Versione: 30 settembre 2018

Università di Pisa

Corso di laurea in Ingegneria Gestionale

Testi e soluzioni degli scritti d'esame di

Analisi Matematica I

a.a. 2017-18

Giovanni Alberti

Giovanni Alberti
Dipartimento di Matematica
Università di Pisa
largo Pontecorvo 5
56127 Pisa
http://pagine.dm.unipi.it/alberti/

Avvertenze. Gli scritti d'esame per il corso di Analisi Matematica I per Ingegneria Gestionale si compongono di due parti: una prima parte con otto domande o problemi molto semplici a cui si deve dare solo la risposta, ed una seconda con tre problemi a cui si deve invece dare una soluzione articolata in dettaglio. Il tempo a disposizione è di un'ora per la prima parte e di due ore per la seconda. Per la sufficienza sono solitamente richieste almeno cinque risposte corrette nella prima parte, ed un problema completamente risolto nella seconda.

La prima sezione di questa raccolta contiene i testi di tutti gli scritti, incluse le prove in itinere, mentre la seconda contiene una breve traccia delle soluzioni.

Programma del corso [versione: 30 dicembre 2017]. Sono riportati in corsivo gli argomenti non fondamentali.

1. Funzioni e grafici
   - 1.1 Funzioni: dominio, codominio, immagine, grafico; funzione inversa; funzioni pari e dispari, funzioni crescenti e decrescenti.
   - 1.2 Richiamo delle nozioni di base di trigonometria. Coordinate polari di un punto nel piano.
   - 1.3 Funzioni elementari: funzioni lineari, potenze, esponenziali, logaritmo (in base e), funzioni trigonometriche (seno, coseno, tangente) e funzioni trigonometriche inverse.
   - 1.4 Operazioni sui grafici di funzioni. Interpretazione di equazioni e disequazioni in termini di grafici di funzioni.
2. Limiti di funzioni e continuità
   - 2.1 Limiti di funzioni, proprietà elementari, forme indeterminate. Funzioni continue.
   - 2.2 Punti di massimo e di minimo (assoluti e locali) di una funzione. Esistenza del punti di minimo e di massimo per una funzione continua su un intervallo chiuso (teorema di Weierstrass, senza dimostrazione).
   - 2.3 Estremo superiore ed inferiore di un'unione finita di intervalli. Estremo superiore ed inferiore di una funzione la cui immagine è un'unione finita di intervalli.
3. Derivate
   - 3.1 Derivata di una funzione: definizione e significato geometrico. *Alcune interpretazioni non geometriche della derivata.*
   - 3.2 Derivate delle funzioni elementari e regole per il calcolo delle derivate.
   - 3.3 Individuazione dei punti di massimo e di minimo (assoluti e locali) di una funzione.
   - 3.4 Segno della derivata e monotonia. Segno della derivata seconda e convessità. Uso delle derivate per disegnare il grafico di una funzione.
   - 3.5 Teoremi di Rolle, Lagrange e Cauchy. Dimostrazione rigorosa (non grafica) della relazione tra monotonia e segno della derivata.
   - 3.6 Teorema di de l'Hôpital (dimostrazione parziale). Confronto tra i comportamenti asintotici di esponenziali, potenze e logaritmi all'infinito e in zero.
   - 3.7 Funzioni asintoticamente equivalenti (vicino ad un punto assegnato). Trascurabilità di una funzione rispetto ad un altra. Notazione di Landau ("o piccolo" e "o grande"). Parte principale di una funzione all'infinito e in zero.
   - 3.8 Sviluppo di Taylor (in zero) di una funzione, espressione del resto come "o grande" e nella forma di Lagrange (con dimostrazione). Sviluppi di Taylor di alcune funzioni fondamentali. Formula del binomio di Newton. Uso degli sviluppi di Taylor per il calcolo dei limiti e delle parti principali.
   - 3.9 Legge oraria di un punto in movimento nel piano o nello spazio, velocità ed accelerazione come derivate.
4. Elementi di analisi astratta
   - 4.1 *Numeri interi, razionali e reali (definiti come i numeri con espansioni decimali finite o infinite). Definizione di estremo superiore ed inferiore di un insieme qualunque di numeri reali. Completezza dei numeri reali.*
   - 4.2 *Teorema di esistenza degli zeri. Algoritmo di bisezione per la determinazione dello zero di una funzione.*
5. Integrali

5.1 Definizione di integrale definito di una funzione in termini di area del sottografico. Approssimazione dell'integrale tramite somme finite. Due interpretazioni fisica dell'integrale: distanza percorsa da un punto in movimento e lavoro di una forza (su un punto in movimento).
5.2 Primitiva di una funzione e teorema fondamentale del calcolo integrale (con dimostrazione).
5.3 Regole per il calcolo delle primitive (integrali indefiniti) e degli integrali definiti.
5.4 Calcolo delle aree delle figure piane. Calcolo dei volumi delle figure solide, e in particolare dei solidi di rotazione.

6. Integrali impropri

6.1 Integrali impropri semplici: definizione e possibili comportamenti.
6.2 Criterio del confronto e del confronto asintotico (per funzioni positive); criterio della convergenza assoluta (per funzioni a segno variabile).
6.3 Integrali impropri non semplici.

7. Serie numeriche e serie di potenze

7.1 *Successioni e limiti di successioni. Collegamento con i limiti di funzioni.*
7.2 Serie numeriche: definizione e possibili comportamenti. Primo esempio fondamentale: la serie geometrica.
7.3 Criteri del confronto con l'integrale. Secondo esempio fondamentale: la serie armonica generalizzata.
7.4 Criteri di convergenza per le serie: del confronto, del confronto asintotico, della convergenza assoluta, della radice e del rapporto.
7.5 Serie di potenze, e raggio di convergenza. Serie di Taylor. Calcolo del raggio di convergenza per le serie di Taylor di alcune funzioni elementari. Coincidenza della serie di Taylor con la funzione per alcune funzioni elementari. Espressione del numero e come serie.
7.6 *Giustificazione della formula* $e^{ix} = \cos x + i \sin x$. *Espressione del numero* π *come serie.*

8. Equazioni differenziali

8.1 Esempi di equazioni differenziali tratti dalla meccanica; significato delle condizioni iniziali.
8.2 Equazioni differenziali del primo ordine: definizione e fatti generali. Risoluzione delle equazioni lineari e delle equazioni a variabili separabili.
8.3 Equazioni differenziali del secondo ordine: definizione e fatti generali. Equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti, omogenee e non omogenee. Risoluzione delle equazioni a coefficienti costanti omogenee, e ricerca della soluzione particolare per quelle non omogenee per alcune classi di termini noti. *Equazione del pendolo e dell'oscillatore armonico.*

T E S T I

PRIMA PARTE, GRUPPO 1.

