\|_{p_2} \qquad \square$$

e quindi $(*)$ mi dà $\|f_1 * f_2\|_r \leq \|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2}$.

Teorema 4 (caso $r=+\infty$ del Teorema 3)

Dati p_1, p_2 esp. coniugati e $f_1 \in L^{p_1}(\mathbb{R}^d)$, $f_2 \in L^{p_2}(\mathbb{R}^d)$ allora:

(i) $f_1 * f_2(x)$ è ben definito $\forall x \in \mathbb{R}^d$;

(ii) $|f_1 * f_2(x)| \leq \|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2} \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$;

(iii) $f_1 * f_2$ è uniformemente continua;

(iv) se $1 < p_1, p_2 < +\infty$, $f_1 * f_2(x) \xrightarrow[|x| \to +\infty]{} 0$.

(iv) non vale se $p_1 = +\infty$ (o $p_2 = +\infty$), prendete $f_1 \equiv 1$, $f_2 =$ funzione in L^1 con integrale 1 allora $f_1 * f_2 \equiv 1$.

Def. Data $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{R}^d$, pongo

$$\tau_h f : \underset{\mathbb{R}^d}{\underset{\Uparrow}{x}} \mapsto f(x-h)$$

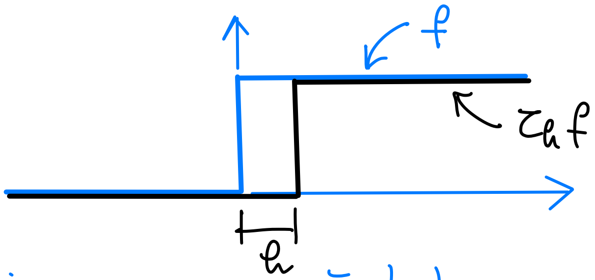
Lemma 5

Se $1 \leq p < +\infty$ e $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ allora la mappa

$$\underset{\mathbb{R}^d}{\overset{\cap}{h}} \longmapsto \underset{L^p(\mathbb{R}^d)}{\overset{\cap}{\tau_h f}}$$

è continua.

Se $p = +\infty$ non è vero: prendete $f := \mathbb{1}_{[0,+\infty)}$



Se la misura non è Leb. non vale ($\mu = \delta_0$)

Dim.

Grazie all'identità $\tau_{h_1+h_2} f = \tau_{h_1}(\tau_{h_2} f)$
basta dimostrare la continuità in 0.

Caso 1: $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$

$$\|\tau_h f - f\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-h) - f(x)|^p dx \xrightarrow[h \to 0]{} 0$$

per convergenza dominata:

- convergenza puntuale: $|f(x-h) - f(x)|^p \xrightarrow[h\to 0]{} 0 \ \forall x$
  perché f è continua.

- dominazione: dato R t.c. $\mathrm{Supp}(f) \subset B(0,R)$ allora $\mathrm{supp}(f(\cdot - h) - f) \subset B(0, R+1)$ se $|h| \leq 1$, e quindi

$$|f(x-h) - f(x)|^p \leq 2^p \| f \|_\infty^p \cdot \mathbb{1}_{B(0,R+1)}$$

Caso 2: f qualunque

Fisso $\varepsilon > 0$ e prendo $g \in C_c(\mathbb{R}^d)$ t.c. $\|g - f\|_p \leq \varepsilon$.

Allora

$$\| \tau_h f - f \|_p = \| (\tau_h f - \tau_h g) + (\tau_h g - g) + (g - f) \|_p$$

$$\leq \| \tau_h (f-g) \|_p + \| \tau_h g - g \|_p + \| g - f \|_p$$

la norma L^p è inv. per traslazioni: $\| \tau_h (f-g) \|_p = \| f - g \|_p$

$$\leq 2\varepsilon + \underbrace{\| \tau_h g - g \|_p}_{\downarrow\, 0 \text{ per } h \to 0}$$

Passando al limite per $h \to 0$

$$\limsup_{h \to 0} \| \tau_h f - f \| \leq 2\varepsilon$$

e siccome ε è arbitrario ho finito $\square$

Lemma 6

Lo spazio $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$ delle $f:\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ continue t.c. $f(x) \xrightarrow[|x|\to+\infty]{} 0$ è chiuso risp. alla conv. unif.

