AM3 20-21

lezione 1

23/9/2020

Presentazione del corso

Programma

fuori programma

strumenti:
- ripasso teoria della misura
- spazi L^p
- convoluzione
- introd. a Hilbert

core business del corso:
- SERIE DI FOURIER e applicazioni
- TRASFORMATA DI FOURIER (e qualche applicaz.)

risoluzione eq. calore e delle onde

- funzioni armoniche
- integrazione su superfici

forse: K-forme e teor. di Stokes

Prerequisiti

- generici : AM1 + AM2 + GEO1 + GEO2
- in particolare : Misura di Lebesgue e integrazione (rispetto ad una misura qualunque, ma l'importante è Lebesgue)
- funzioni olomorfe e metodo dei residui

Esame

scritto + orale

scritto → 8 esercizi, 3 ore, niente appunti, niente libri

orale → nello stesso appello dello scritto

prove in itinere <u>forse</u>

in caso : fine novembre + inizio gennaio e orale entro il secondo appello.

Strumenti

Team

- lezioni
- ricevimento (giovedì 18-19.30)

pagina web: pagine.dm.unipi.it/alberti

- note delle lezioni (non editate)
- link alle registrazioni
- altro materiale: raccolte di ex scritti degli anni passati

mailing list (moderata)

- comunicazioni "ufficiali"
- per l'iscrizione → pagina web

Libri di testo: non ce n'è uno di riferim.

Ripasso di teoria della misura

DEFINIZIONI DI BASE

- misure astratte

  esempi:
  - misura di Lebegue
  - misura che conta i punti
  - delta di Dirac
  - misura ass. a una densità
- funzioni (e mappe) misurabili
- definizione di integrale

STRUMENTI

- Teoremi di convergenza
- Teorema di Fubini-Tonelli
- Formula di cambio di var. (solo per Leb.)
- Collegamento con l'integrale di Riemann

  ↳ essenziale per i calcoli

Misure astratte

X insieme qual.

$\mathcal{A}$ σ-algebra di sottoinsiemi di X

famiglia chiusa per complementare, unione e intersez. numerabile, $\emptyset, X \in \mathcal{A}$

μ misura (su X) cioè $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow [0,+\infty]$

σ-additiva: data $\{E_n\} \subset \mathcal{A}$ famiglia numerabile <u>disgiunta</u> e posto $E := \bigcup E_n$ allora

$$\mu(E) = \sum_n \mu(E_n)$$

<u>Proprietà</u>

- $\mu(\emptyset) = 0$
- $E, E' \in \mathcal{A}$ & $E \subset E' \Rightarrow \mu(E) \leq \mu(E')$ (monotonia)
- $\underline{E_n \uparrow E} \Rightarrow \mu(E) = \lim_{n \to +\infty} \mu(E_n) = \sup_n \mu(E_n)$

  $(E_1 \subset E_2 \subset \dots$ & $\bigcup E_n = E)$
- $E_n \uparrow E$ & $\mu(E_{\bar{n}}) < +\infty$ for some $\bar{n}$

  $\Rightarrow \mu(E) = \lim_{n \to +\infty} \mu(E_n) = \inf_n \mu(E_n)$

- $\bigcup E_n \supset E \Longrightarrow \mu(E) \leq \sum_n \mu(E_n)$
  (subadditività)

Oss.

Dato $X' \in \mathcal{A}$ si possono restringere $\mathcal{A}$ e μ a X'. Date voi le definizioni!

Terminologia

1) sia $P(x)$ un'affermazione che dipende da $x \in X$. Si dice che $P(x)$ vale per μ- quasi ogni $x \in X$ se l'insieme $\{x : P(x) \text{ non vale}\}$ è (contenuto in) un insieme di misura μ nulla.

2) μ si dice completa se
$F \subset E$ & $E \in \mathcal{A}$, $\mu(E) = 0 \Rightarrow F \in \mathcal{A}$
(e di conseg. $\mu(F) = 0$)

Qui consideriamo solo misure complete

3) μ si dice <u>finita</u> se $\mu(X) < +\infty$.