1. Per ciascuno dei seguenti punti dare le coordinate (polari o cartesiane) che mancano:
   a) $x = -2,\ y = 2;$ $r =$ $\alpha =$
   b) $x = 0,\ y = -4;$ $r =$ $\alpha =$
   c) $r = 2\sqrt{3},\ \alpha = -\pi/3;$ $x =$ $y =$
   Per le coordinate polari indicare un angolo α compreso tra $-\pi$ e π.

2. Trovare le soluzioni x della disuguaglianza $\tan(2x) \geq -1$ tali che $0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$.

3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{\log(\log x)}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \cos(e^x)$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+2x^3)}{x\sin(x^2)}$.

4. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\arctan(e^{2x})$; b) $\dfrac{x^3}{x^2+4}$ c) $\dfrac{9^{x-3}}{3^{x-1}}$.

5. Dire se esistono i punti di massimo e minimo *assoluti* della funzione $f(x) := x^2 e^x$ relativamente all'insieme $x \leq -1$ e in caso affermativo calcolarli.

6. Mettere le seguenti funzioni nell'ordine corretto rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to +\infty$:
$$\underbrace{\frac{5^x+1}{2^x+x}}_{a} \ll \underbrace{\frac{x\log x}{x^2+2\log x}}_{b} \ll \underbrace{\frac{x-2x^2}{4+x^3}}_{c} \ll \underbrace{2^x + \log x}_{d}$$

7. Trovare lo sviluppo di Taylor (in 0) all'ordine 4 della funzione $f(x) := \exp(4x^2)\cos(2x^2)$.

8. Risolvere graficamente la disequazione $\dfrac{1}{|x|+1} \leq \sqrt{-x}$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 2.

1. Per ciascuno dei seguenti punti dare le coordinate (polari o cartesiane) che mancano:
   a) $x = -3,\ y = \sqrt{3};$ $r =$ $\alpha =$
   b) $x = -2,\ y = 0;$ $r =$ $\alpha =$
   c) $r = 2\sqrt{2},\ \alpha = -\pi/4;$ $x =$ $y =$
   Per le coordinate polari indicare un angolo α compreso tra $-\pi$ e π.

2. Trovare le soluzioni x della disuguaglianza $\tan(2x) \leq -1$ tali che $-\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq 0$.

3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{3^x}{2^x+4^x}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \cos(2^x)$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x^4)-1}{\cos(x^2)-1}$.

4. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\arctan(2^x)$; b) $\dfrac{x^3}{x^5+4}$; c) $\dfrac{3^{2x-1}}{9^{x-3}}$.

5. Dire se esistono i punti di massimo e minimo *assoluti* della funzione $f(x) := \log(4-x^2)$ relativamente all'insieme $-1 \leq x < 2$ e in caso affermativo calcolarli.

6. Mettere le seguenti funzioni nell'ordine corretto rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to +\infty$:
$$\underbrace{\frac{4^x+1}{3^x-x}}_{a} \ll \underbrace{\frac{\log x}{2x^2+\log x}}_{b} \ll \underbrace{\frac{x+2}{x^3+3x}}_{c} \ll \underbrace{2^x - \log x}_{d}$$

7. Trovare lo sviluppo di Taylor (in 0) all'ordine 3 della funzione $f(x) := 2\sin(3x)\sqrt{1+2x^2}$.

8. Risolvere graficamente la disequazione $1 - x^2 \leq \dfrac{1}{|x|-1}$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 3.

1. Per ciascuno dei seguenti punti dare le coordinate (polari o cartesiane) che mancano:
   a) $x = -\sqrt{3}$, $y = -3$; $r =$ $\alpha =$
   b) $x = 0$, $y = -2$; $r =$ $\alpha =$
   c) $r = 2$, $\alpha = 2\pi/3$; $x =$ $y =$
   Per le coordinate polari indicare un angolo α compreso tra $-\pi$ e π.

2. Trovare le soluzioni x della disuguaglianza $\tan(2x) \geq -\sqrt{3}$ tali che $0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$.

3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^{14}+x^5}}{x^4+42}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \log(\log x)$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x^3)}{x-\sin x}$.

4. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\arctan(x^4)$ b) $\dfrac{x^2}{x^7+6}$ c) $\dfrac{2^{3x+1}}{4^{x+2}}$.

5. Dire se esistono i punti di massimo e minimo *assoluti* della funzione $f(x) := x^2 e^x$ relativamente all'insieme $x \geq -1$ e in caso affermativo calcolarli.

6. Mettere le seguenti funzioni nell'ordine corretto rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to +\infty$:
$$\underbrace{\frac{2x^3+x}{x^5-x}}_{a} \ll \underbrace{\frac{1+5^x}{x+3^x}}_{b} \ll \underbrace{2^x + x^{10}}_{c} \ll \underbrace{\frac{-2\log x}{x^2+\log x}}_{d}$$

7. Trovare lo sviluppo di Taylor (in 0) all'ordine 4 della funzione $f(x) := \log(1+2x^2)\sqrt{1-x^2}$.

8. Disegnare l'insieme dei punti (x, y) tali che $\sqrt{|x|} \leq y \leq \dfrac{1}{|x|+1}$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 4.

1. Per ciascuno dei seguenti punti dare le coordinate (polari o cartesiane) che mancano:
   a) $x = -\sqrt{2}$, $y = \sqrt{2}$; $r =$ $\alpha =$
   b) $x = 0$, $y = 2$; $r =$ $\alpha =$
   c) $r = 2\sqrt{2}$, $\alpha = 3\pi/4$; $x =$ $y =$
   Per le coordinate polari indicare un angolo α compreso tra $-\pi$ e π.

2. Trovare le soluzioni x della disuguaglianza $\tan(2x) \leq -\sqrt{3}$ tali che $-\pi \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$.

3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{5x^3+3}{\sqrt{x^{10}-x^5}}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \sin(x+e^x)$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^2-\sin x}$.

4. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\arcsin(x^4)$; b) $\dfrac{x^4}{x^4+4}$ c) $\dfrac{2^{x+2}}{4^{x+1}}$.

5. Dire se esistono i punti di massimo e minimo *assoluti* della funzione $f(x) := \log(2-x^2)$ relativamente all'insieme $-1 \leq x < \sqrt{2}$ e in caso affermativo calcolarli.

6. Mettere le seguenti funzioni nell'ordine corretto rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to +\infty$:
$$\underbrace{\frac{3^x - x}{4^x + 1}}_{a} \ll \underbrace{\frac{2x^2 + \log x}{\log x}}_{b} \ll \underbrace{\frac{x^3 + 3x}{x + 2}}_{c} \ll \underbrace{\frac{1}{2^x - \log x}}_{d}$$

7. Trovare lo sviluppo di Taylor (in 0) all'ordine 6 della funzione $f(x) := 2\sin(3x^2)\sqrt{1 + 2x^4}$.

8. Disegnare l'insieme dei punti (x, y) tali che $\dfrac{1}{|x| + 1} \leq y \leq \sqrt{-x}$.

Prima parte, gruppo 5.

