AM3 20/21 lezione 4

30/9/2020

$\boxed{\text{Disuguaglianze e spazi } L^p}$

Disuguaglianza di Jensen

Dati
- $X, \mathcal{A}, \mu$ con $\boxed{\mu(X)=1}$
- $f : \mathbb{R}^d \to (-\infty, +\infty]$ convessa e semi-continua inferior. (s.c.i)
- $u : X \to \mathbb{R}^d$ sommabile (cioè $\int_X |u| \, d\mu < +\infty$ $\Rightarrow$ $\int_X u \, d\mu$ esiste $\in \mathbb{R}^d$)

Allora $f \circ u$ è $\boxed{\text{integrabile}}$ e

(*) $$\int_X f \circ u \, d\mu \geq f\left(\int_X u \, d\mu\right)$$

Osserv.

- Per la precisione, $(f \circ u)^-$ ha integrale finito
- Interpretando μ come probabilità (*) si riscrive come $E(f \circ u) \geq f(E(u))$.

somma finita

- Se $u = \sum_i \alpha_i \mathbb{1}_{E_i}$ con E_i disgiunti t.c. $\cup E_i = X$ allora (*) si riduce alla disuguaglianza di convessità.

Posto infatti $\lambda_i := \mu(E_i)$ ho che $\lambda_i \geq 0$, $\sum \lambda_i = 1$ e

$$\int_X f \circ u \, d\mu = \int_X \sum_i f(y_i) \cdot \mathbb{1}_{E_i} \, d\mu$$

$$= \sum_i \lambda_i f(y_i)$$

$$\geq f\left(\sum_i \lambda_i y_i\right) = f\left(\int_X u \, d\mu\right).$$

Si può partire da qui per dimostrare (*) in generale (non lo farò).

- La disug. (*) vale anche se f è definita su I intervallo e $u : X \to I$.

Ci si può infatti ricondurre al caso precedente estendendo f a tutto $\mathbb{R}$. Dimostrate che tale estensione esiste.

(Per esempio, se $I = (0,+\infty)$ e $f(y) := -\log y$, qual'è l'estensione?)

- Se f ha solo valori finiti, allora è automaticamente continua. In generale l'ipotesi che f è s.c.i. è necessaria.

- Se $0 < \mu(X) < +\infty$ la disug. di Jensen va modificata come segue:

$$\fint_X f\circ u \, d\mu \leq f\left(\fint_X u \, d\mu\right)$$

dove $\fint_X g \, d\mu =$ media di $g := \frac{1}{\mu(X)} \int_X g \, d\mu$.

Per la dimostrazione ci si riconduce al caso precedente sostituendo μ con $\tilde{\mu} := m \cdot \mu$, con $m := \frac{1}{\mu(X)}$

Dim. Pongo $y_0 := \int_X u \, d\mu$. (*) diventa

$$(**) \qquad \int_X f\circ u \, d\mu \geqslant f(y_0).$$

$\phi(y) = a \cdot y + b$

Prendo $\phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ $\boxed{\text{affine}}$ t.c. $\phi \leq f$.

Allora

$$\int_X f \circ u \, d\mu \geq \int_X \phi \circ u \, d\mu = \int_X a \cdot u + b \, d\mu$$

$$= a y_0 + b = \phi(y_0).$$

Concludo usando il seguente

lemma $\forall f : \mathbb{R}^d \to (-\infty, +\infty]$ convessa e s.c.i

$$(+) \qquad \sup_{\substack{\phi \text{ affine} \\ \phi \leq f}} \phi(y_0) = f(y_0) \qquad \forall y_0 \in \mathbb{R}^d$$

Questa è una caratt. delle funzioni f convesse e s.c.i. su $\mathbb{R}^d$.

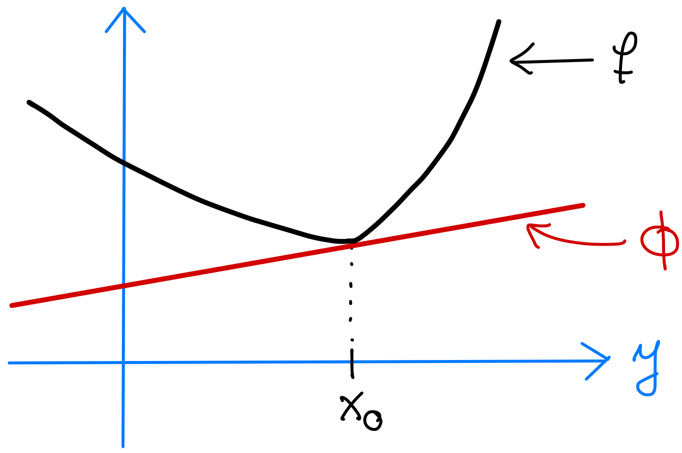
La dimostro per $d=1$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Provate a fare voi il caso $f : \mathbb{R} \to (-\infty, +\infty]$ o anche il caso generale.

In tal caso il sup in (+) è un max ed è raggiunto prendendo

$$\phi(y) := a \cdot (y - y_0) + f(y_0)$$

con $a \in [f'(x_0^-), f'(x_0^+)]$.



Dalla dim. sopra ho che

$$f \circ u \geq \phi \circ u \quad \text{sommabile}$$

$$\Longrightarrow (f \circ u)^- \leq (\phi \circ u)^- \quad \text{sommabile}$$

$$\Longrightarrow (f \circ u)^- \text{ è sommabile.}$$

$$\Longrightarrow f \circ u \text{ è integrabile.}$$

$\square$

Norma L^p

Fisso $p \in [1,+\infty]$ ← chiamato "esponente di sommabilità"

Dati p_1, p_2 dico che sono esponenti coniugati se $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = 1$ (conv. $\frac{1}{+\infty} = 0$)

Se p e q sono coniugati allora

$p = 2 \Longleftrightarrow q = 2$, $\quad p = 1 \Longleftrightarrow q = +\infty$.

Dati:

- $X, \mathcal{A}, \mu$
- $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ oppure $\mathbb{R}^d$ (misurabile)
- $p \in [1, +\infty)$

Definisco

$$\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

"norma L^p di f" (non so ancora che è una norma)

Definisco inoltre

$$\|f\|_\infty := \underbrace{\inf\left\{m\in[0,+\infty] \;\middle|\; |f|\le m \ \ \mu\text{-q.o.}\right\}}_{\text{"sup. essenziale" di } |f|}$$

(confrontare con la def. di sup. di f)

OSS. 1) $\|f\|_\infty \le \sup_{x\in X} |f(x)|$

2) nella def. di $\|f\|_\infty$, l'inf è un minimo, in altre parole vale

$$|f(x)| \le \|f\|_\infty \quad \text{per } \mu\text{-q.o. } x$$

3) $\|f\|_p = 0 \iff f = 0$ q.o.

4) $f_1 = f_2$ q.o. $\Longrightarrow \|f_1\|_p = \|f_2\|_p$.

Verificare per ex. quanto appena detto!

Disuguaglianza di Young

$\forall\, a_1, a_2 \geq 0$, $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ t.c. $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$

vale

$$a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \leq \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 \qquad (*)$$

inoltre vale $=$ sse $a_1 = a_2$

Dim. Se a_1 o $a_2 = 0$ $(*)$ è ovvia.

Suppongo $a_1, a_2 > 0$ e passo al logaritmo

$$\lambda_1 \log a_1 + \lambda_2 \log a_2 \leq \log(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2)$$

vera per la concavità del logaritmo

Il resto dell'enunciato segue dalla stretta convessità del logaritmo. $\square$

Disuguaglianza di Hölder

Date $f_1, f_2 : X \to \overline{\mathbb{R}}$ (o $\mathbb{R}^d$) e p_1, p_2 coniug., allora

$$\int_X |f_1||f_2|\, d\mu \le \|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2} .$$

Vale a patto di porre $+\infty \cdot 0 = 0$ nel prodotto a destra dell'uguale.

Dim.

Se $\|f_1\|_{p_1} = 0/+\infty$ o $\|f_2\|_{p_2} = 0/+\infty$ la dim. é immediata. Suppongo $\|f_i\|_{p_i} \in (0, +\infty)$.

Caso 1: $p_1 = 1$ e $p_2 = +\infty$ (o il contrario).

$$\int_X |f_1||f_2|\, d\mu \le \int_X |f_1|\, \|f_2\|_\infty\, d\mu = \|f_2\|_\infty \cdot \int_X |f_1|\, d\mu$$

Caso 2: $1 < p_1, p_2 < +\infty$. Prendo $\gamma > 0$ (il valore preciso lo scelgo più sotto)

$$\int_X |f_1||f_2|\,d\mu = \int_X \underbrace{\left(\gamma^{p_1}|f_1|^{p_1}\right)}_{g_1}^{\frac{1}{p_1}=\lambda_1} \underbrace{\left(\gamma^{-p_2}|f_2|^{p_2}\right)}_{g_2}^{\frac{1}{p_2}=\lambda_2} d\mu$$

$$= \int_X g_1^{\lambda_1} g_2^{\lambda_2}\,d\mu$$

disug. di Young $\rightarrow$

$$\leq \int_X \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2\,d\mu$$

$$= \lambda_1 \underbrace{\gamma^{p_1}\|f_1\|_{p_1}^{p_1}}_{a_1} + \lambda_2 \underbrace{\gamma^{-p_2}\|f_2\|_{p_2}^{p_2}}_{a_2}$$

$$= \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2$$

caso = nella disug. di Young: vale prendendo γ t.c. $a_1 = a_2$. controllare che tale γ esiste! $\rightarrow$

$$= a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2}$$

$$= \|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2}. \qquad \square$$

Osserv.