Esempi di misure

1. Misura che conta i punti

X insieme qualunque

$\mathcal{A} := \mathcal{P}(X) = \{\text{sottoins. di } X\}$

$\mu(E) := \# E \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$

numero di punti di E

non c'è un simbolo standard

2. Delta di Dirac in x_0

X insieme qualunque

$\mathcal{A} := \mathcal{P}(X)$

$x_0 \in X$ fissato

funz. indicatrice di E

$$\delta_{x_0}(E) := \begin{cases} 1 & \text{se } x_0 \in E \\ 0 & \text{se } x_0 \notin E \end{cases} = \mathbb{1}_E(x_0)$$

3. Misura di Lebesgue

$X = \mathbb{R}^n$

$\mathcal{M}^n$ = σ-algebra misurabili secondo Lebesgue

$\mathcal{L}^n$ = misura di Lebesgue

$\boxed{\text{Def. di } \mathcal{L}^n}$

Dato R parallelepipedo in $\mathbb{R}^n$

cioè $R = \prod_{k=1}^{n} I_k$ con I_k intervalli in $\mathbb{R}$

si pone

$$\mathrm{vol}_n(R) = \prod_{k=1}^{n} \mathrm{lungh}(I_k)$$

Per ogni $E \subset \mathbb{R}^n$ si pone

$$\mathcal{L}^n(E) := \inf \left\{ \sum_i \mathrm{vol}_n(R_i) \;\middle|\; \{R_i\} \text{ t.c. } \bigcup_i R_i \supset E \right\}$$

famiglia numer. di parallelepipedi

Osservazioni

- $\mathcal{L}^n(R) = \mathrm{vol}_n(R)$ (fatto non del tutto ovvio)

- $\mathcal{L}^n$ è così definita su $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ ma non è σ-additiva !!
- $\mathcal{L}^n$ è σ-additiva su $\mathcal{M}^n$ (è per questo che bisogna introdurre $\mathcal{M}^n$)

$\boxed{\text{Def. di } \mathcal{M}^n}$

Dato $E \subset \mathbb{R}^n$, si dice che E è misurabile (secondo Lebesgue) se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists A$ aperto, C chiuso t.c.

- $C \subset E \subset A$,
- $\mathcal{L}^n(A \setminus C) \leq \varepsilon$.

Osservazioni

- Per ogni E misurabile vale

$$\mathcal{L}^n(E) = \inf \{\mathcal{L}^n(A) : A \text{ aperto}, A \supset E\}$$
$$= \sup \{\mathcal{L}^n(K) : K \text{ compatto}, K \subset E\}$$

Proprietà che useremo in seguito!

- $F \subset E$ con $E \subset \mathcal{M}^n$ & $\mathcal{L}^n(E) = 0 \Rightarrow F \in \mathcal{M}^n$

  la misura di Lebesgue è completa!

- Useremo spesso la notazione

$$|E| := \mathcal{L}^n(E)$$

AM3 20/21

Lezione 2

24/9/20

prosegue il ripasso di Teoria della misura

$\boxed{\text{Funzioni misurabili}}$

Dati $X, \mathcal{A}, \mu$ come ieri
e $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ (o in Y spazio topologico)
diciamo che f è misurabile ($\mathcal{A}$-misurabile) se

$$f^{-1}(A) \in \mathcal{A} \quad \forall A \text{ aperto}$$

Osserv.

- dato $E \subset X$, $E \in \mathcal{A} \iff \mathbb{1}_E$ è misurabile
- la classe delle funzioni misurabili è chiusa rispetto a molte operazioni:

a) somma, prodotto (se hanno senso)

b) composizione con funzioni continue

$\left.\begin{array}{l} f: X \to Y \text{ misurabile} \\ g: Y \to Y' \text{ continua} \end{array}\right\} \Longrightarrow g \circ f$ è misurabile

c) Convergenza puntuale

f_n misurabili & $f_n \to f$ punt. $\Longrightarrow$ f misurabile

d) liminf e limsup (nel caso $Y = \mathbb{R}$)

Funzioni semplici

Indico con $\mathcal{S}$ la classe delle funzioni $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ semplici cioè della forma

$f = \sum_i \alpha_i \mathbb{1}_{E_i}$ con E_i misurabili, $\alpha_i \in \mathbb{R}$.

somma finita!