1. Per ciascuno dei seguenti punti dare le coordinate (polari o cartesiane) che mancano:
a) $x = -\sqrt{3}$, $y = -\sqrt{3}$; $r =$ $\alpha =$
b) $x = 0$, $y = -1$; $r =$ $\alpha =$
c) $r = 2\sqrt{3}$, $\alpha = 5\pi/6$; $x =$ $y =$
Per le coordinate polari indicare un angolo α compreso tra $-\pi$ e π.

2. Trovare le soluzioni x della disuguaglianza $\tan(\pi x) \leq -1$ tali che $-1 \leq x \leq 0$.

3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\log\log x}{\log x}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sin(e^x + x^8)$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^3 \sin x}{\log(1 + x^4)}$.

4. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\arcsin(2^x)$; b) $\dfrac{x^5}{x^3 + 3}$ c) $\dfrac{4^{x+2}}{2^{3x+1}}$.

5. Dire se esistono i punti di massimo e minimo *assoluti* della funzione $f(x) := x^2 e^x$ relativamente all'insieme $x \leq 1$ e in caso affermativo calcolarli.

6. Mettere le seguenti funzioni nell'ordine corretto rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to +\infty$:
$$\underbrace{\frac{x^5 - x}{2x^3 + x}}_{a} \ll \underbrace{\frac{x + 3^x}{1 + 5^x}}_{b} \ll \underbrace{\frac{1}{2^x + x^{10}}}_{c} \ll \underbrace{\frac{\log x - x^2}{2\log x}}_{d}$$

7. Trovare lo sviluppo di Taylor (in 0) all'ordine 2 della funzione $f(x) := \log(1 + 2x)\sqrt{1 - x}$.

8. Disegnare l'insieme dei punti (x, y) tali che $\dfrac{1}{|x| - 1} \leq y \leq 1 - x^2$.

Prima parte, gruppo 6.

1. Per ciascuno dei seguenti punti dare le coordinate (polari o cartesiane) che mancano:
a) $x = -2$, $y = 2\sqrt{3}$; $r =$ $\alpha =$
b) $x = -2$, $y = 0$; $r =$ $\alpha =$
c) $r = \sqrt{2}$, $\alpha = 3\pi/4$; $x =$ $y =$
Per le coordinate polari indicare un angolo α compreso tra $-\pi$ e π.

2. Trovare le soluzioni x della disuguaglianza $\tan(\pi x) \geq -1$ tali che $-1 \leq x \leq 0$.

3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2^x - 4^x}{3^x}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{\log(\log x)}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\exp(x^3) - 1}$.

4. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\arcsin(e^{2x})$; b) $\dfrac{x^7}{x^2+2}$ c) $\dfrac{4^{x+1}}{2^{2x+1}}$.

5. Dire se esistono i punti di massimo e minimo *assoluti* della funzione $f(x) := \log(4 - x^2)$ relativamente all'insieme $-2 < x \le -1$ e in caso affermativo calcolarli.

6. Mettere le seguenti funzioni nell'ordine corretto rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to +\infty$:
$$\underbrace{\frac{2^x + x}{5^x + 1}}_{a} \ll \underbrace{\frac{x^2 + 2\log x}{x \log x}}_{b} \ll \underbrace{\frac{4 + x^3}{x - 2x^2}}_{c} \ll \underbrace{\frac{1}{2^x + \log x}}_{d}$$

7. Trovare lo sviluppo di Taylor (in 0) all'ordine 2 della funzione $f(x) := \exp(4x)\cos(2x)$.

8. Risolvere graficamente la disequazione $\dfrac{1}{|x|+1} \le \sqrt{|x|}$.

SECONDA PARTE, GRUPPO 1.

1. Per ogni $a \in \mathbb{R}$ determinare il numero di soluzioni dell'equazione $\exp(2x^2) = a(x-2)^5$.

2. a) Trovare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $f(x) := \log\big(\sin(x^3)\big) - 3\log x$.
   b) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) + ax^6$.

3. Consideriamo i triangoli delimitati dagli assi cartesiani e da una retta tangente al grafico $y = e^{-x}$ in un punto di ascissa positiva. Tra tutti questi triangoli determinare quelli di area massima e di area minima.

SECONDA PARTE, GRUPPO 2.

1. Per ogni $a \in \mathbb{R}$ determinare il numero di soluzioni dell'equazione $\exp(2x^2) = a(x-3)^{16}$.

2. a) Trovare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $f(x) := \log\big(\sin(x^2)\big) - 2\log x$.
   b) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) + ax^4$.

3. Uguale al gruppo 1.

SECONDA PARTE, GRUPPO 3.

1. Per ogni $a \in \mathbb{R}$ determinare il numero di soluzioni dell'equazione $\exp(2x^2) = a(x-2)^{12}$.

2. a) Trovare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $f(x) := \log\big(\exp(x^2) - 1\big) - 2\log x$.
   b) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) + ax^2$.

3. Uguale al gruppo 1.

SECONDA PARTE, GRUPPO 4.

1. Per ogni $a \in \mathbb{R}$ determinare il numero di soluzioni dell'equazione $\exp(2x^2) = a(x-3)^7$.

2. a) Trovare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $f(x) := \log\big(\exp(x^3) - 1\big) - 3\log x$.
   b) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) + ax^3$.

3. Uguale al gruppo 1.

Prima parte, gruppo 1.

1. Calcolare la velocità (intesa come vettore) e il modulo della velocità di un punto che si muove nel piano con la seguente legge oraria: $x(t) = 1 + e^t \cos t$; $y(t) = -2 + e^t \sin t$.

2. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(\log x)}{\log^2 x}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sin^2 x}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(2x^3)}{x^4 \sin(x^2)}$.

3. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := \sin(2x) + ax$ risulta essere crescente su tutto $\mathbb{R}$.

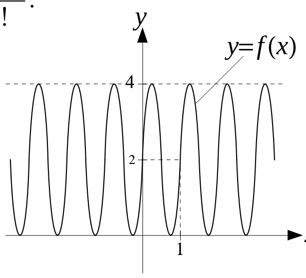
4. Calcolare $\displaystyle\int_0^\pi x \cos x \, dx$.

5. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n + n^a}{a^n + 1}$ converge ad un numero finito.

6. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = \dfrac{e^t}{x^2}$ che soddisfa $x(0) = 1$.

7. Calcolare il raggio di convergenza R della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n x^n}{n!}$.

8. Trovare una formula per la funzione $f(x)$ il cui grafico è disegnato qui accanto.



Prima parte, gruppo 2.