- Dati $f_1, \dots, f_n$ e $p_1, \dots, p_n$ t.c. $\frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_n} = 1$ allora

$$\int_X \prod_i |f_i|\,d\mu \leq \prod_i \|f_i\|_{p_i}$$

Dim. per esercizio (induzione su n opp. dimostrazione diretta generalizzando Young).

• <u>Caso uguaglianza in Hölder</u>:

se $0 < \|f_1\|_{p_1}; \|f_2\|_{p_2} < +\infty$ allora

vale "=" in Hölder sse

esiste $c \in (0,+\infty)$ t.c. $|f_1|^{p_1} = c|f_2|^{p_2}$ q.o.

Dimostrazione per esercizio.

Disuguaglianza di Minkowski

Dato $p \in [1,+\infty]$, $f_1, f_2 : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ opp. $\mathbb{R}^d$

allora

$$\|f_1 + f_2\|_p \leq \|f_1\|_p + \|f_2\|_p .$$

<u>Dim.</u>

<u>Caso 1</u>: $p=1$ oppure $p=+\infty$. Casi semplici, fare per esercizio.

<u>Caso 2</u>: $1 < p < +\infty$, $0 < \|f_1 + f_2\|_p < +\infty$.

$$\|f_1 + f_2\|_p^p = \int_X |f_1 + f_2|^p \, d\mu$$

$$\leq \int_X (|f_1|+|f_2|)\, |f_1+f_2|^{p-1}\, d\mu$$

$$= \int_X |f_1|\, |f_1+f_2|^{p-1} d\mu + \int_X |f_2|\, |\ldots\ldots|\, d\mu$$

Hölder con q coniug. di p

$$\leq \|f_1\|_p \, \| \, |f_1+f_2|^{p-1} \|_q + \|f_2\|_p \, \|\ldots\ldots\|_q$$

$$= (\|f_1\|_p + \|f_2\|_p) \, \underbrace{\| \, |f_1+f_2|^{p-1} \|_q}_{\substack{\| \\ \|f_1+f_2\|_p^{p-1}}}$$

Riassumendo

$$\|f_1+f_2\|_p^p \leq (\|f_1\|_p + \|f_2\|_p) \, \|f_1+f_2\|_p^{p-1}$$

e ottengo la tesi dividendo per $\|f_1+f_2\|_p^{p-1}$.

Caso 3 : $1<p<+\infty$, $\|f_1+f_2\|_p = 0$ opp. $+\infty$

Il caso $=0$ è banale.

Il caso $+\infty$ segue dalla disug.

$$\|f_1+f_2\|_p^p \leq 2^{p-1}(\|f_1\|_p^p + \|f_2\|_p^p)$$

variante non ottimale della disug. di Mink.

Dimostriamola:

$$\|f_1+f_2\|_p^p = \int_X |f_1+f_2|^p \, d\mu$$
$$= 2^p \int_X \left|\frac{f_1+f_2}{2}\right|^p d\mu$$

y^p è convessa

$$\leq 2^p \int_X \frac{1}{2}|f_1|^p + \frac{1}{2}|f_2|^p \, d\mu$$
$$= 2^{p-1}\left(\|f_1\|_p^p + \|f_2\|_p^p\right) \qquad \square$$

AM3 20/21 lezione 5

1/10/2020

Continuiamo con la costruzione degli spazi L^p

Fissiamo $X, \mathcal{A}, \mu$, $p \in [1, +\infty]$.

Proposizione

L'insieme $\mathcal{L}^p$ delle funzioni $f: X \to \mathbb{R}$ (o $\mathbb{R}^d$) misurabili t.c. $\|f\|_p < +\infty$ è uno spazio vettoriale e $\|\cdot\|_p$ è una seminorma (su $\mathcal{L}^p$).

Dim.

a) $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \, \|f\|_p$ se $\|f\|_p < +\infty$ o $\lambda \neq 0$ (calcolo immediato)

b) $f \in \mathcal{L}^p$ & $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda f \in \mathcal{L}^p$

c) Dis. di Minkowski: $\|f_1 + f_2\|_p \leq \|f_1\|_p + \|f_2\|_p$

d) $f_1, f_2 \in \mathcal{L}^p \Rightarrow f_1 + f_2 \in \mathcal{L}^p$

e) $\|\cdot\|_p$ è una seminorma $\Leftarrow$ a) & c). $\square$

$\|\cdot\|_p$ non è una norma su $\mathcal{L}^p$ perché

$$N := \{ f \in \mathcal{L}^p : \|f\|_p = 0 \} = \{ f : f = 0 \text{ q.o.} \} \neq \{0\}$$

vale $\neq$ se $\mathcal{A}$ contiene insiemi non vuoti e μ-nulli

Definizione

Si pone $L^p := \mathcal{L}^p / N = \mathcal{L}^p / \sim$

dove $f_1 \sim f_2 \overset{def}{\iff} f_1 = f_2$ q.o.

Per ogni $[f] \in L^p$ si pone $\|[f]\|_p := \|f\|_p$

definizione ben posta

$\|\ \|_p$ è una norma su L^p

Fatto generale: dato V spazio vettoriale con seminorma $\|\cdot\|$, si pone $N := \{ v \in V : \|v\| = 0 \}$.
Allora N è un sottospazio di V.
Per ogni $[v] \in V/N$ si pone $\|[v]\| := \|v\|$, la definizione è ben posta e $\|\cdot\|$ è una norma su V/N.

Importante: nella pratica si pensa agli elementi di L^p come funzioni.

Ma attenzione: certe "operazioni" non sono legittime su L^p.

Per esempio, preso $x_0 \in X$, considero

$$\{ f \in L^p : f(x_0) = 0 \}$$

non è un sottoinsieme ben definito di L^p (a meno che $\mu(\{x_0\}) > 0$).

Per contro

cioè f è sommabile

$$\{ f \in L^1 : \int_X f \, d\mu = 0 \}$$

è perfettamente ben definito!

Teorema principale (dimostrazione la prox. lez.)

Lo spazio L^p è completo!

Notazione

$$L^p = L^p(X) = L^p(X, \mu) = L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$$

per le funzioni a valori in $\mathbb{R}$

$$L^p = L^p(X; \mathbb{R}^n)$$ per le funz. a valori in $\mathbb{R}^n$.

In particolare, se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, scrivo sempre $L^p(\Omega)$; $L^p(\Omega; \mathbb{R}^n)$ dando per scontato che $\mu = \mathcal{L}^n$ (ristretta a Ω).

Prodotto scalare su L^2

Date $f_1, f_2 \in L^2(X)$ si pone

$$\langle f_1 ; f_2 \rangle := \int_X f_1 \cdot f_2 \, d\mu$$

Osserv.

- La def. di $\langle f_1 ; f_2 \rangle$ è ben posta.

  Basta far vedere che $\int_X |f_1 f_2| \, d\mu < +\infty$, che segue da Hölder:

  $$\int |f_1 f_2| \, d\mu \leq \|f_1\|_2 \|f_2\|_2 < +\infty .$$

- $\|f\|_2^2 = \langle f, f \rangle \quad \forall f \in L^2(X)$.

- Inoltre $\left| \int_X f_1 f_2 \, d\mu \right| \leq \int_X |f_1 f_2| \, d\mu$ quindi

$$|\langle f_1 ; f_2 \rangle| \leq \|f_1\|_2 \, \|f_2\|_2$$

(Cauchy – Schwarz).

- $\langle \cdot ; \cdot \rangle$ è un prodotto scalare $\underbrace{\text{definito pos.}}$

perché $\langle f ; f \rangle \geq 0$ e
vale $=$ sse $|f|^2 = 0$ q.o.
cioè $f = 0$ q.o.
cioè $f = 0$ in senso L^2

Osservazioni

- Dato V spazio vett. reale con prodotto scalare $\langle \, ; \, \rangle$, allora $\langle \, ; \, \rangle$ si ricava dalla norma associata $\|\cdot\|$ tramite l'id. di polarizzazione:

$$\langle v_1 ; v_2 \rangle = \frac{1}{4} \left(\|v_1 + v_2\|^2 - \|v_1 - v_2\|^2 \right)$$

(dim. immediata a partire dalla def. di $\|\cdot\|$)

- Dato V come sopra, vale l'identità del parallelogramma: $\forall v_1, v_2 \in V$

(*) $\quad \|v_1+v_2\|^2+\|v_1-v_2\|^2 = 2\|v_1\|^2+2\|v_2\|^2$

Usando questa identità si dimostra che la norma di L^p deriva da un prodotto scalare solo per $p=2$.

- <u>Fatto non ovvio</u>: se V è uno spazio con norma $\|\ \|$ e vale l'id. del parallelogramma (*) allora $\|\cdot\|$ deriva da un prodotto scalare.

Il punto è far vedere che $\langle\ ;\ \rangle$ definito dalla formula di polarizzazione è lineare in ciascuna variabile.

Esercizi

1. $L^p([-1,1])$ soddisfa l'iden. del parallelogr. solo se $p=2$.