Se necessario posso supporre gli E_i disgiunti (dimostrarlo!)

Integrale

la definizione di $\int_X f\, d\mu$ è data per passi:

a) per $f \in \mathcal{S}$, $f \geq 0$, cioè $f = \sum \alpha_i \mathbb{1}_{E_i}$, $\alpha_i \geq 0$

si pone

$$\int_X f\, d\mu := \sum_i \alpha_i \, \mu(E_i)$$

convenendo che $+\infty \cdot 0 = 0$ (standard in TdM)

la somma ricorda le somme di Riemann (nella definizione dell' integrale secondo R.)

b) per $f : X \longrightarrow [0,+\infty]$ misurabile si pone

$$\int_X f\, d\mu := \sup_{\substack{g \in \mathcal{S} \\ 0 \leq g \leq f}} \int_X g\, d\mu$$

c) $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ misurabile si dice <u>integrabile</u> se $\int_X f^+ d\mu < +\infty$ opp. $\int_X f^- d\mu < +\infty$ (per $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $a^+ := a \vee 0$ e $a^- := (-a) \vee 0$, quindi $a = a^+ - a^-$ e $|a| = a^+ + a^-$).

Per tali f si pone

$$\int_X f\, d\mu := \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$$

d) $f : X \to \mathbb{R}^n$ si dice <u>sommabile</u> (o <u>di classe</u> <u>L^1</u>) se $\int_X |f|\, d\mu < +\infty$.

In tal caso $\int_X f_i^\pm d\mu < +\infty$ per ogni f_i componente di $f \implies \int_X f_i\, d\mu$ esiste ed è finito.

Per tali f si pone

$$\int_X f\, d\mu := \left(\int_X f_1 d\mu, \dots, \int_X f_k d\mu \right)$$

Osservazioni

- l'integrale è lineare (sulle funzioni sommabili)
- le definizioni in a) e b) danno lo stesso risultato per f semplice ≥ 0
- la def. in b) ha senso per ogni $f : X \to [0, +\infty]$ anche non misurabile. Ma in generale vale solo che $\int_X f_1 + f_2\, d\mu \geq \int_X f_1 d\mu + \int_X f_2 d\mu$.

- dato $E \in \mathcal{A}$, f misurabile su E, si pone
$$\int_E f \, d\mu := \int_X f \cdot \mathbb{1}_E \, d\mu$$
- scriviamo spesso $\int_E f(x)\,dx$ invece di $\int_E f \, d\mathcal{L}^n$
- Si può definire $\int_X f \, d\mu$ anche per $f : X \to Y$ misurabile con Y <u>spazio vettoriale</u> (di dim. finita e anche no). Che Y sia uno spazio vett. è necessario (cf. definizione a))
- se $f_1 = f_2$ μ-q.o. allora $\int_X f_1 \, d\mu = \int_X f_2 \, d\mu$.
[importante!!]
- si definisce $\int_X f \, d\mu$ anche se f è misurabile e definita su $X \setminus N$ con $\mu(N) = 0$
- se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è integrabile secondo Riemann allora f è misurabile secondo Lebesgue e le due nozioni di integrale coincidono.

Ma questo non vale per l'integrale improprio: se $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ è data da $f(x):=\frac{\sin x}{x}$, $\int_0^{+\infty} f\,dx$ esiste come integrale improprio ma non secondo Lebesgue $\left(\int_0^{+\infty} f^+\,dx = \int_0^{+\infty} f^-\,dx = +\infty\right)$.

- $\int_X f\,d\delta_{x_0} = f(x_0)$ (verificarlo!)