1. Calcolare la velocità (intesa come vettore) e il modulo della velocità di un punto che si muove nel piano con la seguente legge oraria: $x(t) = -3 + t\cos t$; $y(t) = 2 + t \sin t$.

2. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^3 2^x$; b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \cos(2^x)$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2x^2 + \log(1-2x^2)}{x^2\sin(x^2)}$.

3. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := \sin(3x) - ax$ risulta essere crescente su tutto $\mathbb{R}$.

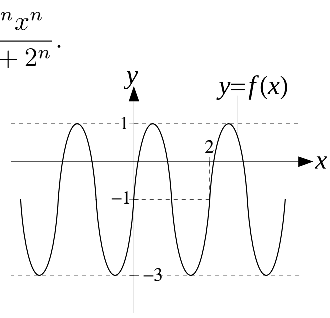
4. Calcolare $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4-2x}}$.

5. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+1}{n^2 a^n + 1}$ converge ad un numero finito.

6. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = \dfrac{e^t}{x^2}$ che soddisfa $x(0) = 2$.

7. Calcolare il raggio di convergenza R della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n x^n}{1+2^n}$.

8. Trovare una formula per la funzione $f(x)$ il cui grafico è disegnato qui accanto.



Prima parte, gruppo 3.

1. Calcolare la velocità (intesa come vettore) e il modulo della velocità di un punto che si muove

nel piano con la seguente legge oraria: $x(t) = 1 - e^{-t}\cos t$; $y(t) = 3 + e^{-t}\sin t$.

2. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 2^x - 4^x$; b) $\displaystyle\lim_{x\to\pi^-} \frac{1}{\sin^3 x}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^3\big[\exp(1/x^3) - 1\big]$.

3. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := \sin(2x) + ax$ risulta essere decrescente su tutto $\mathbb{R}$.

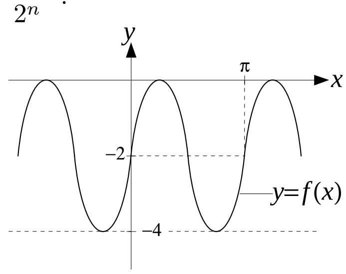
4. Calcolare $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{4 + x^2}$.

5. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^a + n^{2a}}{1 + n^{4a}}$ converge ad un numero finito.

6. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = \dfrac{e^t}{x^3}$ che soddisfa $x(0) = 1$.

7. Calcolare il raggio di convergenza R della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^n x^n}{2^n}$.

8. Trovare una formula per la funzione $f(x)$ il cui grafico è disegnato qui accanto.



PRIMA PARTE, GRUPPO 4.

1. Calcolare la velocità (intesa come vettore) e il modulo della velocità di un punto che si muove nel piano con la seguente legge oraria: $x(t) = 2 + e^t\sin t$; $y(t) = -1 + e^t\cos t$.

2. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\log^3 x}{\log(\log x)}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} e^x \sin x$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^4\sin(x^2)}{1 - \cos(2x^3)}$.

3. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := \sin(3x) - ax$ risulta essere decrescente su tutto $\mathbb{R}$.

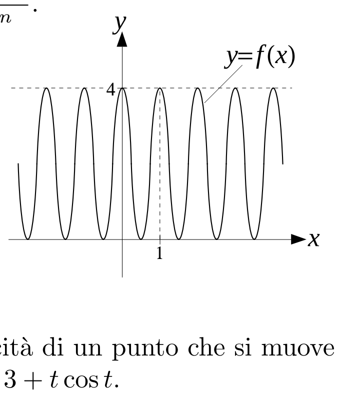
4. Calcolare $\displaystyle\int x\,\cos x\,dx$.

5. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n + 1}{2^n + n^a}$ converge ad un numero finito.

6. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = \dfrac{e^t}{x^3}$ che soddisfa $x(0) = 2$.

7. Calcolare il raggio di convergenza R della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!\,x^n}{4^n}$.

8. Trovare una formula per la funzione $f(x)$ il cui grafico è disegnato qui accanto.



PRIMA PARTE, GRUPPO 5.

1. Calcolare la velocità (intesa come vettore) e il modulo della velocità di un punto che si muove nel piano con la seguente legge oraria: $x(t) = -2 + t\sin t$; $y(t) = 3 + t\cos t$.

2. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2^{x^2}}{4^x}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \cos(2^x)$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2\sin(x^2)}{2x^2+\log(1-2x^2)}$.

3. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := \cos(2x) + ax$ risulta essere crescente su tutto $\mathbb{R}$.

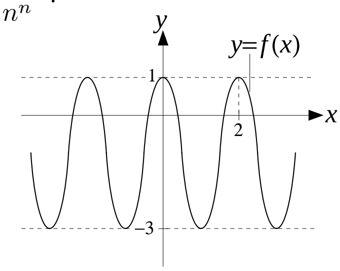
4. Calcolare $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{4-2x}}$.

5. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3a^n+1}{n^3 3^n+1}$ converge ad un numero finito.

6. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = \dfrac{\cos t}{x^2}$ che soddisfa $x(0) = 1$.

7. Calcolare il raggio di convergenza R della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n x^n}{n^n}$.

8. Trovare una formula per la funzione $f(x)$ il cui grafico è disegnato qui accanto.



PRIMA PARTE, GRUPPO 6.

1. Calcolare la velocità (intesa come vettore) e il modulo della velocità di un punto che si muove nel piano con la seguente legge oraria: $x(t) = 2 + e^{-t}\sin t$; $y(t) = 1 - e^{-t}\cos t$.

2. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^5 + 2^x$; b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^x \sin x$; c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^4\big[\cos(1/x^2) - 1\big]$.

3. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := \cos(3x) + ax$ risulta essere decrescente su tutto $\mathbb{R}$.

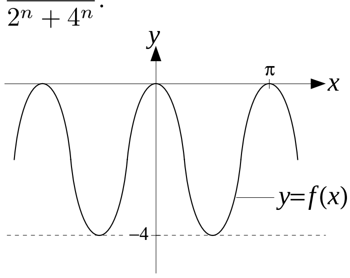
4. Calcolare $\displaystyle\int \frac{dx}{4+x^2}$.

5. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+n^{2+a}}{1+n^{3a}}$ converge ad un numero finito.

6. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = \dfrac{\cos t}{x^2}$ che soddisfa $x(0) = 2$.

7. Calcolare il raggio di convergenza R della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n+4^n}$.

8. Trovare una formula per la funzione $f(x)$ il cui grafico è disegnato qui accanto.



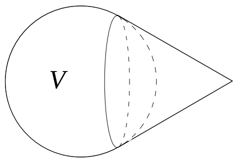
SECONDA PARTE, GRUPPO 1.