Prendo $f_1 := \mathbb{1}_{[-1,0]}$, $f_2 := \mathbb{1}_{[0,1]}$. Allora

$$\| f_1 + f_2 \|_p^p = \int_{-1}^{1} 1 \, dx = 2 \Rightarrow \| f_1 + f_2 \|_p = 2^{\frac{1}{p}}$$

$$\| f_1 - f_2 \|_p = \| f_1 + f_2 \|_p = 2^{\frac{1}{p}}, \quad \| f_1 \|_p = \| f_2 \|_p = 1$$

Se vale l'identità del parallelogramma allora

$$\| f_1 + f_2 \|_p^2 + \| f_1 - f_2 \|_p^2 = 2 \| f_1 \|_p^2 + 2 \| f_2 \|_p^2$$

cioè

$$2^{\frac{2}{p}} + 2^{\frac{2}{p}} = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \iff p = 2$$

Domanda: per quali $X, \mathcal{A}, \mu$ vale la stessa conclusione?

con la mis. di Lebesgue

2. Dato Ω aperto in $\mathbb{R}^n$ e $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ continua allora $\| f \|_\infty = \sup_{x \in \Omega} |f(x)|$

Osserv.

Da questo segue l'abitudine di indicare la norma del sup delle funzioni continue con $\| \cdot \|_\infty$.
In generale vale solo $\| f \|_\infty \leqslant \sup_{x \in X} |f(x)|$.

Devo dimostrare che $\|f\|_\infty \geq \sup_{x\in\Omega} |f(x)|$.

Dato $m < \sup|f|$ scelgo x_0 t.c. $m < |f(x_0)|$.

Allora esiste U intorno aperto di x_0 t.c.

$$m \leq |f(x)| \quad \forall x \in U.$$

Siccome $|U| > 0$ e $\|f\|_\infty \geq |f|$ q.o. su U ottengo $\|f\|_\infty \geq m$.

Concludo prendendo il sup su $m < \sup|f|$.

Variante Dati $X, \mathcal{A}, \mu$, con X spazio metrico e $\mathcal{A}$ che contiene gli aperti ($\Rightarrow$ le funzioni continue sono misurab.) caratterizzare le μ per cui vale lo stesso risultato.

3. Se $\mu(X) < +\infty$ e $p_1 \leq p_2$ allora $L^{p_1} \supset L^{p_2}$ (più precisamente $\mathcal{L}^{p_1} \supset \mathcal{L}^{p_2}$).

Caso $p_2 < +\infty$. Data $f \in L^{p_2}$ dimostro che $f \in L^{p_1}$.

$$\|f\|_{p_1}^{p_1} = \int_X |f|^{p_1} \cdot 1 \, d\mu$$

Hölder con p, q da decidere $\longmapsto \leq \| |f|^{p_1} \|_p \, \|1\|_q$

$$= \left(\int_X |f|^{p_1 p} d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X 1^q \, d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$$

scelgo p t.c. $p \cdot p_1 = p_2$, cioè $p = p_2/p_1$

$\Rightarrow \frac{1}{q} = \frac{p_2 - p_1}{p_2}$

$$= \|f\|_{pp_1}^{p_1} \left(\mu(X)\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \|f\|_{p_2}^{p_1} \left(\mu(X)\right)^{\frac{p_2-p_1}{p_2}}$$

Riassumendo: $\|f\|_{p_1} \leq \left(\mu(X)\right)^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}} \|f\|_{p_2}$.

Questa stima, grazie al risultato sotto, dimostra anche che l'inclusione $i : L^{p_2} \to L^{p_1}$ è continua.

Proposizione

Dati V, W spazi normati e $T : V \to W$ lineare, i seguenti enunciati sono equivalenti:

(i) T è continua in 0;

(ii) T è continua;

(iii) T è Lipschitz: $\exists C$ t.c. $\|Tv_1 - Tv_2\|_W \leq C \|v_1 - v_2\|_V$ per ogni $v_1, v_2 \in V$;

(iv) $\exists\, c$ t.c. $\|Tv\|_W \leqslant c\|v\|_V$ per ogni $v \in V$;

(v) $\exists\, c$ t.c. $\|Tv\|_W \leqslant c$ per ogni $v \in V$ t.c. $\|v\|_V \leqslant 1$.

Inoltre le costanti ottimali in (iii), (iv), (v) coincidono con $C := \sup\limits_{\substack{v \in V \\ \|v\|_V \leqslant 1}} \|Tv\|_W$.

Dim.

(v) $\Rightarrow$ (iv): per omogeneità della norma.

(iv) $\Rightarrow$ (iii): per linearità di T.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (i): immediati.

(i) $\Rightarrow$ (v): T continua in 0

$$\Downarrow$$

$$\exists\, \delta > 0 \text{ t.c. } \|Tx - \cancel{T0}\| \leqslant 1 \text{ se } \|x - \cancel{0}\| \leqslant \delta$$

$$\Downarrow \quad \text{per omogeneità della norma}$$

$$\|Tx\| \leqslant \frac{1}{\delta} \quad \text{se } \|x\| \leqslant 1.$$

$\square$

AM3 20/21 Lezione 6

5/10/2020

Teorema

Dati $X, \mathcal{A}, \mu$ e $p \in [1,+\infty]$, lo spazio $L^p(X)$ è completo.

Lemma 1

Dato (Y, d) spazio metrico vale che:

(i) ogni successione $(y_n) \subset Y$ t.c.

$$\sum_{n=1}^{\infty} d(y_n, y_{n+1}) < +\infty \qquad (*)$$

è di Cauchy,
e in particolare converge se Y è completo;

(ii) se ogni succ. $(y_n) \subset Y$ che soddisfa $(*)$ converge allora Y è completo.

Osserv. Non tutte le succ. (y_n) di Cauchy soddisfano $(*)$. Date voi un esempio in $\mathbb{R}$.

Dim.

(i) Per $m<n$ vale

$$d(y_m, y_n) \leq \sum_{k=m}^{n-1} d(y_k, y_{k+1}) \leq \underbrace{\sum_{k=m}^{+\infty} d(y_k, y_{k+1})}_{\text{coda di serie converg.}} .$$

disug. triangolare

Inoltre $\forall \varepsilon>0 \; \exists m_\varepsilon$ t.c.

$$\sum_{k\geq m_\varepsilon}^{\infty} d(y_k, y_{k+1}) \leq \varepsilon$$

$\Longrightarrow \forall n>m\geq m_\varepsilon$ vale $d(y_m, y_n) \leq \varepsilon$

cioè (y_n) è di Cauchy.

(ii) Sia (y_n) succ. di Cauchy. Devo far vedere che converge.

Osservo che esiste una sottosucc. (y_{n_k}) t.c.

$$\sum_{k=1}^{\infty} d(y_{n_k}, y_{n_{k+1}}) < +\infty .$$

Infatti $\forall k \; \exists n_k$ t.c. $m,n \geq n_k \Longrightarrow d(y_m, y_n) \leq \frac{1}{2^k}$

in particolare $d(y_{n_k}, y_{n_{k+1}}) \leq \frac{1}{2^k}$.

Per ipotesi (y_{n_k}) converge a qualche $y\in Y$, e si dimostra facilmente che (y_n) conv. a y. $\square$

Lemma 2 Dato $(Y, \|\cdot\|)$ spazio normato sono equiv.:

(i) Y è completo;

(ii) $\forall\ (y_n) \subset Y$ t.c. $\sum_1^\infty \|y_n\| < +\infty$ esiste $y \in Y$ t.c. $\sum_{n=1}^\infty y_n$ converge a y (cioè $\left\| y - \sum_{n=1}^N y_n \right\| \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$).

Corollario immediato del lemma 1.

Lemma 3 ("Disug. di Minkowski per somme infinite")

Data una succ. (g_n) di funzioni misur. positive su X vale

$$\left\| \sum_{n=1}^\infty g_n \right\|_p \leq \sum_{n=1}^\infty \|g_n\|_p .$$

Dim. Solo per $p<+\infty$. Fissato N, allora:

$$\sum_{N=1}^\infty \|g_n\|_p \geq \sum_{n=1}^N \|g_n\|_p \overset{\text{Minkowski}}{\geq} \left\| \sum_{n=1}^N g_n \right\|_p^p$$

$$\left\| \sum_{n=1}^N g_n \right\|_p^p = \underbrace{\left[\int_X \left(\sum_{n=1}^N g_n \right)^p d\mu \right]^{\frac{1}{p}}}$$

per convergenza monotona $\longrightarrow \Big\downarrow N \to +\infty$

$$\left[\int_X \left(\sum_{n=1}^\infty g_n \right)^p d\mu \right]^{\frac{1}{p}} \qquad \square$$

Dim. teorema

Caso 1 : $p = +\infty$.

Si riconduce alla completezza della norma del sup.

Data (f_n) succ. di Cauchy in $L^\infty(X)$, si dimostra che esiste N t.c. $\mu(N)=0$ e (f_n) è di Cauchy rispetto alla norma del sup su $X \setminus N$.

A voi i dettagli!

Caso 2 : $p < +\infty$.

Per il lemma 2 basta far vedere che data $(f_n) \subset L^p(X)$ t.c. $\sum_1^\infty \|f_n\|_p < +\infty$, allora $\sum_1^\infty f_n$ converge a qualche f in $L^p(X)$.

Lo si fa in due passi: 1) si costruisce f; 2) si dimostra che $\sum_1^\infty f_n$ conv. a f e $f \in L^p$.