Dimostrazione per esercizio.

Dim. Teorema 4

(i) & (ii). Osservo che

$$|f_1| * |f_2|(x) = \int_{\mathbb{R}^d} |f_1(x-y)|\,|f_2(y)|\,dy$$

Hölder $\mapsto$ $$\leq \|f_1(x-\cdot)\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2}$$

$\|f(x-\cdot)\|_p = \|f\|_p$ per via dell'inv. della misura di L. risp. a traslaz. e riflessioni $\to$ $$= \|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p}$$

Concludo usando il lemma 1 della lez. prec.

(iii) Uno tra p_1 e p_2 è finito; suppongo p_1.

Fisso $x, h \in \mathbb{R}^d$

$$f_1 * f_2\,(x+h) - f_1 * f_2\,(x) = \int_{\cancel{\mathbb{R}^d}} \big(f_1(x+h-y) - f_1(x-y)\big) f_2(y)\,dy$$

quindi

$$|f_1 * f_2\,(x+h) - f_1 * f_2\,(x)| \leq \int |f_1(x+y-h) - f_1(x-y)|\,|f_2(y)|\,dy$$

Hölder

$$\leq \|f_1(x+h-\cdot) - f_1(x-\cdot)\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2}$$

$$= \|f_1(\cdot - h) - f_1(\cdot)\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2}$$

$$= \underbrace{\|\tau_h f_1 - f_1\|_{p_1}}_{\to 0} \|f_2\|_{p_2}$$

$h \to 0$ per il lemma 5,

(iv) Approssimo f_1 e f_2 con $f_{1,n}$ e $f_{2,n} \in C_c(\mathbb{R}^d)$ in L^{p_1} e L^{p_2} risp.

Osservo che $f_{1,n} * f_{2,n} \in C_c(\mathbb{R}^d) \subset C_0(\mathbb{R}^d)$

Per il lemma 6 basta dim. che

$$f_{1,n} * f_{2,n} \longrightarrow f_1 * f_2 \quad \text{uniformemente}$$

$$\| f_{1,n} * f_{2,n} - f_1 * f_2 \|_\infty =$$

$$= \| (f_{1,n} * f_{2,n} - f_{1,n} * f_2) + (f_{1,n} * f_2 - f_1 * f_2) \|_\infty$$

linearità della conv. $\longrightarrow$

$$\leq \| f_{1,n} * (f_{2,n} - f_2) \|_\infty + \| (f_{1,n} - f_1) * f_2 \|_\infty$$

(ii) $\longrightarrow$

$$\leq \underbrace{\| f_{1,n} \|_{p_1}}_{\downarrow \ \| f_1 \|_{p_1}} \underbrace{\| f_{2,n} - f_2 \|_{p_2}}_{\downarrow \ 0} + \underbrace{\| f_{1,n} - f_1 \|_{p_1}}_{\downarrow \ 0} \| f_2 \|_{p_2}$$

quindi $\| f_{1,n} * f_{2,n} - f_1 * f_2 \|_\infty \longrightarrow 0$ $\square$

AM3 20/21 Lezione 11

15/10/20

Derivata e convoluzione

Punto di partenza:

$$\tau_h (f_1 * f_2) = (\tau_h f_1) * f_2 = f_1 * \tau_h f_2$$

$$\tau_h (f_1 * f_2)(x) = f_1 * f_2 (x-h) = \int f_1(x-h-y)\, f_2(y)\, dy$$

$$= \int \tau_h f_1(x-y)\, f_2(y)\, dy = (\tau_h f_1) * f_2 (x).$$

Quindi (formalmente)

$$\frac{\partial}{\partial h}(f_1 * f_2)(x) = \lim_{t\to 0} \frac{f_1 * f_2(x) - f_1 * f_2(x-th)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{f_1 * f_2(x) - (\tau_{th} f_1) * f_2}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{f_1 - \tau_{th} f_1}{t} * f_2 = \frac{\partial f_1}{\partial h} * f_2 .$$

mi aspetto $\frac{\partial}{\partial h}(f_1 * f_2) = \frac{\partial f_1}{\partial h} * f_2 = f_1 * \frac{\partial f_2}{\partial h} \dots$