Scritto del primo appello: esercizi 1, 2 e 3; secondo compitino: esercizi 2, 3 e 4.

1. Consideriamo la funzione
$$f(x) := \frac{1}{1+x^4} - \frac{1}{1+2x^4}\,.$$
   a) Trovare la parte principale di $f(x)$ per $x \to +\infty$.
   b) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ trovare la parte principale di $f(x) + a/x^4$ per $x \to +\infty$.

2. Consideriamo la funzione $f(x)$ definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ dalla formula
$$f(x) := \int_0^{\frac{x}{5+x^6}} 2\exp(-t^2)\, dt\,.$$
a) Studiare il segno di $f(x)$ (osservare che la funzione integranda è sempre positiva).
b) Studiare i limiti significativi di $f(x)$.
c) Disegnare un grafico approssimativo di $f(x)$.
d) Determinare la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0$ e per $x \to +\infty$.

3. Calcolare il volume del solido V dato dall'unione di una sfera e di un cono come in figura, dove la sfera ha raggio 2 e la distanza tra il vertice del cono e il centro della sfera è 4.



(Attenzione: come si vede dal disegno, nei punti di "giunzione" la sfera e il cono sono tangenti.)

4. Dato $a \in \mathbb{R}$ consideriamo l'equazione differenziale
$$\ddot{x} + (1-6a)\dot{x} + (8a^2 - 2a)x = 2e^t + 4t\,. \qquad (*)$$
a) Trovare la soluzione generale di (*) per $a \neq 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$.
b) Trovare la soluzione generale di (*) per $a = \frac{1}{2}$.
c) Trovare gli $a \neq 0, \frac{1}{4}$ per cui tutte le soluzioni di (*) tendono a $+\infty$ per $t \to +\infty$.

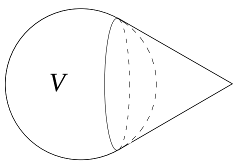
SECONDA PARTE, GRUPPO 2.

Scritto del primo appello: esercizi 1, 2 e 3; secondo compitino: esercizi 2, 3 e 4.

1. Consideriamo la funzione
$$f(x) := \frac{1}{1-x^4} - \frac{1}{1+x^4}\,.$$
a) Trovare la parte principale di $f(x)$ per $x \to +\infty$.
b) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ trovare la parte principale di $f(x) + a/x^4$ per $x \to +\infty$.

2. Consideriamo la funzione $f(x)$ definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ dalla formula
$$f(x) := \int_0^{-\frac{x}{3+x^4}} \exp(-t^2)\, dt\,.$$
a) Studiare il segno di $f(x)$ (osservare che la funzione integranda è sempre positiva).
b) Studiare i limiti significativi di $f(x)$.
c) Disegnare un grafico approssimativo di $f(x)$.
d) Determinare la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0$ e per $x \to +\infty$.

3. Calcolare il volume del solido V dato dall'unione di una sfera e di un cono come in figura, dove la sfera ha raggio $\sqrt{2}$ e la distanza tra il vertice del cono e il centro della sfera è 2.



(Attenzione: come si vede dal disegno, nei punti di "giunzione" la sfera e il cono sono tangenti.)

4. Dato $a \in \mathbb{R}$ consideriamo l'equazione differenziale
$$\ddot{x} + (1+3a)\dot{x} + (2a^2 + a)x = 2e^t - 4t\,. \qquad (*)$$
a) Trovare la soluzione generale di (*) per $a \neq -1, -\frac{1}{2}, 0$.
b) Trovare la soluzione generale di (*) per $a = -1$.
c) Trovare gli $a \neq 0, \frac{1}{4}$ per cui tutte le soluzioni di (*) tendono a $+\infty$ per $t \to +\infty$.

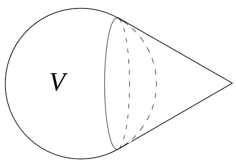
SECONDA PARTE, GRUPPO 3.

Scritto del primo appello: esercizi 1, 2 e 3; secondo compitino: esercizi 2, 3 e 4.

1. Consideriamo la funzione
$$f(x) := \frac{1}{1+x^3} - \frac{1}{1+2x^3}\,.$$
a) Trovare la parte principale di $f(x)$ per $x \to +\infty$.
b) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ trovare la parte principale di $f(x) + a/x^3$ per $x \to +\infty$.

2. Consideriamo la funzione $f(x)$ definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ dalla formula
$$f(x) := \int_0^{-\frac{x}{5+x^6}} \exp(-t^2)\,dt\,.$$
a) Studiare il segno di $f(x)$ (osservare che la funzione integranda è sempre positiva).
b) Studiare i limiti significativi di $f(x)$.
c) Disegnare un grafico approssimativo di $f(x)$.
d) Determinare la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0$ e per $x \to +\infty$.

3. Calcolare il volume del solido V dato dall'unione di una sfera e di un cono come in figura, dove la sfera ha raggio 2 e la distanza tra il vertice del cono e il centro della sfera è 4.



(Attenzione: come si vede dal disegno, nei punti di "giunzione" la sfera e il cono sono tangenti.)

4. Dato $a \in \mathbb{R}$ consideriamo l'equazione differenziale
$$\ddot{x} + (1-6a)\dot{x} + (8a^2 - 2a)x = 2e^t + 4t\,. \qquad (*)$$
a) Trovare la soluzione generale di (*) per $a \neq 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$.
b) Trovare la soluzione generale di (*) per $a = \frac{1}{2}$.
c) Trovare gli $a \neq 0, \frac{1}{4}$ per cui tutte le soluzioni di (*) tendono a $+\infty$ per $t \to +\infty$.

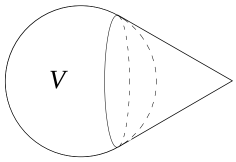
SECONDA PARTE, GRUPPO 4.

Scritto del primo appello: esercizi 1, 2 e 3; secondo compitino: esercizi 2, 3 e 4.

1. Consideriamo la funzione
$$f(x) := \frac{1}{1-x^3} - \frac{1}{1+x^3}\,.$$
a) Trovare la parte principale di $f(x)$ per $x \to +\infty$.
b) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ trovare la parte principale di $f(x) + a/x^3$ per $x \to +\infty$.

2. Consideriamo la funzione $f(x)$ definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ dalla formula
$$f(x) := \int_0^{\frac{x}{3+x^4}} 2\exp(-t^2)\,dt\,.$$
a) Studiare il segno di $f(x)$ (osservare che la funzione integranda è sempre positiva).
b) Studiare i limiti significativi di $f(x)$.
c) Disegnare un grafico approssimativo di $f(x)$.
d) Determinare la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0$ e per $x \to +\infty$.