Passo 1. Vale che:

$$\underbrace{+\infty > \sum_{n=1}^\infty \|f_n\|_p}_{\text{per ipotesi}} = \sum_{n=1}^\infty \| \, |f_n| \, \|_p$$

$$\underset{\text{lemma 3}}{\geq} \left\| \sum_{n=1}^\infty |f_n| \right\|_p = \left[\int_X \Big(\underbrace{\sum_{n=1}^\infty |f_n|}_{g} \Big)^p d\mu \right]^{\frac{1}{p}}.$$

Per la finitezza dell'ultimo integrale la funzione integranda g è finita q.o., cioè esiste E t.c. $\mu(E)=0$ e

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| < +\infty \quad \text{per ogni } x \in X \setminus E.$$

Quindi $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge a qualche $f(x) \in \mathbb{R}$. per ogni $x \in X \setminus E$. Estendo f a zero in E.

Passo 2. Fissato N, osservo che $\forall x \in X \setminus E$

$$\left| f(x) - \sum_{n=1}^{N} f_n(x) \right| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x) \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |f_n(x)|,$$

quindi

$$\left\| f - \sum_{n=1}^{N} f_n \right\|_p \overset{\text{lemma 3}}{\leq} \left\| \sum_{n=N+1}^{\infty} |f_n| \right\|_p \leq \underbrace{\sum_{n=N+1}^{\infty} \|f_n\|_p}_{\text{coda di serie convergente}} \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0.$$

Questo dimostra la convergenza.

Per $N=0$ ottengo inoltre

$$\|f\|_p \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_p < +\infty \implies f \in L^p. \qquad \square$$

Confronto delle varie nozioni di convergenza per successioni di funzioni

Fisso $X, \mathcal{A}, \mu$ e prendo $f, f_n : X \to \mathbb{R}$ (o $\mathbb{R}^n$) misur.

Nozioni di convergenza (di f_n a f):

- uniforme

$\Downarrow$

- puntuale : $f_n(x) \to f(x) \quad \forall x \in X$

$\Downarrow$

- puntuale μ-q.o. : $f_n(x) \to f(x)$ per μ-q.o. $x \in X$
- in L^p : $\|f_n - f\|_p \to 0$
- in misura : $\forall \varepsilon > 0$ vale

$$\mu\Big(\underbrace{\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}}_{=: A_n^\varepsilon}\Big) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Proposizione

(i) $f_n \to f$ q.o. & $\mu(X) < +\infty \Rightarrow f_n \to f$ in misura;

(ii) " " " " $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ esiste $E \in \mathcal{A}$ t.c. $\mu(E) < \varepsilon$ & $f_n \to f$ uniform. su $X \setminus E$;

(iii) $f_n \to f$ in L^p, $p < +\infty \Rightarrow f_n \to f$ in misura;

(iv) $f_n \to f$ in $L^\infty \Rightarrow \exists E$ t.c. $\mu(E) = 0$ e $f_n \to f$ unif. su $X \setminus E$;

(v) $f_n \to f$ in misura $\Rightarrow \exists n_k$ t.c. $f_{n_k} \to f$ μ-q.o.

Osservazioni

- (ii) si chiama Teorema di Severini-Egorov.
- $f_n \to f$ in $L^p \Rightarrow \exists n_k$ t.c. $f_{n_k} \to f$ μ-q.o. (combinare (iii) e (v)).
- In (i) e (ii) l'ipotesi $\mu(X) < +\infty$ è necessaria. Preso $X = \mathbb{R}$ e $f_n = \mathbb{1}_{[n,+\infty)}$ si ha che $f_n \to 0$ ovunque ma f_n non converge a 0 in misura, e f_n non converge a 0 unif. in $\mathbb{R} \setminus E$ per ogni E di misura finita.

Lemma 4 (disuguaglianza di Markov)

Data $g: X \to [0,+\infty]$ misur. e $m>0$ si ha:

$$\mu\left(\{x\in X : g(x)\geq m\}\right) \leq \frac{1}{m}\int_X g\, d\mu$$

Dim. Immediata!

Lemma 5 (di Borel-Cantelli)

Dati $(E_n) \subset \mathcal{A}$ t.c. $\sum \mu(E_n) \leq +\infty$, l'insieme

$$E := \{ x\in X \text{ t.c. } x\in E_n \text{ frequentemente (in } n)\}$$

ha misura nulla.

Cioè per μ-q.o. x, $x \notin E_n$ definitivamente (in n).

Osserv. L'ipotesi $\sum \mu(E_n) < +\infty$ non può essere sostituita con $\mu(E_n) \to 0$.

Dim. Osservo che

$$E = \bigcap_{m=1}^{\infty} \Big(\underbrace{\bigcup_{n=m}^{\infty} E_n}_{= F_m} \Big).$$

Allora

$$\mu(E) = \lim_{m\to+\infty} \mu(F_m) \leq \lim_{m\to+\infty} \underbrace{\sum_{n=m}^{\infty} \mu(E_n)}_{\text{coda di serie conv.}} = 0$$

$F_m \downarrow E$ & $\mu(F_1) < +\infty$

$\square$

Dim. Proposizione

Pongo
$$A^\varepsilon_n := \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$$
e
$$B^\varepsilon := \{x \in X : x \in A^\varepsilon_n \text{ frequentemente}\} = \bigcap_{m=1}^{\infty} \Big(\underbrace{\bigcup_{n=m}^{\infty} A^\varepsilon_n}_{B^\varepsilon_m} \Big)$$

(i) Per ipotesi $f_n \to f$ q.o. cioè $\mu(B^\varepsilon) = 0 \ \forall \varepsilon > 0$

$$\Longrightarrow \lim_{m \to +\infty} \mu(B^\varepsilon_m) = \mu(B^\varepsilon) = 0$$

$$\Longrightarrow \lim_{m \to +\infty} \mu(\underset{\substack{\cap \\ B^\varepsilon_m}}{A^\varepsilon_m}) = 0$$ cioè $f_n \to f$ in misura.

(ii) Dalla dim. di (i) abbiamo $\lim_{m \to +\infty} \mu(B^\varepsilon_m) = 0$.

Allora $\forall k \ \exists m_k$ t.c. $\mu(B^{1/k}_{m_k}) \leq \delta / 2^k$.

Pongo $E := \bigcup_k B^{1/k}_{m_k}$; allora $\mu(E) \leq \delta$. Inoltre:

$$x \in X \setminus E \Rightarrow x \notin B^{1/k}_{m_k} \ \forall k \iff x \notin A^{1/k}_n \ \forall k, n \geq m_k$$

$$\Longrightarrow |f(x) - f_n(x)| < \tfrac{1}{k} \quad \forall k, n \geq m_k$$

$$\Longrightarrow \sup_{x \in X \setminus E} |f(x) - f_n(x)| \leq \tfrac{1}{k} \quad \forall k, n \geq m_k$$

$\Longrightarrow$ $f - f_m$ unif. su $X \setminus E$.

(iii) Devo far vedere che $\forall \varepsilon > 0 \quad \mu(A_n^\varepsilon) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

Applicando il lemma 4 (Markov) ottengo

$$\mu\Big(A_n^\varepsilon = \{x : \underbrace{|f_n(x) - f(x)|^p}_{g} \geq \underbrace{\varepsilon^p}_{m}\}\Big)$$

$$\leq \frac{1}{m} \int_X g \, d\mu = \frac{1}{\varepsilon^p} \|f_n - f\|_p^p \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

(iv) Dimostratelo per esercizio.

(v) Per ipotesi $f_n \to f$ in misura, cioè

$\forall \varepsilon > 0 \quad \mu(A_n^\varepsilon) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

$\Rightarrow \forall k \; \exists n_k$ t.c. $\mu(A_{n_k}^{1/k}) \leq 1/2^k$

$\Rightarrow \sum_k \mu(A_{n_k}^{1/k}) < +\infty$

lemma 5 $\Rightarrow$ per μ q.o. x, $x \notin A_{n_k}^{1/k}$ definitiv. in k

cioè $|f_{n_k}(x) - f(x)| < \frac{1}{k}$ definitiv. in k

cioè $f_{n_k}(x) \xrightarrow[k \to +\infty]{} f(x)$. $\square$

AM3 20/21 — Lezione 7 — 7/10/2020

Con riferimento alla lezione precedente

- $f_n \to f$ in misura $\not\Rightarrow$ $f_n \to f$ q.o.
- $f_n \to f$ in L^p con $p<+\infty$ $\not\Rightarrow$ $f_n \to f$ q.o.
- $\mu(E_n) \to 0$ $\not\Rightarrow$ per μ-q.o. $x \in X$, $x \notin E_n$ definitivamente.

Esempio che nega tutte le implicazioni.

Sia $I_1 := [1, 1+\frac{1}{2}]$, $I_2 := [1+\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}]$, ..., $I_n := \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}\right]$, ...

Sia $p : \mathbb{R} \to [0,1)$, $p(x) := x - \lfloor x \rfloor$ $\leftarrow$ $\lfloor x \rfloor := \max\{n \in \mathbb{Z}, n \le x\}$. parte intera di x

e $E_n := p(I_n)$ per $n = 1, 2, \dots$

Allora

a) $|I_n| = \frac{1}{n}$ $\forall n$;

b) $|E_n| = \frac{1}{n}$ $\forall n$ $\Leftarrow$ a) + p è affine a tratti, iniettiva su I_n, $p'=1$;

c) $\bigcup_1^\infty I_n = [1, +\infty)$ $\Leftarrow$ $\sum \frac{1}{n} = +\infty$;

d) ogni $x \in [0,1)$ appartiene a E_n per infiniti n $\Leftarrow$ c);

e) $\mathbb{1}_{E_n} \to 0$ in misura e in $L^p([0,1])$ $\forall p<+\infty$ $\Leftarrow$ b);

f) $\mathbb{1}_{E_n}(x) \not\to 0$ $\forall x \in [0,1)$.