- Se μ è la misura che conta i punti su $X=\mathbb{N}$ cos'è $\int_X f\,d\mu$? Risposta:

$$\int_X f\,d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)$$

per le f positive o tali che $\sum f^+(n) < +\infty$ oppure $\sum f^-(n) < +\infty$. (Provare a dimostrarlo.)

Ma attenzione: se $f(n) := \frac{(-1)^n}{n}$ (e $f(0):=0$) allora $\int_{\mathbb{N}} f\,d\mu$ non esiste mentre $\sum f(n)$ esiste.

Importante: in seguito la misurabilità (di insiemi e funzioni) viene tacitamente supposta.

Teoremi di convergenza

Prendo $X, \mathcal{A}, \mu$ come al solito

Teorema di convergenza monotona

(Teor. di Beppo Levi)

Date $f_n : X \to [0, +\infty]$ misurabili,
t.c. $f_n \uparrow f$ ovunque in X, allora

$$\lim_{n \to +\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu$$
$$\parallel$$
$$\sup_n \int f_n \, d\mu$$

Lemma di Fatou

Date $f_n : X \to [0, +\infty]$ misurabili, allora

$$\liminf_{n \to +\infty} \int_X f_n \, d\mu \geq \int_X \left(\liminf_{n \to +\infty} f_n(x) \right) d\mu$$

Teorema di convergenza dominata

(Teorema di Lebesgue)

Date $f_n : X \to \mathbb{R}$ (o anche $\mathbb{R}^k$) t.c.

(i) $f_n(x) \to f(x)$ $\forall x \in X$ (converg. puntuale)

(ii) $\exists\ g : X \to [0,+\infty]$ sommabile (dominazione) t.c. $|f_n(x)| \leq g(x)$ $\forall x \in X$ $\forall n$

allora

$$\lim_{n \to +\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu$$

NOTA (ii) è essenziale; sostituirla con $\int_X |f_n| \, d\mu \leq C < +\infty$ NON BASTA!

Altro esempio di misura

Data $\rho : \mathbb{R}^n \to [0,+\infty]$ mis., la misura con densità ρ è data da

$$\mu(E) = \int_E \rho \, dx \qquad \forall E \text{ mis.}$$

misura di Leb.

- $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{L}^n$ possono essere sost. da X e $\tilde{\mu}$
- che μ sia una misura segue da Beppo Levi.

Teorema di cambio di variabile

Solo per la misura di Lebesgue

Siano:

Ω, Ω' aperti in $\mathbb{R}^n$

$\Phi : \Omega \to \Omega'$ <u>diffeomorfismo</u> di classe C^1

(Φ bigettiva, Φ & Φ^{-1} sono C^1)

$f : \Omega' \to [0, +\infty]$ misurabile

<u>Allora</u>

$$\int_{\Omega'} f(x')\, dx' = \int_{\Omega} f(\Phi(x))\, |\det(\nabla \Phi(x))|\, dx$$

$E' \subset \Omega$ mis. $\qquad E := \Phi^{-1}(E')$

Per memorizzare: se $x' = \Phi(x)$, $dx' = |\det(\nabla\Phi(x))|\, dx$

La stessa formula vale per f a valori in $\overline{\mathbb{R}}$ integrabile e per f a valori in $\mathbb{R}^k$ sommabile.

Osservazioni

- Se $n=1$, $|\det(\nabla\phi(x))| = |\phi'(x)|$
  e non $\phi'(x)$, come nella formula vista ad Analisi 1. Spiegare perché...

- Indebolire le ipotesi su Φ è delicato. Basta Φ di classe C^1 e $\#\Phi^{-1}(x') = 1$ per q.o. $x' \in \Omega'$
  Se Φ non è "quasi" iniettiva bisogna correggere la formula per tenere conto delle molteplicità.

  Attenzione: la formula di cambio di variabile vista ad Analisi 1 richiede solo che ϕ sia C^1....

$\boxed{\text{Teorema di Fubini-Tonelli}}$

(per la misura di Lebesgue)

Sia $\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \simeq \mathbb{R}^n$ $(n = n_1 + n_2)$,

$E_1 \times E_2 =: E$ con E_1, E_2 misurabili,

f funzione misurabile definita su $E = E_1 \times E_2$.