3. Calcolare il volume del solido V dato dall'unione di una sfera e di un cono come in figura, dove la sfera ha raggio $\sqrt{2}$ e la distanza tra il vertice del cono e il centro della sfera è 2.



(Attenzione: come si vede dal disegno, nei punti di "giunzione" la sfera e il cono sono tangenti.)

4. Dato $a \in \mathbb{R}$ consideriamo l'equazione differenziale
$$\ddot{x} + (1+3a)\dot{x} + (2a^2+a)x = 2e^t - 4t\,. \qquad (*)$$
a) Trovare la soluzione generale di (*) per $a \neq -1, -\frac{1}{2}, 0$.
b) Trovare la soluzione generale di (*) per $a = -1$.
c) Trovare gli $a \neq 0, \frac{1}{4}$ per cui tutte le soluzioni di (*) tendono a $+\infty$ per $t \to +\infty$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 1.

1. Trovare $r > 0$ e $\alpha \in [-\pi, \pi]$ per cui vale l'identità $3\sin x - 3\cos x = r\sin(x + \alpha)$.
2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $(1 + x)e^{-x}$; b) x^{2x}; c) $\log\big(x^3/2^x\big)$.
3. Trovare i punti di minimo e di massimo della funzione $f(x) := xe^{-x}$ relativamente alla semiretta $x \geq -1$, specificando quando non esistono.
4. Trovare il polinomio di Taylor in 0 all'ordine 4 della funzione $f(x) := (3 - x^2)\cos(2x)$.
5. Mettere le seguenti funzioni nell'ordine corretto rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to +\infty$:
$$\underbrace{\frac{4^x}{e^x + 1}}_{a} \ll \underbrace{\frac{\log x + 1}{2^x}}_{b} \ll \underbrace{2^x + x^3 \log x}_{c} \ll \underbrace{\frac{2^x}{4^x + x}}_{d}$$
6. Calcolare $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x} dx$.
7. Calcolare il valore della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n + 2^n}{n!}$.
8. Risolvere graficamente la disequazione $|x| - 1 \geq \arctan(1 - x)$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 2.

1. Trovare $r > 0$ e $\alpha \in [-\pi, \pi]$ per cui vale l'identità $2\sin x + 2\cos x = r\sin(x + \alpha)$.
2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $(1 - x)e^{-x}$; b) x^{-x}; c) $\log\big(x^2/4^x\big)$.
3. Trovare i punti di minimo e di massimo della funzione $f(x) := xe^{-x}$ relativamente alla semiretta $x \geq 2$, specificando quando non esistono.
4. Trovare il polinomio di Taylor in 0 all'ordine 6 della funzione $f(x) := (6 + 2x^2)\log(1 + x^2)$.
5. Mettere le seguenti funzioni nell'ordine corretto rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to +\infty$:
$$\underbrace{\frac{4^x}{\log x + 1}}_{a} \ll \underbrace{\frac{1}{3^x + 3^{-x}}}_{b} \ll \underbrace{e^{-x} + 4^{-x}}_{c} \ll \underbrace{\frac{2^{3x}}{2^x + x}}_{d}$$
6. Calcolare $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2 + 1)^{5/2}} dx$.
7. Calcolare il valore della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n + 3^n}{4^n}$.
8. Risolvere graficamente la disequazione $x^2 \geq \arctan(|x + 1|)$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 3.

1. Trovare $r > 0$ e $\alpha \in [-\pi, \pi]$ per cui vale l'identità $-2\sin x + 2\cos x = r\sin(x + \alpha)$.
2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) xe^{x^2}; b) x^{3x}; c) $\log\big(x^2/2^x\big)$.

3. Trovare i punti di minimo e di massimo della funzione $f(x) := xe^{-x}$ relativamente alla semiretta $x \leq 2$, specificando quando non esistono.

4. Trovare il polinomio di Taylor in 0 all'ordine 9 della funzione $f(x) := (6 - 2x^3)\log(1 + x^3)$.

5. Mettere le seguenti funzioni nell'ordine corretto rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to +\infty$:

$$\underbrace{2^x + (\log x)^2}_{a} \ll \underbrace{\frac{2^x}{4^x + x^3}}_{b} \ll \underbrace{\frac{4^x}{e^x + x}}_{c} \ll \underbrace{\frac{(1 + \log x)^2}{1 + 2^x}}_{d}$$

6. Calcolare $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^3}\, dx$.

7. Calcolare il valore della serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^n}{n!}$.

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $\arctan(|x| - 1) \leq y \leq 2 - x^2$.

Prima parte, gruppo 4.

1. Trovare $r > 0$ e $\alpha \in [-\pi, \pi]$ per cui vale l'identità $2\sin x - 2\cos x = r\sin(x + \alpha)$.

2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\sin(e^{2x})$; b) $(2x)^x$; c) $\log\big(2^x/x^3\big)$.

3. Trovare i punti di minimo e di massimo della funzione $f(x) := xe^{x/2}$ relativamente alla semiretta $x \geq -1$, specificando quando non esistono.

4. Trovare il polinomio di Taylor in 0 all'ordine 8 della funzione $f(x) := (3 - x^4)\cos(2x^2)$.

5. Mettere le seguenti funzioni nell'ordine corretto rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to +\infty$:

$$\underbrace{2^{-x} + 4^{-x}}_{a} \ll \underbrace{\frac{2^{3x}}{2^x - x^2}}_{b} \ll \underbrace{\frac{4^x}{x^3 + 1}}_{c} \ll \underbrace{\frac{2}{3^x + 3^{-x}}}_{d}$$

6. Calcolare $\displaystyle\int x\, e^{-x} dx$.

7. Calcolare il valore della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n + 3^n}{6^n}$.

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $|x| - 1 \leq y \leq \arctan(1 - x)$.

Prima parte, gruppo 5.

1. Trovare $r > 0$ e $\alpha \in [-\pi, \pi]$ per cui vale l'identità $3\sin x + 3\cos x = r\sin(x + \alpha)$.

2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\cos(e^{-x})$; b) $(3x)^x$; c) $\log\big(4^x/x^2\big)$.

3. Trovare i punti di minimo e di massimo della funzione $f(x) := xe^{x/2}$ relativamente alla semiretta $x \geq -3$, specificando quando non esistono.

4. Trovare il polinomio di Taylor in 0 all'ordine 9 della funzione $f(x) := (6 + 2x^3)\log(1 + x^3)$.

5. Mettere le seguenti funzioni nell'ordine corretto rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to +\infty$:
$$\underbrace{\frac{1}{2^x + (\log x)^2}}_{a} \ll \underbrace{\frac{1 + 2^x}{(1 + \log x)^2}}_{b} \ll \underbrace{\frac{4^x + x^3}{2^x}}_{c} \ll \underbrace{\frac{e^x}{4^x + x}}_{d}$$

6. Calcolare $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{(x^2+1)^{5/2}} dx$.

7. Calcolare il valore della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n - 3^n}{n!}$.

8. Risolvere graficamente la disequazione $2 - x^2 \leq \arctan(|x| - 1)$.

Prima parte, gruppo 6.