Approssimazione di funzioni in L^p

(Strumento utile nelle dimostrazioni)

Prendo $X, \mathcal{A}, \mu$ come al solito.

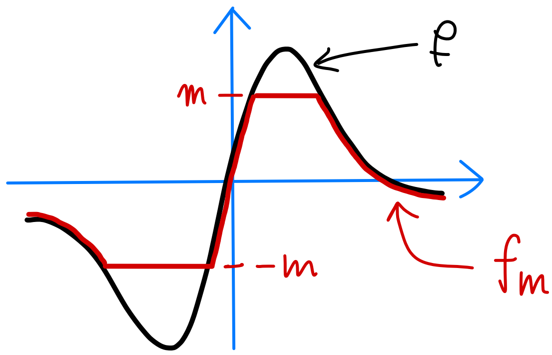
Prop. 1

Le funzioni limitate in $L^p(X)$ sono dense in $L^p(X)$.

Attenzione: le funzioni in L^p sono classi di equivalenza e quindi non è appropriato parlare di "funzioni limitate", semmai di funzioni che ammettono un rappresentante limitato; la stessa precisazione vale per gli enunciati sotto.

Dim.

Dati $f \in L^p(X)$ e $m > 0$ pongo $f_m(x) := (f(x) \wedge m) \vee (-m)$



Chiaramente $f_m(x) \longrightarrow f(x)$ $\forall x \in X$. Inoltre

$$\| f_m - f \|_p^p = \int_X |f_m - f|^p \, d\mu \xrightarrow[m \to +\infty]{} 0$$

per convergenza dominata.

$$\begin{cases} \text{conv. puntuale: } |f_m - f|^p \longrightarrow 0 \quad \forall x \\ \text{dominazione: } |f_m - f|^p \leq \underset{\substack{\Uparrow \\ L^1}}{|f|^p} \quad \forall x \end{cases}$$

$\square$

Questo enunciato e i successivi valgono anche per $L^p(X;\mathbb{R}^k)$. Lascio le dimostrazioni per esercizio.

Nel seguito X è uno spazio metrico, $\mathcal{A}$ contiene gli aperti.

Prop. 2

Le funzioni in $L^p(X)$ con supporto limitato sono dense in $L^p(X)$ per $p<+\infty$

$\{x : f(x) \neq 0\}$

Osserv. Vale anche per $p=+\infty$ se (e solo se) esiste X' limitato t.c. $\mu(X\setminus X')=0$.

Dim. Fisso $f\in L^p(X)$, $x_0\in X$, e per ogni $r>0$ pongo $f_r := f\cdot \mathbb{1}_{B(x_0,r)}$. Allora $f_r(x) \xrightarrow[r\to+\infty]{} f(x)$ $\forall x\in X$ e

$$\|f_r - f\|_p^p = \int_X |f_r - f|^p \, d\mu$$
$$= \int_X |f|^p \cdot \mathbb{1}_{X\setminus B(x_0,r)} \, d\mu \xrightarrow[r\to+\infty]{} 0$$

per convergenza dominata.

Conv. puntuale: $|f|^p\cdot \mathbb{1}_{X\setminus B(x_0,r)} \to 0$ ovunque

dominazione: $|f|^p\cdot \mathbb{1}_{X\setminus B(x_0,r)} \leq \underbrace{|f|^p}_{\in L^1}$ ovunque $\square$

Prop. 3

Le funzioni limitate e con supporto limitato sono dense in $L^p(X)$ per $p<+\infty$.

Dim. Usare la Prop. 1 e la dimostrazione della Prop. 2.
Aggiungere i dettagli per esercizio. $\square$

Prop. 4 Sia

somma finita

$$\tilde{\mathcal{G}} := \left\{ \sum_i \alpha_i \mathbb{1}_{E_i} : E_i \text{ limitati}, \mu(E_i)<+\infty, \alpha_i \in \mathbb{R} \right\}.$$

Allora $\tilde{\mathcal{G}}$ è denso in $L^p(X)$ per $p<+\infty$.

Dim.

Grazie alla Prop. 3 mi basta saper approssimare ogni $f \in L^p(X)$ limitata e con supporto limitato.

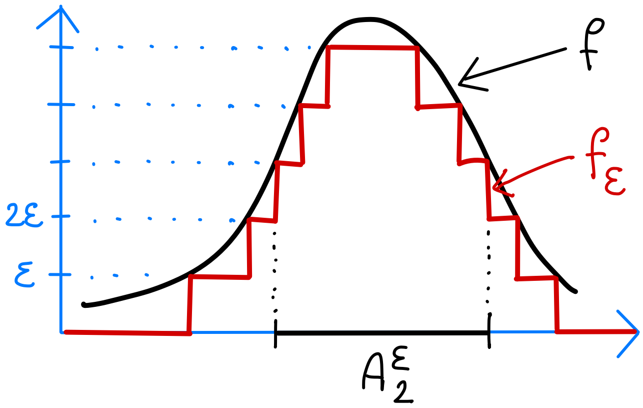
(Lascio per esercizio i dettagli di questo passaggio.)

Caso 1: $f \geq 0$

Dati $\varepsilon>0$, $k=1,2,\ldots$ sia $A_k^\varepsilon := \{x : k\varepsilon \leq f(x) < (k+1)\varepsilon\}$

e

$$f_\varepsilon := \sum_{k=1}^{\infty} k\varepsilon \cdot \mathbb{1}_{A_k^\varepsilon}$$



Osservo che:

- A_k^ε è limitato $\Leftarrow$ f ha supporto limitato;
- $\mu(A_k^\varepsilon) < +\infty$ $\Leftarrow$ $f \in L^p$ con $p < +\infty$;
- $A_k^\varepsilon = \emptyset$ per k suff. grande $\Leftarrow$ f limitata;
- $f_\varepsilon \in \widetilde{\mathcal{S}}$;
- $0 \leqslant f - f_\varepsilon \leqslant \varepsilon \Rightarrow f_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} f$ uniformemente.
- $f_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} f$ in $L^p(X)$ $\Leftarrow$ teor. convergenza dominata.

Caso 2 : f a valori reali

Approssimo separatamente f^+ e f^-.... $\square$

Osserv. Modificando appena la dimostrazione sopra si ottiene che le funzioni semplici sono dense in $L^\infty(X)$.

Suppongo ora $X \subset \mathbb{R}^d$, $X \in \mathcal{M}^d$, e $\mu =$ Lebesgue.

$C_c(\mathbb{R}^d)$ è lo spazio delle funzioni continue su $\mathbb{R}^d$ con supporto compatto.

Prop. 5
Le funzioni in $C_c(\mathbb{R}^d)$, ristrette a X, sono dense in $L^p(X)$ per $p<+\infty$.

Dim.
Per la Prop. 4 mi basta approssimare ogni $f \in \tilde{\mathcal{S}}$ (passaggio simile a quello nella dim. della Prop.3).

Quindi mi basta approssimare $f = \mathbb{1}_E$ con E limitato t.c. $\mu(E)<+\infty$.

$\forall \varepsilon>0$ prendo A_ε aperto limitato e C_ε chiuso t.c.

$$C_\varepsilon \subset E \subset A_\varepsilon \quad \& \quad |A_\varepsilon \setminus C_\varepsilon| \leq \varepsilon .$$

Uso la regolarità della misura di Lebesgue + E limitato.

Prendo quindi $f_\varepsilon : \mathbb{R}^d \to [0,1]$ continua t.c.

$$f_\varepsilon = 1 \text{ in } C_\varepsilon, \qquad f_\varepsilon = 0 \text{ in } A_\varepsilon^c .$$

Qui uso il seguente fatto generale :

Dati C_0, C_1 chiusi disgiunti in X spazio metrico esiste $g: X \to [0,1]$ continua t.c.

$$g = 0 \text{ in } C_0, \quad g = 1 \text{ in } C_1.$$

Per esempio $g(x) := \dfrac{\operatorname{dist}(x, C_0)}{\operatorname{dist}(x, C_0) + \operatorname{dist}(x, C_1)}$.

Verifico che:

- $f_\varepsilon \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d) \Leftarrow A_\varepsilon$ è limitato;
- $f_\varepsilon - \underbrace{f}_{\leq \mathbb{1}_E} = 0$ su $C_\varepsilon \cup A_\varepsilon^c$;
- $|f_\varepsilon - f| \leq \mathbb{1}_{A_\varepsilon \setminus C_\varepsilon} \Rightarrow \|f_\varepsilon - f\|_p \leq |A_\varepsilon \setminus C_\varepsilon|^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon^{\frac{1}{p}}$. $\square$

Osserv. L'enunciato non vale per $p = +\infty$.

Idea (imprecisa): date f_n continue t.c. $f_n \to f$ in L^∞, allora $f_n \to f$ uniformemente $\Rightarrow f$ continua, ma L^∞ contiene funzioni discontinue (che quindi non sono approssimabili).

Dimostrazione (precisa) per X aperto.
Date f_n continue su X t.c. $f_n \to f$ in $L^\infty(X)$ allora

- (f_n) è una succ. di Cauchy in $L^\infty(X)$;
- (f_n) è una succ. di Cauchy risp. norma del sup su X perché coincide con $\|\cdot\|_\infty$ per le funzioni continue;

- f_n converge uniformemente a $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ continua;
- $f = \tilde{f}$ q.o. in X.