$(\exists \frac{\partial f_1}{\partial h}$ continua$)$

continua e deriv. con cont. in direz. h

Proposizione 7

Dati $h \in \mathbb{R}^d$, $f_1 : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ t.c. $f_1, \frac{\partial f_1}{\partial h} \in L^{p_1}(\mathbb{R}^d)$ e $f_2 \in L^{p_2}(\mathbb{R}^d)$ con p_1, p_2 esponenti coniugati, allora $f_1 * f_2$ è continua, derivabile con continuità nella direzione h e

$$\frac{\partial}{\partial h}(f_1 * f_2) = \frac{\partial f_1}{\partial h} * f_2$$

Lemma 8 (Teorema fondamentale del calcolo integrale)

Date $g, h : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue e tali che

$$g(x) - g(a) = \int_a^x h(t)\,dt \qquad \forall x \in [a,b]$$

allora g è C^1 e $g' = h$

Dim. Prop. 7 per $d=1$

Data $f_1 \in C^1(\mathbb{R})$ t.c. $f_1, f_1' \in L^{p_1}$ e $f_2 \in L^{p_2}$, allora $f_1 * f_2 \in C^1$ e $(f_1 * f_2)' = f_1' * f_2$.

Per il lemma 8 basta dimostrare che $\forall -\infty < a < x < +\infty$

$$f_1 * f_2(x) - f_1 * f_2(a) = \int_a^x f_1' * f_2(t)\,dt$$

Infatti

$$\int_a^x f_1' * f_2(t)\,dt = \int_a^x \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_1'(t-y) f_2(y)\,dy \right) dt$$

Fubini $\longrightarrow$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_a^x f_1'(t-y)\,dt \right) f_2(y)\,dy$$

$$\int_a^x \int_{-\infty}^{\infty} |f_1'(t-y)|\,|f_2(y)|\,dy\,dt \leq \int_a^x \|f_1'(t-\cdot)\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2}\,dt = (x-a)\|f'\|_{p_1}\|f_2\|_{p_2} < +\infty$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(f_1(x-y) - f_1(a-y) \right) f_2(y)\,dy$$

$$= f_1 * f_2(x) - f_1 * f_2(a). \qquad \square$$

Teorema 9

Se $f_1 \in C^k(\mathbb{R}^d)$ con $k = 0, \dots, \infty$ e $\nabla^h f_1 \in L^{p_1}(\mathbb{R}^d)$ per ogni $h = 0, \dots, k$, e se $f_2 \in L^{p_2}(\mathbb{R}^d)$ con p_1, p_2 coniugati, allora $f_1 * f_2 \in C^k(\mathbb{R}^d)$

e

$$\nabla^h (f_1 * f_2) = (\nabla^h f_1) * f_2 \quad \text{per } h = 0, \dots, k.$$

$\nabla^h f_1$ ha valore in $\mathbb{R}^{\overbrace{d\times\dots\times d}^{h}}$

e f_2 ha valore in $\mathbb{R}$.

Come definisco $\nabla^h f_1 * f_2$?

...

Dim. per induzione su k. (Fate voi i dettagli.)

Osserv.

Per $d=1$, non ci serve che f_1 sia C^1.

Basta che $f_1 \in L^p(\mathbb{R})$, ed esista $h \in L^p(\mathbb{R})$

t.c.
$$f_1(x) - f_1(a) = \int_a^x h(t)\,dt \qquad \forall -\infty < a < x < +\infty$$

e allora $f_1 * f_2$ è C^1 con $(f_1 * f_2)' = h * f_2$.