1. Trovare $r > 0$ e $\alpha \in [-\pi, \pi]$ per cui vale l'identità $-3 \sin x + 3 \cos x = r \sin(x + \alpha)$.

2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\sin(e^{3x})$; b) $(4x)^x$; c) $\log\big(2^x/x^2\big)$.

3. Trovare i punti di minimo e di massimo della funzione $f(x) := xe^{x/2}$ relativamente alla semiretta $x \leq 1$, specificando quando non esistono.

4. Trovare il polinomio di Taylor in 0 all'ordine 6 della funzione $f(x) := (6 - 2x^2) \log(1 + x^2)$.

5. Mettere le seguenti funzioni nell'ordine corretto rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to +\infty$:
$$\underbrace{\frac{2^{-x} + 2^x}{x}}_{a} \ll \underbrace{\frac{2}{2^x + 5^x}}_{b} \ll \underbrace{\frac{2^x}{2^{3x} + x^2}}_{c} \ll \underbrace{\frac{2^x}{x^3 + 1}}_{d}$$

6. Calcolare $\displaystyle\int x^2 e^{-x^3} dx$.

7. Calcolare il valore della serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$.

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $x^2 \leq y \leq \arctan(|x + 1|)$.

Seconda parte, gruppo 1.

1. a) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ determinare il numero di soluzioni dell'equazione
$$x^2 - 3 = ae^x . \tag{*}$$
b) Per ogni $a \leq 0$ per cui l'equazione (*) ammette delle soluzioni, indico con $x(a)$ la più grande di queste soluzioni. Determinare lo sviluppo di Taylor in 0 di ordine 1 della funzione $x(a)$, cioè trovare le costanti c_0 e c_1 per cui vale $x(a) = c_0 + c_1 a + o(a)$.

2. a) Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali $|x| \leq y \leq \sqrt[3]{|x|^3 + 1}$.
b) Dire se A ha area finita.
c) Dire se il solido V ottenuto ruotando A attorno all'asse x ha volume finito.

3. Consideriamo la funzione
$$f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} .$$

a) Dimostrare che la funzione $f(x)$ è definita e finita per ogni $x \in \mathbb{R}$.

b) Dimostrare che $f(x)$ risolve l'equazione differenziale $f'' - f = 0$.

c) Trovare una formula per $f(x)$.

Seconda parte, gruppo 2.

1. a) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ determinare il numero di soluzioni dell'equazione

$$x^2 - 8 = ae^x . \tag{*}$$

b) Per ogni $a \leq 0$ per cui l'equazione (*) ammette delle soluzioni, indico con $x(a)$ la più grande di queste soluzioni. Determinare lo sviluppo di Taylor in 0 di ordine 1 della funzione $x(a)$, cioè trovare le costanti c_0 e c_1 per cui vale $x(a) = c_0 + c_1 a + o(a)$.

2. a) Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali $|x| \leq y \leq \sqrt[5]{|x|^5 + 1}$.

b) Dire se A ha area finita.

c) Dire se il solido V ottenuto ruotando A attorno all'asse x ha volume finito.

3. Consideriamo la funzione

$$f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} .$$

a) Dimostrare che la funzione $f(x)$ è definita e finita per ogni $x \in \mathbb{R}$.

b) Dimostrare che $f(x)$ risolve l'equazione differenziale $f'' - f = 0$.

c) Trovare una formula per $f(x)$.

Seconda parte, gruppo 3.

1. a) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ determinare il numero di soluzioni dell'equazione

$$x^2 - 2 = ae^{2x} . \tag{*}$$

b) Per ogni $a \leq 0$ per cui l'equazione (*) ammette delle soluzioni, indico con $x(a)$ la più grande di queste soluzioni. Determinare lo sviluppo di Taylor in 0 di ordine 1 della funzione $x(a)$, cioè trovare le costanti c_0 e c_1 per cui vale $x(a) = c_0 + c_1 a + o(a)$.

2. a) Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali $|x| \leq y \leq \sqrt[3]{|x|^3 + 2}$.

b) Dire se A ha area finita.

c) Dire se il solido V ottenuto ruotando A attorno all'asse x ha volume finito.

3. Consideriamo la funzione

$$f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} .$$

a) Dimostrare che la funzione $f(x)$ è definita e finita per ogni $x \in \mathbb{R}$.

b) Dimostrare che $f(x)$ risolve l'equazione differenziale $f'' - f = 0$.

c) Trovare una formula per $f(x)$.

Seconda parte, gruppo 4.

1. a) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ determinare il numero di soluzioni dell'equazione

$$x^2 - 6 = ae^{2x} . \tag{*}$$

b) Per ogni $a \leq 0$ per cui l'equazione (*) ammette delle soluzioni, indico con $x(a)$ la più grande di queste soluzioni. Determinare lo sviluppo di Taylor in 0 di ordine 1 della funzione $x(a)$, cioè trovare le costanti c_0 e c_1 per cui vale $x(a) = c_0 + c_1 a + o(a)$.

2. a) Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali $|x| \leq y \leq \sqrt[5]{|x|^5 + 2}$.
   b) Dire se A ha area finita.
   c) Dire se il solido V ottenuto ruotando A attorno all'asse x ha volume finito.

3. Consideriamo la funzione
$$f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}\,.$$
   a) Dimostrare che la funzione $f(x)$ è definita e finita per ogni $x \in \mathbb{R}$.
   b) Dimostrare che $f(x)$ risolve l'equazione differenziale $f'' - f = 0$.
   c) Trovare una formula per $f(x)$.

Prima parte, gruppo 1.

1. Per ciascuno dei seguenti punti dare le coordinate (polari o cartesiane) che mancano:
   a) $x = 0,\ \ y = -2;$ $\qquad r =$ $\qquad \alpha =$
   b) $x = -3,\ \ y = \sqrt{3};$ $\qquad r =$ $\qquad \alpha =$
   c) $r = 2,\ \ \alpha = \pi/3;$ $\qquad x =$ $\qquad y =$
   (Per le coordinate polari indicare un angolo α compreso tra $-\pi$ e π.)

2. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := \sin(2x) + ax^2$ risulta essere convessa su tutto $\mathbb{R}$.

3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^4 2^x$; b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{e^x}{\log x}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x^2) - x^2}{\sin(x^4)}$.