Ma esistono funzioni $f \in L^\infty(X)$ che non coincidono q.o. con alcuna $\tilde{f}$ continua.

Per esempio, per $X = \mathbb{R}$, $f := \mathbb{1}_{[0,+\infty)}$.

Dimostrare per esercizio che così è, cioè non esiste alcuna $\tilde{f}$ continua su $\mathbb{R}$ t.c. $f = \tilde{f}$ q.o.

Teorema (di Lusin)

Sia $X \subset \mathbb{R}^d$, $X \in \mathcal{M}^d$, e $\mu =$ Lebesgue.

Dati $f : X \to \mathbb{R}$ misur. ed $\varepsilon > 0$, esiste E aperto t.c.

- $|E| \leq \varepsilon$,
- la restrizione di f a $X \setminus E$ è continua.

Osserv.

- In generale $E \cap X$ è denso in X, cioè $X \setminus E$ ha parte interna vuota (relativ. a X).
- Il teorema vale per X e μ più generali.
- Ricordo il lemma di estensione di Tietze:

  | dato C chiuso in X spazio metrico e $f : C \to \mathbb{R}$ continua, esiste $g : X \to \mathbb{R}$ estensione continua di f.

  Usando questo risultato posso trovare $g : X \to \mathbb{R}$ continua t.c. $g = f$ su $X \setminus E$.

  Inoltre se $f \in L^p(X)$, $p < +\infty$, è possibile scegliere g in modo che $\|f - g\|_p \leq \varepsilon$.

Lemma

Dati $X, \mathcal{A}, \mu$ con $\mu(X) < +\infty$, $f : X \to \mathbb{R}$ misur. e $\varepsilon > 0$, esiste F misur. tale che:

- $\mu(F) \leq \varepsilon$,
- f è limitata su $X \setminus F$.

Dim.

Per ogni $m > 0$ sia $F_m := \{x : |f(x)| > m\}$.

Allora $F_m \downarrow \emptyset$ per $m \uparrow +\infty$, quindi $\mu(F_m) \to 0$.

Prendo $F := F_m$ con m abbastanza grande. $\square$

Dimostrazione del Teorema

Osservo che basta trovare E misurabile e poi usare la regolarità della misura di Lebesgue per trovare E aperto.

Caso 1 : $f \in L^1(X)$, $|X| < +\infty$

- Per la Prop. 5 della lezione precedente esistono $f_n \in C_c(\mathbb{R}^d)$ t.c. $f_n \to f$ in $L^1(X)$;
- $f_n \to f$ in misura;
- esiste $E \subset X$ misur. t.c. $|E| < \varepsilon$ e $f_n \to f$ uniformemente su $X \setminus E$ (teor. di Severini - Egorov) e quindi f è continua su $X \setminus E$.

Caso 2 : f qualunque, $|X|<+\infty$

- Grazie al lemma sopra trovo F t.c. $|F|\leq\frac{\varepsilon}{2}$ e f è limitata in $X\setminus F$;
- $f\in L^\infty(X\setminus F)\subset L^1(X\setminus F)$ quindi valgono le ipotesi del Caso 1 con $X\setminus F$ al posto di X, e trovo E' t.c. $|E'|\leq\frac{\varepsilon}{2}$ e f è continua su $X\setminus(F\cup E)$;
- pongo $E := F\cup E'$.

Caso 3 : f e $|X|$ qualunque

palla aperta.

Per ogni $n=1,2,\dots$ sia $X_n := X\cap B(0,n)$ $\Rightarrow$ X_n aperto in X.

- Applico il teorema con X_n al posto di X (sono nelle ipotesi del Caso 2) e trovo E_n t.c. $|E_n|\leq\frac{\varepsilon}{2^n}$ t.c. f è continua su $X_n\setminus E_n$;
- Pongo $E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$ e osservo che $|E|\leq\varepsilon$ e f è continua su $X_n\setminus E$ $\forall n$, e quindi anche su $X\setminus E$; il punto chiave è che $X_n\setminus E$ è aperto in $X\setminus E$ ($\Leftarrow X_n$ è aperto in X).

$\square$

Esercizi

1. Dire per quali $a>0$ e $1 \leq p \leq +\infty$, $f(x) := 1/|x|^a$ appartiene a $L^p(B)$ con $B := B(0,1) \subset \mathbb{R}^d$.

$$\|f\|_p^p = \int_B \frac{dx}{|x|^{ap}} = \int_0^1 \frac{c_d \rho^{d-1}}{\rho^{ap}} \, d\rho = c_d \int_0^1 \frac{d\rho}{\rho^{ap-d+1}},$$

quindi $f \in L^p(B)$ sse $ap-d+1<1$, cioè $ap<d$.

2. Dire per quali $0<a_1<a_2$ e $1 \leq p \leq +\infty$ $f(x) := \dfrac{1}{|x|^{a_1}+|x|^{a_2}}$ appartiene a $L^p(\mathbb{R}^d)$.

$$\|f\|_p = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{dx}{(|x|^{a_1}+|x|^{a_2})^p} = \int_0^{+\infty} \frac{c_d \rho^{d-1}}{(\rho^{a_1}+\rho^{a_2})^p} \, d\rho$$

$$\approx \underbrace{\int_0^1 \frac{d\rho}{\rho^{a_1 p-d+1}}}_{\substack{\text{finito sse} \\ a_1 p-d+1<1 \\ \text{cioè } p<\frac{d}{a_1}}} + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{d\rho}{\rho^{a_2 p-d+1}}}_{\substack{\text{finito sse} \\ a_2 p-d+1>1 \\ \text{cioè } p>\frac{d}{a_2}}},$$

quindi $f \in L^p(B)$ sse $\frac{d}{a_2}<p<\frac{d}{a_1}$.

Abbiamo visto che se $\mu(X)<+\infty$ allora $p_1<p_2$ implica $L^{p_2}(X)\subset L^{p_1}(X)$. L'esercizio che segue mostra che l'ipotesi $\mu(X)<+\infty$ è necessaria.

3. Dati $1\leq p_1\neq p_2\leq +\infty$, $L^{p_2}(\mathbb{R}^d)\not\subset L^{p_1}(\mathbb{R}^d)$.

Prendo $0<a_1<a_2<+\infty$ t.c. $p_2\in\left[\frac{d}{a_2},\frac{d}{a_1}\right]$ e $p_1\notin\left[\frac{d}{a_2},\frac{d}{a_1}\right]$.
Allora la f in Ex. 2 appartiene a L^{p_2} ma non a L^{p_1}.
(Resta da fare il caso $p_2=+\infty$.)

Presi $X,\mathcal{A},\mu$ qualunqui e $u:X\to\mathbb{R}$, per definizione $\int_X u\,d\mu$ esiste ed è finito sse $u\in L^1(X)$. Inoltre:

4. L'applicazione lineare $T:L^1(X)\to\mathbb{R}$, $T:u\mapsto\int_X u\,d\mu$ è continua.

Basta osservare che

$$|Tu|=\left|\int_X u\,d\mu\right|\leq\int_X|u|\,d\mu=\|u\|_1$$

e usare la caratterizzazione della continuità per le applicazioni lineari vista in precedenza.

Osserv. La continuità di T nell' Ex. 4 significa che

$$u_n \xrightarrow[L^1(X)]{} u \Rightarrow \int_X u_n \, d\mu \longrightarrow \int_X u \, d\mu$$

Questo risultato non segue in modo semplice dal teorema di convergenza dominata: mancano infatti sia la convergenza puntuale (ma per ottenerla basta passare a sottosucc.) che la dominazione.

5. Se $\mu(X) < +\infty$ l'applicazione lineare $T: L^p(X) \longrightarrow \mathbb{R}$, $T: u \longmapsto \int_X u \, d\mu$ è ben definita e continua per ogni $1 \leq p \leq +\infty$.

Basta usare l'Ex. 4 e la continuità dell'inclusione $i: L^p(X) \longrightarrow L^1(X)$.

6. Dato $1 < p \leq +\infty$, sia

$$X := \{ u \in L^p(\mathbb{R}^d) : u \text{ ha un rappresentante con supporto limitato} \}$$

dotato della norma $\| \cdot \|_p$.

Allora $T: X \longrightarrow \mathbb{R}$, $T: u \longmapsto \int_{\mathbb{R}^d} u \, dx$ non è continua.

Per far vedere che T non è continua (in 0) basta trovare $u_n \in X$ t.c. $\|u_n\|_p \to 0$ e $Tu_n = 1$.

Prendo $u_n = \alpha_n \cdot \mathbb{1}_{E_n}$ con α_n da determinare, E_n limitato e $|E_n| \to +\infty$. Allora $u_n \in X$ e

- $\|u_n\|_p = \alpha_n |E_n|^{1/p}$,
- $Tu_n = \int u_n \, dx = \alpha_n |E_n|$.

Prendendo $\alpha_n := 1/|E_n|$ ottengo $Tu_n = 1$ e

$$\|u_n\|_p = |E_n|^{\frac{1}{p}-1} \longrightarrow 0 .$$

Osserv. L' Ex. 6 mostra che non è possibile estendere la definizione di integrale a tutte le funzioni in $L^p(\mathbb{R}^d)$ in modo continuo.