Approssimazione per convoluzione

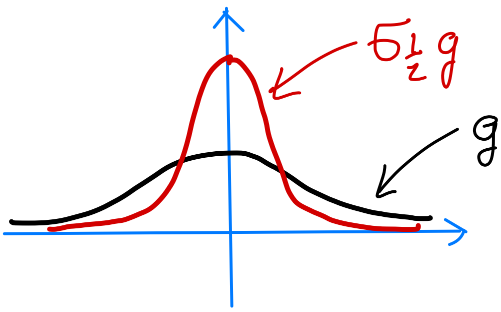
Notazione: data $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ e $\delta > 0$ indico con $\sigma_\delta g$ la funzione su $\mathbb{R}^d$ data da

$$\sigma_\delta g(x) = \frac{1}{\delta^d}\, g\left(\frac{x}{\delta}\right).$$

Osservo che se $g \in L^1$ allora $\sigma_\delta g \in L^1$ e

$$\int_{\mathbb{R}^d} \sigma_\delta g \, dx = \int_{\mathbb{R}^d} g \, dx$$

$\sigma_\delta g$ "si concentra" vicino all'origine per $\delta \to 0$



Teorema 10

Data $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ con $p<+\infty$ e $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ allora

$$f * \sigma_\delta g \xrightarrow[\delta \to 0]{} m f \quad \text{in } L^p(\mathbb{R}^d)$$

dove $m = \int_{\mathbb{R}^d} g \, dx$

$\nabla^k g \in L^q(\mathbb{R}^d)$ $\forall q \, \forall k$

$\Uparrow$

Corollario 11 (immediato)

Se $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $p<+\infty$, e $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ e $\int g \, dx = 1$ allora $f * \sigma_\delta g$ è C^∞ e $f * \sigma_\delta g \xrightarrow[\delta \to 0]{} f$ in L^p.

Osserv.

- Il teor. 10 non vale per $p = +\infty$.

  Solito controes.: $f = \mathbb{1}_{[0,+\infty]}$, solita spiegaz.

- Interpret. Teor. 10: suppongo $g \geq 0$, $m=1$, e $\operatorname{supp} g \subset B(0,1)$. Allora $\sigma_\delta g \geq 0$, $\int \sigma_\delta g = 1$ e $\operatorname{supp} \sigma_\delta g \subset B(0,\delta)$.

Posso interpretare $f * \sigma_\delta g$ come una "media integrale" di traslate di f rispetto alla misura di prob. $\sigma_\delta g$, cioè

$$f * \sigma_\delta g = \int \tau_y f \cdot \sigma_\delta g(y)\, dy$$

siccome $\sigma_\delta g$ è concentrata in $B(0,\delta)$ e $y \longmapsto \tau_y f$ è continua, ci si aspetta quindi che $f * \sigma_\delta g \xrightarrow[\delta \to 0]{} \tau_0 f = f$.

Dim. del teorema 10

$$\| f*g - mf \|_p^p = \int_{\cancel{\mathbb{R}^d}} \overbrace{|f*g - mf|}^{h}{}^p dx$$

$$= \int |f*g - mf| \, h^{p-1} dx$$

$$= \int \left| \int f(x-y) g(y)\, dy - f(x) \int g(y)\, dy \right| h^{p-1}(x)\, dx$$

$$\leqslant \int \int |f(x-y) - f(x)| \, |g(y)| \, dy \; h^{p-1}(x)\, dx$$

Fubini $\longrightarrow$ $$= \int \left(\int |f(x-y) - f(x)| \, h^{p-1}(x)\, dx \right) |g(y)| \, dy$$