Se f ha valori in $[0, +\infty]$ allora

$$\int_E f \, dx = \int_{E_2} \left(\int_{E_1} f(x_1, x_2) \, dx_1 \right) dx_2 = \int_{E_2} \left(\int_{E_1} f(x_1, x_2) dx_2 \right) dx_1$$

e valgono tutti i risultati di misurabilità necessari:

- $f(\cdot, x_2)$ è mis. $\forall x_2 \in E_2 \setminus N_2$ con $|N_2| = 0$
- $f(x_1, \cdot)$ è mis. $\forall x_1 \in E_1 \setminus N_1$ con $|N_1| = 0$
- $x_2 \longmapsto \int_{E_1} f(x_1, x_2) dx_1$ è mis. su $E_1 \setminus N_1$
- $x_1 \longmapsto \int_{E_2} f(x_1, x_2) dx_2$ è mis. su $E_2 \setminus N_2$

Vale lo stesso per f a valori in $\mathbb{R}$ o $\mathbb{R}^k$ <u>sommabile</u> (cioè $\int_{\mathbb{R}^n} |f| \, dx < +\infty$)

Osservazioni

- Se X_1, X_2 sono spazi con misure μ_1, μ_2 (con opportune ipotesi) vale:

$$(*) \quad \int_{X_2}\left(\int_{X_1} f(x_1,x_2)\, d\mu_1(x_1)\right) d\mu_2(x_2) = \int_{X_1}\left(\int_{X_2} f(x_1,x_2)\, d\mu_2(x_2)\right) d\mu_1(x_1)$$

se $f \geq 0$ oppure $\int_{X_1}\left(\int_{X_2} |f|\, d\mu_2(x_2)\right) d\mu_1(x_1) < +\infty$.

- Se $X_1 \subset \mathbb{R}$, $\mu_1 = \mathcal{L}^n$, $X_2 = \mathbb{N}$, μ_2 mis. che conta i punti allora $(*)$ diventa:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_{X_1} f_n(x)\, dx\right) = \int_{X_1}\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\right) dx$$

se $f_i \geq 0 \ \forall i$ oppure $\sum_i \int_{X_1} |f_i(x)|\, dx < +\infty$

- Se $X_1 = X_2 = \mathbb{N}$ e $\mu_1 = \mu_2$ è la misura che conta i punti, $(*)$ diventa

$$\sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_{ij}\right) = \sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_{ij}\right)$$

se $a_{ij} \geq 0$ oppure $\sum_i \left(\sum_j |a_{ij}|\right) < +\infty$.

AM3 20-21

Lezione 3

28/9/2020

Esercizi

0. Dati $X, \mathcal{A}, \mu$ ed $E, E_n \in \mathcal{A}$ t.c. $E \subset \bigcup_n E_n$ allora $\mu(E) \leq \sum_n \mu(E_n)$.

1. Dati $X, \mathcal{A}, \mu$ e $f : X \longrightarrow [0,+\infty]$ misur., dimostrare i seguenti enunciati:

a) $\int_X f \, d\mu = 0 \iff f = 0$ q.o.

"$\Leftarrow$" ovvia per approx. con funzioni semplici: data $g \in \mathcal{S}$ t.c. $0 \leq g \leq f$, $g = \sum \alpha_i \mathbb{1}_{E_i}$ con E_i disgiunti, allora $f = 0$ q.o.

$\Rightarrow g = 0$ q.o.

$\Rightarrow \alpha_i = 0 \quad \forall i$ t.c. $\mu(E_i) > 0$

$\Rightarrow \int_X g \, d\mu = 0$

$\Rightarrow \int_X f \, d\mu$.

"$\Rightarrow$" Per ogni $t>0$ sia $E_t := \{x : f \geq t\}$.

Allora $f \geq t \cdot \mathbb{1}_{E_t}$,

quindi $0 = \int_X t \cdot \mathbb{1}_{E_t} \, d\mu = t \, \mu(E_t)$,

quindi $\mu(E_t) = 0$.