7. Dati $X, \mathcal{A}, \mu$ e $1 < p \leq +\infty$, sia

$$V := \{ u \in L^p(X) : \; \mu(\{x : u(x) \neq 0\}) < +\infty \},$$

dotato della norma $\|\cdot\|_p$, e $T : V \to \mathbb{R}$, $T : u \mapsto \int_X u \, d\mu$.

Dimostrare che T non è continuo sse esistono $E_n \in \mathcal{A}$ t.c. $\mu(E_n) < +\infty$ $\forall n$ e $\mu(E_n) \to +\infty$.

Dimostrazione "se": procedere come per l' Ex. 6 prendendo $u_n := \alpha_n \cdot \mathbb{1}_{E_n}$ con $\alpha_n := \dfrac{1}{\mu(E_n)}$.

8. Dati $X, \mathcal{A}, \mu$ con $\mu(X) < +\infty$ e $1 \leq p < +\infty$ sia

$$V := \left\{ u \in L^p(X) : \int_X u \, d\mu = 0 \right\}.$$

Dimostrare che V è chiuso in $L^p(X)$.

Basta usare l' Ex. 5.

9. Dato $1 < p \leq +\infty$ sia

$$V := \left\{ u \in L^p(\mathbb{R}^d) : \begin{array}{l} u \text{ ha supporto limitato} \\ \text{e } \int_X u \, d\mu = 0 \end{array} \right\}$$

Dimostrare che V è denso in $L^p(\mathbb{R}^d)$.

Traccia. Dato $u \in L^p(\mathbb{R}^d)$ prendere u_n con con supporto limitato t.c. $u_n \to u$ in $L^p(\mathbb{R}^d)$ e costruire una successione $v_n \in X$ t.c. $v_n \to u$ in $L^p(\mathbb{R}^d)$ della forma

$$v_n = u_n + \alpha_n \cdot \mathbb{1}_{E_n}$$

$\alpha_n \in \mathbb{R}$ e $E_n \subset \mathbb{R}^d$ limitati t.c. $|E_n|$ diverge a $+\infty$ abbastanza rapidamente.

AM3 20/21 Lezione 9

12/10/2020

<u>Esercizi</u> (avanzati dalla lezione precedente)

Se non specificato $X, \mathcal{A}, \mu$ sono generici.

1. Dati $1 \leq p_1 < p < p_2 \leq +\infty$, scrivo $\frac{1}{p}$ come combinaz. convessa di $\frac{1}{p_1}$ e $\frac{1}{p_2}$ cioè

$$\frac{1}{p} = \frac{\lambda_1}{p_1} + \frac{\lambda_2}{p_2} \quad \text{con} \quad \lambda_1, \lambda_2 > 0, \ \lambda_1 + \lambda_2 = 1.$$

Data $f : X \to \mathbb{R}$ o $\mathbb{R}^k$ misurabile vale la seguente <u>disuguaglianza di interpolazione</u>:

$$\|f\|_p \leq \|f\|_{p_1}^{\lambda_1} \|f\|_{p_2}^{\lambda_2}.$$

Infatti

$$\|f\|_p^p = \int_X |f|^p \, d\mu$$

$$= \int_X |f|^{\lambda_1 p} |f|^{\lambda_2 p} \, d\mu$$

applico Hölder con esponenti $\frac{p_1}{\lambda_1 p}$ e $\frac{p_2}{\lambda_2 p}$ (verificare che sono coniugati)

$$\leq \left(\int_X |f|^{\lambda_1 p \cdot \frac{p_1}{\lambda_1 p}} d\mu \right)^{\frac{\lambda_1 p}{p_1}} \left(\int_X |f|^{\lambda_2 p \cdot \frac{p_1}{\lambda_2 p}} d\mu \right)^{\frac{\lambda_2 p}{p_1}}$$

$$= \|f\|_{p_1}^{\lambda_1} \|f\|_{p_2}^{\lambda_2}.$$

2. Data $f: X \to \mathbb{R}$ o $\mathbb{R}^k$ misur. considero $g : [0,1] \longrightarrow (-\infty, +\infty]$ data da

$$g(t) := \log\left(\|f\|_{1/t}\right)$$

(convengo che $1/0 = +\infty$ e $\log(+\infty) = +\infty$).

Allora g è convessa e semicontinua inferiormente (s.c.i.)

Convessità:

Sia $t = \lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2$ combinazione convessa di $t_1, t_2 \in [0,1]$.
Dall' Ex. 1 ho che

$$\|f\|_{1/t} \leq \|f\|_{1/t_1}^{\lambda_1} \, \|f\|_{1/t_2}^{\lambda_2} \ ;$$

passando al logaritmo ottengo

$$\log\left(\|f\|_{1/t}\right) \leq \lambda_1 \log\left(\|f\|_{1/t_1}\right) + \lambda_2 \log\left(\|f\|_{1/t_2}\right)$$

che è la disuguaglianza di convessità

$$g(t) \leq \lambda_1 \, g(t_1) + \lambda_2 \, g(t_2) \, .$$

Semicontinuità

Verificate che sono fatti equivalenti:

- $p \mapsto \|f\|_p$ è s.c.i. su $[1, +\infty]$;
- $t \mapsto \|f\|_{1/t}$ è s.c.i. su $[0,1]$;
- g è s.c.i. su $[0,1]$.

Per dimostrare la prima affermazione osservo che:

(1) $$\|f\|_p^p = \sup_{g\in \mathcal{Y}} \|g\|_p^p$$

dove $\mathcal{Y}$ è l'insieme delle funzioni semplici della forma

$$g = \sum_i \alpha_i \mathbb{1}_{E_i}$$

con $\alpha_i > 0$, E_i disgiunti, $\mu(E_i) < +\infty$ e tali che

$$g \leq |f|$$

Osservo quindi che per $g \in \mathcal{Y}$

$$\|g\|_p = \begin{cases} \left(\sum_i \alpha_i^p \mu(E_i)\right)^{\frac{1}{p}} & \text{per } p<+\infty \\ \sup_i \alpha_i & \text{per } p=+\infty \end{cases}$$

e che

(2) $$p \longmapsto \|g\|_p \text{ è continua su } [1,+\infty].$$

(Verificate (1) e (2) in particolare per $p=+\infty$.)

Infine la s.c.i. di $p \to \|f\|_p$ segue da (1) e (2) usando:

Lemma

Dati Y spazio metrico e $\mathcal{G}$ famiglia di funzioni $\varphi: Y \to (-\infty,+\infty]$ s.c.i., allora $\bar{\varphi}: Y \to (-\infty,+\infty]$ data da $\bar{\varphi}(y) := \sup_{\varphi\in\mathcal{G}} \varphi(y)$ è s.c.i.

3. Data $f : X \to \mathbb{R}$ misur., sia

$$I := \{p \in [1,+\infty] : \|f\|_p < +\infty\}.$$

Allora I è un intervallo e la restrizione di $p \mapsto \|f\|_p$ alla chiusura $\overline{I}$ è continua.

Uso il cambio di variabile $t = 1/p$ e considero

$$J := \{t \in [0,1] \text{ t.c. } \|f\|_{1/t} < +\infty\} = g^{-1}(\mathbb{R})$$

definita nell' Ex.2

- J è un intervallo perchè g è convessa;
- g è continua nella parte interna di J perchè è convessa e finita (fatto noto);
- la restrizione di g a $\overline{J}$ è continua perchè è convessa e s.c.i. (la continuità agli estremi di $\overline{J}$ richiede una dimostrazione);
- ne segue che anche la restrizione di $t \mapsto \|f\|_{1/t}$ a $\overline{J}$ è continua.

4. Dati $1 \leq p_1 < p_2 < +\infty$ trovare funzioni f su $\mathbb{R}$ tali che:

- $I = (p_1, p_2)$ (fatto la lezione precedente);
- $I = [p_1, p_2)$ / $(p_1, p_2]$ / $[p_1, p_2]$;

- $I = (p_1, +\infty)$ / $[p_1, +\infty)$;
- $I = \{p_1\}$.

5. Sia $X \subset \mathbb{R}^d$, μ = Lebesgue, $1 \leq p < +\infty$. Allora $L^p(X)$ è separabile, cioè contiene un sottoinsieme Y numerabile e denso.

Prendo come V un opportuna famiglia di funzioni affini a tratti.

Dato $\delta > 0$ sia V_δ l'insieme delle $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue e con supporto compatto t.c.

- g è affine su $[k\delta, (k+1)\delta]$ $\forall k \in \mathbb{Z}$,
- $g(k\delta)$ è razionale $\forall k \in \mathbb{Z}$.

Pongo $V := \bigcup_{n=1}^{\infty} V_{1/n}$. Allora:

- siccome ogni $g \in V_\delta$ è determinata dai valori assunti su $\delta\mathbb{Z}$, V_δ è numerabile, e lo stesso vale per V;
- data $f \in C_c(\mathbb{R})$ con $\operatorname{supp} f \subset [-r, r]$ $\exists\, g_n \in V$ t.c. $\operatorname{supp} g_n \subset [-r, r]$ e $g_n \to g$ uniformemente (verificatelo) e quindi $g_n \to g$ in $L^p(\mathbb{R})$;

- quindi V è denso in $C_c(\mathbb{R})$ rispetto alla norma di $L^p(\mathbb{R})$, e siccome $C_c(\mathbb{R})$ è denso in $L^p(\mathbb{R})$, ho che V è denso in $L^p(\mathbb{R})$;

- le restrizioni a X delle funzioni in V sono dense in $L^p(X)$ (spiegare questo passaggio!)