Hölder $\longrightarrow$
q esp. con. di p
$$\leqslant \int \| f(\cdot - y) - f \|_p \, \underbrace{\| h^{p-1} \|_q}_{\| h \|_p^{p-1}} \, |g(y)| \, dy$$

$$= \|h\|_p^{p-1} \int_{\mathbb{R}^d} \|\tau_y f - f\| \cdot |g(y)|\, dy$$

Riassumendo

$$\|f*g - mf\|_p^{\cancel{p}} \leq \cancel{\|f*g-mf\|_p^{p-1}} \int_{\cancel{\mathbb{R}^d}} \|\tau_y f - f\| \cdot |g(y)|\, dy$$

Applico questa stima con $\sigma_\delta g$ al posto di g:

$$\|f * \sigma_\delta g - mf\|_p \leq \int \|\tau_y f - f\|_p \cdot \underbrace{|\sigma_\delta g(y)|}_{= \frac{1}{\delta^d}|g(\frac{y}{\delta})|}\, dy$$

$z = \frac{y}{\delta}$

$dz = \frac{1}{\delta^d}\, dy$

$$\longrightarrow = \underbrace{\int \|\tau_{\delta z} f - f\|_p \; |g(z)|\, dz}_{\xrightarrow{\delta \to 0}\ 0}$$

per convergenza dominata.

Verifica: convergenza puntuale: $\|\tau_{\delta z} f - f\|_p \xrightarrow[\delta \to 0]{} 0 \quad \forall z$

dominazione: $2\|f\|_p \cdot |g| \in L^1$ $\square$

Esercizi

1. Date $f_1, f_2 \in L^1(\mathbb{R}^d)$ so che $f_1 * f_2 \in L^1(\mathbb{R}^d)$

   inoltre $\int f_1 * f_2 \, dx = \left(\int f_1 \, dx\right)\left(\int f_2 \, dy\right)$

   Fubini + cambio variabile

2. Siano $f_1, f_2 : \mathbb{R}^d \longrightarrow [0,+\infty]$, t.c.

   $\{x : f_1(x) \neq 0\} \subset E_1$, $\{x : f_2(x) \neq 0\} \subset E_2$.

   Allora $\{x : f_1 * f_2(x) \neq 0\} \subset E_1 + E_2 = \{x_1 + x_2 : \dots\}$

   $$f_1 * f_2(x) = \int f_1(x-y) \, f_2(y) \, dy$$

   se $x \notin E_1 + E_2$ allora $f_1(x-y) \, f_2(y) = 0 \ \forall y$ e

   quindi $f_1 * f_2(x) = 0$.

3. Dati $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}^d$ con $|E_1|, |E_2| > 0$ allora

   $E_1 + E_2$ ha parte non vuota.

   Sia $g := \mathbb{1}_{E_1} * \mathbb{1}_{E_2}$. Suppongo $|E_2| < +\infty$ Allora g è

   continua, $g \neq 0$ $\left(\Leftarrow \int g = |E_1| \cdot |E_2| > 0\right)$

   e quindi $U := \{x : g(x) > 0\}$ è aperto

   non vuoto e contenuto in $E_1 + E_2$ ($\Leftarrow$ Ex. 2).

4. Se f_1, f_2 sono limitate con supporto limitato allora $f_1 * f_2$ è limitata con supp. lim.

5. Se $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ e $\int_E f\,dx = 0 \quad \forall E \subset \mathbb{R}^d$ allora $f = 0$ q.o. (facile)

6. Se $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ e $\int_B f\,dx = 0 \quad \forall B$ palla in $\mathbb{R}^d$ allora $f = 0$ q.o.

Ω aperto in Ω

Sia $g = \mathbb{1}_{B(0,1)}$. Allora

$$\begin{array}{c} \delta_\delta g * f \longrightarrow \alpha_d \cdot f \quad \text{in } L^1 \\ \| \\ \frac{1}{\delta^d} \int_{B(x,\delta)} f(y)\,dy = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d. \end{array}$$

7. Se $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ e $\int_{\mathbb{R}^d} f \cdot g\,dx = 0 \quad \forall g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ allora $f = 0$ q.o.

Ω Ω

(Lemma importante)

8. Estendere gli ex. 6 e 7 a Ω aperto di $\mathbb{R}^d$.