Siccome $E := \{x : f(x) > 0\} \subset \bigcup_n E_{1/n}$,

$\mu(E) \leq \sum_n \mu(E_{1/n}) = 0$.

b) $\int_X f \, d\mu > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0$ t.c. $\mu(\{x : f(x) \geq \delta\}) \geq 0$

So da a) che $\mu(E) > 0$ per $E = \{x : f(x) > 0\}$

e siccome $E = \bigcup_n E_{1/n}$, deve esistere

n t.c. $\mu(E_{1/n}) > 0$.

c) $\int_X f \, d\mu < +\infty \Rightarrow f < +\infty$ q.o.

Detto $F := \{x : f(x) = +\infty\}$, allora

$n \cdot \mathbb{1}_F \leq f \quad \forall n$ e quindi

$$n \, \mu(F) \leq \int_X f \, d\mu < +\infty$$

e quindi $\mu(F) = 0$.

2. C = insieme di Cantor. Allora $|C|=0$.

Ricordo che $C=\bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$ con:

$C_0 := [0,1]$,

$C_1 = [0,\frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3},1]$,

$\vdots$

C_n = unione di 2^n intervalli disgiunti $I_1^n, \dots, I_{2^n}^n$ di lunghezza $1/3^n$.

Siccome $C_n \downarrow C$

$$|C| = \lim_{n\to\infty} |C_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{3^n} = 0.$$

3. Se A è aperto in $\mathbb{R}^n$, allora $|A|>0$.

Ovvio: A contiene cubi non degeneri....

4. Costruire $K \subset \mathbb{R}$ compatto con $|K|>0$ e parte interna vuota ($\Rightarrow K$ tot. sconnesso).

Costruzione "Tipo Cantor".

Pongo $K_0 := [0,1]$

K_1 è ottenuto sottraendo da K_0 un intervallo centrale di lunghezza $\frac{1}{4}$, quindi $K_1 = I_1^1 \cup I_2^1$

K_2 è ottenuto sottraendo da ciascun I_i^1 un intervallo centrale di lungh. $\leq \frac{1}{16}$.
Quindi $K_2 = \bigcup_{i=1}^{4} I_i^2$.

....

Infine pongo $K := \bigcap_{n=0}^{\infty} K_n$.

Allora

$$|K_0| = 1,$$

$$|K_1| = |K_0| - \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{4},$$

$$|K_2| \geq |K_1| - 2 \cdot \frac{1}{16} = 1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right)$$

....

$$|K_n| \geq |K_{n-1}| - \frac{2^{n-1}}{4^n} = 1 - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{2^k}$$

Siccome $K_n \downarrow K$,

$$|K| = \lim_{n\to\infty} |K_n| = 1 - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2}.$$

5) Data $f : [0,+\infty) \to \overline{\mathbb{R}}$ misurabile.
Allora se $f \geq 0$ (oppure $\int |f(\rho)| \rho^{n-1} d\rho < +\infty$)

$$(*) \qquad \int_{\mathbb{R}^n} f(|x|)\, dx = \int_0^{+\infty} f(\rho)\, c_n \rho^{n-1} d\rho$$

dove $c_n := \mathrm{vol}_{n-1}(S^{n-1})$ sfera $(n-1)$-dim, $\partial B(0,1)$.
cioè $c_n = n\alpha_n$ con $\alpha_n := \mathrm{vol}_n(D^n)$

palla chiusa n-dim, $B(0,1)$

Dimostrazione 1) per $n=2$

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(|x|)\, dx = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{+\infty} f(\rho)\, \rho\, d\rho \right) d\theta = 2\pi \int_0^{+\infty} f(\rho)\, \rho\, d\rho$$

coordinate polari
$x = (\rho\cos\theta, \rho\,\mathrm{sen}\,\theta)$ con $\rho \geq 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$
$dx = \rho\, d\rho\, d\theta$