6. Dato X spazio metrico, sono fatti equivalenti:

   (i) X non è separabile;

   (ii) $\exists\, \delta > 0$ e $Y \subset X$ più che numerabile t.c. $d(y, y') \geq \delta$ $\forall\, y, y' \in Y$ con $y \neq y'$.

Dimostro solo (ii) $\Rightarrow$ (i) (a voi l'altra implicazione)

Suppongo per assurdo che esista (x_n) successione densa in X.

Allora $\forall\, y \in Y$ esiste $n = n(y)$ t.c. $d(y, x_n) < \delta/2$.

Ma allora la mappa $y \in Y \to n(y) \in \mathbb{N}$ è <u>iniettiva</u>,

$\big(n(y) = n(y') = n \Rightarrow d(y, y') \leq d(y, x_n) + d(x_n, y') < r \Rightarrow y = y'\big)$

che è assurdo perché Y è più che numerabile.

7. $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ non è separabile.

Prendo una successione (E_n) di insiemi misur. disgiunti in $\mathbb{R}^d$ con $|E_n|>0$ e per ogni $J\subset\mathbb{N}$ pongo

$$f_J := \sum_{n\in J} \mathbb{1}_{E_n}$$

e $Y := \{ f_J : J \in \mathbb{N}\}$.

Dati $J\neq J'$ si ha $f_J - f_{J'} = f_{J\setminus J'} - f_{J'\setminus J} \Rightarrow \|f_J - f_{J'}\|_\infty = 1$, inoltre $\operatorname{card}(Y) = \operatorname{card}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) =$ continuo.

8. Dato $X\subset\mathbb{R}^d$ con $|X|>0$, $L^\infty(X)$ non è separabile.

La dimostrazione dell' Ex. 7 funziona, ma la difficoltà è trovare la successione (E_n).

Questo è facile se X ha parte interna non vuota.

Per X qualunque si può usare un fatto visto in precedenza, cioè che $\forall m\in(0,|X|)$ esiste $X'\subset X$ t.c. $|X'|=m$.

Convoluzione

Date f_1, f_2 funzioni misur. su $\mathbb{R}^d$ il prodotto di convoluzione è la funzione $f_1 * f_2$ data da:

$$f_1 * f_2 (x) := \int_{\mathbb{R}^d} f_1(x-y) f_2(y)\, dy \underset{t=x-y}{=} \int_{\mathbb{R}^d} f_1(t) f_2(x-t)\, dt$$

Osservazioni

- In generale $f_1 * f_2(x)$ può non essere definito (per alcun x).
- $\boxed{\text{Se } f_1, f_2 : \mathbb{R}^d \to [0,+\infty] \text{ allora } f_1 * f_2 : \mathbb{R}^d \to [0,+\infty] \text{ è definita in tutti i punti } x \in \mathbb{R}^d.}$
- Se $f_1 * f_2(x)$ è definito, allora $f_2 * f_1(x) = f_1 * f_2(x)$
- E' importante che f_1 e f_2 siano definite su tutto $\mathbb{R}^d$ e che la misura sia Lebesgue.

  In realtà si può definire $f_1 * f_2$ anche per funzioni f_1, f_2 definite su G gruppo (dotato di misura invariante) per esempio:

  $\mathbb{Z}$ con la mis. che conta i punti

  Date $f_1, f_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, $f_1 * f_2(n) := \sum_{m\in\mathbb{Z}} f_1(n-m) f_2(m)$

Esempi di convoluzione

- Sia ρ la densità di una distrib. di massa in $\mathbb{R}^3$. Il potenziale del campo gravitaz. generato è

$$V(x) := \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|x-y|} \rho(y)\, dy$$

cioè $V = \rho * g$ con $g(x) = \frac{1}{|x|}$ ← potenziale della massa unit. nell'orig.

- Siano X_1, X_2 variabili aleatorie (a valori in $\mathbb{R}$) con distrib. di prob. continue ρ_1 e ρ_2. Se X_1 e X_2 sono indipendenti allora la distrib. di prob. di $X_1 + X_2$ è $\rho_1 * \rho_2$.

Caso più facile, X_1, X_2 var. aleat. a valori in $\mathbb{Z}$ con distrib. ρ_1 e ρ_2.
Infatti $\forall\, n \in \mathbb{Z}$

distrib. di X_1+X_2 →

$$\rho(n) := P(X_1+X_2=n) = P\Big(\dot{\bigcup_m} \{X_1 = n-m, X_2 = m\}\Big)$$

$$= \sum_{m\in\mathbb{Z}} P(X_1 = n-m, X_2 = m)$$

indip.! ⟶

$$= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \underbrace{P(X_1 = n-m)}_{\rho_1(n-m)} \cdot \underbrace{P(X_2 = m)}_{\rho_2(m)}$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \rho_1(n-m)\, \rho_2(m) = \rho_1 * \rho_2(n).$$

Lemma 1

Date $f_1, f_2 : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}^d$,

se $|f_1| * |f_2|(x) < +\infty$ allora $f_1 * f_2(x)$ è ben definito e reale, e

$$|f_1 * f_2(x)| \leqslant |f_1| * |f_2|(x) .$$

Dim.

Se

$$|f_1| * |f_2|(x) = \int_{\mathbb{R}^d} |f_1(x-y)\ f_2(y)|\, dy$$

è finito allora $f_1(x-\cdot)\ f_2(\cdot) \in L^1(\mathbb{R}^d)$

e quindi

$$f_1 * f_2(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f_1(x-y)\ f_2(y)\, dy$$

è ben def. e

$$|f_1 * f_2(x)| \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} |f_1(x-y) f_2(y)|\, dy = |f_1| * |f_2|(x)$$

$\square$

Corollario 2

Se $|f_1| * |f_2| \in L^p(\mathbb{R}^d)$ per qualche $p \in [1, +\infty]$ allora

- $f_1 * f_2(x)$ è ben def. per q.o. $x \in \mathbb{R}^d$
- $\|f_1 * f_2\|_p \leqslant \|\, |f_1| * |f_2| \,\|_p$.

Teorema 3

Dati $p_1, p_2, r \in [1,+\infty]$ t.c. $\boxed{1+\frac{1}{r} = \frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}}$ (*),

e $f_1 \in L^{p_1}(\mathbb{R}^d)$, $f_2 \in L^{p_2}(\mathbb{R}^d)$, allora

- $f_1 * f_2$ è ben def. per q.o. $x \in \mathbb{R}^d$,
- $\|f_1 * f_2\|_r \leq \|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2}$.

Osservazione

(*) è l'unica relaz. possibile tra p_1, p_2 e r.

Supponiamo infatti di avere $p_1, p_2, r \in [1,+\infty]$ e $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, $C>0$ t.c.

$$\|g_1 * g_2\|_r \leq C \|g_1\|_{p_1}^{\alpha_1} \|g_2\|_{p_2}^{\alpha_2} \qquad (**)$$

$\forall\, g_1, g_2 : \mathbb{R}^d \to [0,+\infty]$.

Allora $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ e $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2} = 1+\frac{1}{r}$.

Dim. Date g_1, g_2 e $\lambda > 0$ applico (**) a λg_1 e g_2

$$\begin{array}{ccc} \|(\lambda g_1) * g_2\|_r & \leq & C \|\lambda g_1\|_{p_1}^{\alpha_1} \|g_2\|_{p_2}^{\alpha_2} \\ \| & & \| \\ \|\lambda (g_1 * g_2)\|_r & & C \lambda^{\alpha_1} \|g_1\|_{p_1}^{\alpha_1} \|g\|_{p_2}^{\alpha_2} \\ \| & & \\ \lambda \|g_1 * g_2\|_r & & \end{array}$$

cioè $\lambda \|g_1 * g_2\|_r \leq C \lambda^{\alpha_1} \|g_1\|_{p_1}^{\alpha_1} \|g\|_{p_2}^{\alpha_2}$

Necessariamente $\alpha_1 = 1$.

Analogamente $\alpha_2 = 1$.

Date g_1, g_2, $\lambda > 0$, pongo $(g_i)_\lambda = g_i\left(\frac{x}{\lambda}\right)$ per $i = 1, 2$.

$$\|(g_1)_\lambda * (g_2)_\lambda\|_r \leq C \|(g_1)_\lambda\|_{p_1}^{\alpha_1} \|(g_2)_\lambda\|_{p_2}^{\alpha_2}$$

facendo i conti

$$\lambda^{d(1+\frac{1}{r})} \|g_1 * g_2\|_r \leq \lambda^{d(\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2})} C \|g_1\|_{p_1}^{\alpha_1} \|g_2\|_{p_2}^{\alpha_2}$$

$\forall \lambda \Rightarrow 1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$.

$$(g_1)_\lambda * (g_2)_\lambda (x) = \int g_1\left(\frac{x-y}{\lambda}\right) \cdot g_2\left(\frac{y}{\lambda}\right) dy$$

$z = \frac{y}{\lambda}$ $\longrightarrow$ $= \int g_1\left(\frac{x}{\lambda} - z\right) g_2(z) \lambda^d dz$

$dz = \frac{dy}{\lambda^d}$ $\quad = \lambda^d \, g_1 * g_2\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \lambda^d (g_1 * g_2)_\lambda$

$$\|\lambda^d (g_1 * g_2)_\lambda\|_r = \lambda^d \|(g_1 * g_2)_\lambda\|_r$$

$$= \lambda^d \cdot \lambda^{\frac{d}{r}} \|g_1 * g_2\|_r$$