Dimostrazione 2) per $n \geq 3$

Come prima usando le coord. sferiche: (controllate i dettagli):

$$x = \underbrace{\left(\rho\cos\theta_1, \rho \,\mathrm{sen}\,\theta_1 \cos\theta_2, \rho\,\mathrm{sen}\,\theta_1 \,\mathrm{sen}\,\theta_2 \cos\theta_3, \dots, \rho\,\mathrm{sen}\,\theta_1 \dots \cos\theta_{n-1}, \rho\,\mathrm{sen}\,\theta_1 \dots \mathrm{sen}\,\theta_{n-1}\right)}_{\Phi_n(\rho, \theta_1, \dots, \theta_{n-1})}$$

con $0 \leq \rho \leq \infty$, $0 \leq \theta_1 \leq 2\pi$, $0 \leq \theta_2, \dots, \theta_{n-1} \leq \pi$.

Allora

$$dx = \rho^{n-1} (\mathrm{sen}\,\theta_1)^{n-2} (\mathrm{sen}\,\theta_2)^{n-3} \cdots (\mathrm{sen}\,\theta_{n-2})^1.$$

Per la dimostr. usare che

$$\Phi_n(\rho, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}) = \left(\rho\cos\theta_1, \Phi_{n-1}(\rho, \theta_2, \dots, \theta_{n-1}) \cdot \mathrm{sen}\,\theta_1\right)$$

Dimostrazione 3

Si dimostra $(*)$ per passi:

a) $f = \mathbb{1}_{[r_0, r_1]}$ con $0 \leq r_0 < r_1$

b) $f = \mathbb{1}_E$ con E mis. $\subset [0, +\infty)$

c) f semplice ≥ 0

d) f qualunque ≥ 0

6) Calcolare $\displaystyle\int_{B(0,r)} \frac{1}{|x|^a}\,dx$ palla in $\mathbb{R}^n$

$$\int_{B(0,r)} \frac{1}{|x|^a}\,dx = \int_0^r \frac{1}{\rho^a} c_n \rho^{n-1}\,d\rho$$

formula in Ex. 5) con $f(\rho) := \frac{1}{\rho^\alpha} \mathbb{1}_{[0,r]}$

$$= c_n \int_0^r \rho^{n-1-\alpha}\,d\rho$$

$$= \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha \geq n \\ \dfrac{c_n r^{n-\alpha}}{n-\alpha} & \text{se } a < n \end{cases}$$

7) Dire per quali a i seg. integrali sono finiti

a) $\displaystyle\int_{[0,1]^n} \frac{1}{|x|^a}\,dx$ b) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(|x|+|x|^2)^a}\,dx$

a) usando che $[0,1]^n \subset B(0,\sqrt{n})$

$$\int_{[0,1]^n} \frac{1}{|x|^a}\,dx \leq \int_{B(0,\sqrt{n})} \frac{1}{|x|^a}\,dx$$

$$\Longrightarrow \int_{[0,1]^n} \dots < +\infty \quad \text{se} \quad a<n$$

Usando che $[0,1]^n \supset \underbrace{B(0,1) \cap \{x \mid x_i \geq 0\}}_{\substack{\shortparallel \\ E}}$ "spicchio" di sfera

$$\int_{[0,1]^n} \frac{1}{|x|^a}\,dx \geq \int_{E} \frac{1}{|x|^a}\,dx$$

$$= \frac{1}{2^n} \int_{B(0,1)} \frac{1}{|x|^a}\,dx$$

$$\Longrightarrow \int_{[0,1]^n} \dots = +\infty \quad \text{se} \quad a \geq n$$

Conclusione $\int_{[0,1]^n} \dots$ è finito SSE $a<n$.

b) $$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(|x|+|x|^2)^a}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(\rho+\rho^2)^a} c_n \rho^{n-1}\,d\rho$$

$$= \int_0^1 \frac{c_n \rho^{n-1}}{(\rho+\rho^2)^\alpha}\,d\rho + \int_1^{+\infty} \frac{c_n \rho^{n-1}}{(\rho+\rho^2)^\alpha}\,d\rho$$

$$\qquad\qquad \simeq \qquad\qquad\qquad\qquad \simeq$$

$$\int_0^1 \frac{d\rho}{\rho^{\alpha-n+1}} \qquad\qquad \int_1^{+\infty} \frac{d\rho}{\rho^{2\alpha-n+1}}$$

finito sse $\alpha-n+1<1$ cioè $\alpha<n$ — finito sse $2\alpha-n+1>1$ cioè $\alpha>\frac{n}{2}$

Conclusione: l'int. è finito sse $\frac{n}{2}<\alpha<n$.

8) Dato F mis. in $\mathbb{R}$ con $|F|>0$ allora $\exists\, E\subset F$, E non misurabile.

Variante dell'Esempio di Vitali

Mi limito al caso di F limitato (dimostrate che ci si può ricondurre a questo caso: dato F t.c. $|F|>0$ esiste $F'\subset F$ limitato con $|F'|>0$).

Dati $x, x' \in \mathbb{R}$, dico $x \sim x'$ se $x - x' \in \mathbb{Q}$

razionali

Costruisco E così:

per ogni classe di equiv. $[x] \in \mathbb{R}/\sim$ t.c. $[x] \cap F \neq \emptyset$ scelgo $x' \in [x] \cap F$;

E è l'insieme di tali x'.

Osservo che

(a) $\forall x \in \mathbb{R}$ esiste al più un $x' \in E$ t.c. $x' \sim x$ (verificatelo!);

(b) $\forall x \in F$ esiste $x' \in E$ t.c. $x' \sim x$;

(c) $\{E + y : y \in \mathbb{Q}\}$ sono ins. disgiunti (uso (a))

(d) prendo L t.c. $F \subset [-L, L]$ allora

$$G := \bigcup_{y \in \mathbb{Q} \cap [-2L, 2L]} E + y$$ contiene F (uso (b));

(e) $G \subset [-4L, 4L]$.

In particolare:

(f) $F \subset G \subset [-4L, 4L]$

Se per assurdo E fosse misur.
G sarebbe unione numerabile di insiemi disgiunti con misura $|E|$,
quindi $|G| = \infty \cdot |E| = 0$ opp. $+\infty$
Ma (f) $\Rightarrow 0 < |G| < +\infty$. Assurdo!

Osserv.
Sia C l'ins. di Cantor, K l'insieme "tipo Cantor", costruito in Ex. 4.
Esiste Φ omeomorfismo di $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.c. $\Phi(C) = K$ (provate a costruirlo).
Siccome K contiene sottoinsiemi non misurabili e C no, Φ NON manda misurabili in misurabili.

9) Preso $E \subset \mathbb{R}$ mis. e $0 \leq m \leq |E|$

allora $\exists\ E' \subset E$ mis. t.c. $|E'| = m$.

Suppongo $|E| < +\infty$, e $\forall x \in \mathbb{R}$ pongo

$$E_x := E \cap (-\infty, x].$$

Allora la funzione

$$f(x) := |E_x|$$

è continua. Infatti per $x' > x$ vale

$0 < f(x') - f(x) = |E \cap (x, x']| \leq x' - x$.

Inoltre $f(-\infty) = 0$; $f(+\infty) = |E|$.

intesi come limiti.

Quindi per il teor. dei valori intermedi

$\exists x$ t.c. $m = f(x) = |E_x|$.

Provate a fare voi il caso $|E| = +\infty$ e

le seguenti varianti

Variante 1 Cosa succede rimpiazzando $\mathcal{L}^1$ con μ misura su $\mathcal{A}$ σ-algebra su $\mathbb{R}$ che contiene gli aperti?

ipotesi che semplifica la domanda

Risp. Il risultato vale se $\mu(\{x\})=0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(una misura con questa proprietà si chiama "non atomica").

Variante 2 Cosa succede su $\mathbb{R}^n$?

Cioè per μ misura su $\mathcal{A}$ σ-algebra su $\mathbb{R}^n$ che contiene gli aperti.

Risp. Il risultato vale se $\mu(\{x\})=0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$