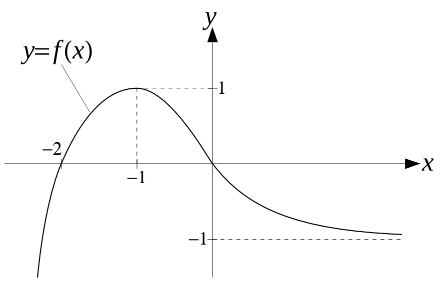
4. Dire per quali $a > 0$ vale che $2^x - 3^x = o(xa^x)$ per $x \to +\infty$.

5. Calcolare la velocità scalare $v(t)$ di un punto che si muove con legge oraria
$$x(t) = 2e^{2t}\cos t + 1\,, \quad y(t) = 2e^{2t}\sin t - 2\,,$$
e la distanza d percorsa tra l'istante $t = 0$ e l'istante $t = 2$.

6. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(1-x^2)^a}$ è finito.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} + \dfrac{2}{t}x = 3$ che soddisfa $x(2) = 1$.

8. Partendo dal grafico $y = f(x)$ disegnato nella figura sotto, risolvere graficamente la disequazione $f(2x) + 1 \geq f(x)$.



Prima parte, gruppo 2.

1. Per ciascuno dei seguenti punti dare le coordinate (polari o cartesiane) che mancano:
   a) $x = -3,\ \ y = 0;$ $\qquad r =$ $\qquad \alpha =$
   b) $x = -2,\ \ y = 2;$ $\qquad r =$ $\qquad \alpha =$
   c) $r = 2,\ \ \alpha = -\pi/4;$ $\qquad x =$ $\qquad y =$
   (Per le coordinate polari indicare un angolo α compreso tra $-\pi$ e π.)

2. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := \sin(3x) - ax^2$ risulta essere convessa su tutto $\mathbb{R}$.

3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} e^x\sqrt{x}\log x$; b) $\displaystyle\lim_{x\to\pi^+} \frac{x}{\sin x}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[4]{1+x^4} - 1}{\cos(x^2) - 1}$.

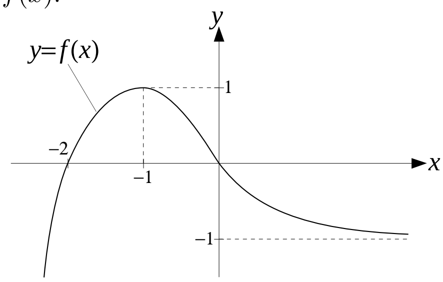
4. Dire per quali $a > 0$ vale che $xe^{ax} = O(2^x)$ per $x \to +\infty$.

5. Calcolare la velocità scalare $v(t)$ di un punto che si muove con legge oraria
$$x(t) = e^{-t}\cos t - 1\,, \quad y(t) = e^{-t}\sin t + 2\,,$$
e la distanza d percorsa tra l'istante $t = 0$ e l'istante $t = 2$.

6. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{(4-x^2)^a}$ è finito.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} + \dfrac{2}{t}x = 4t$ che soddisfa $x(2) = 1$.

8. Partendo dal grafico $y = f(x)$ disegnato nella figura sotto, disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $f(-x-1) \le y \le f(x)$.



PRIMA PARTE, GRUPPO 3.

1. Per ciascuno dei seguenti punti dare le coordinate (polari o cartesiane) che mancano:
   a) $x = 0,\ \ y = -3;$ $\qquad r =$ $\qquad \alpha =$
   b) $x = -\sqrt{3},\ \ y = 1;$ $\qquad r =$ $\qquad \alpha =$
   c) $r = 2\sqrt{3},\ \ \alpha = 2\pi/3;$ $\qquad x =$ $\qquad y =$
   (Per le coordinate polari indicare un angolo α compreso tra $-\pi$ e π.)

2. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := \sin(2x) + ax^2$ risulta essere concava su tutto $\mathbb{R}$.

3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1+\log(\log x)}{\log^2 x}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to\pi} \frac{x}{\sin x}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^6}{\sin(x^2) - x^2}$.

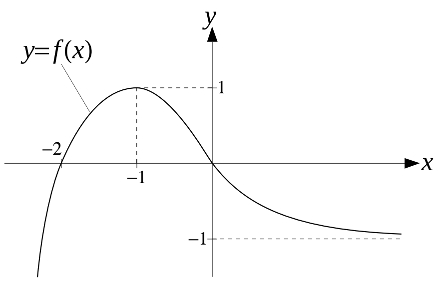
4. Dire per quali $a > 0$ vale che $x^5 + x^4 \log x = O(x^a)$ per $x \to 0^+$.

5. Calcolare la velocità scalare $v(t)$ di un punto che si muove con legge oraria
$$x(t) = 2e^{2t}\cos t + 1\,, \quad y(t) = -2e^{2t}\sin t - 2\,,$$
e la distanza d percorsa tra l'istante $t = 0$ e l'istante $t = 2$.

6. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(1-x^2)^{2a}}$ è finito.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} + \dfrac{3}{t}x = 4$ che soddisfa $x(2) = 1$.

8. Partendo dal grafico $y = f(x)$ disegnato nella figura sotto, risolvere graficamente la disequazione $\frac{1}{2}f(x) \le f(-x)$.



PRIMA PARTE, GRUPPO 4.

1. Per ciascuno dei seguenti punti dare le coordinate (polari o cartesiane) che mancano:

a) $x = -2$, $y = 0$; $r =$ $\alpha =$
b) $x = \sqrt{3}$, $y = 3$; $r =$ $\alpha =$
c) $r = 2\sqrt{2}$, $\alpha = 3\pi/4$; $x =$ $y =$
(Per le coordinate polari indicare un angolo α compreso tra $-\pi$ e π.)

2. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := \sin(3x) - ax^2$ risulta essere concava su tutto $\mathbb{R}$.

3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}+1}{4^x+1}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \frac{e^x}{\log x}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^4)}{\log(1+x^2)-x^2}$.

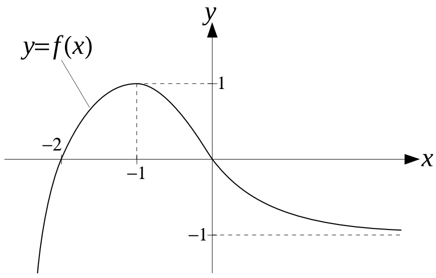
4. Dire per quali $a > 0$ vale che $\log(x^x) = O(x^a)$ per $x \to +\infty$.

5. Calcolare la velocità scalare $v(t)$ di un punto che si muove con legge oraria
$$x(t) = 2e^{-t}\cos t - 1\,, \quad y(t) = -2e^{-t}\sin t + 2\,,$$
e la distanza d percorsa tra l'istante $t = 0$ e l'istante $t = 2$.

6. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{(4-x^2)^{2a}}$ è finito.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} + \dfrac{3}{t}x = 5t$ che soddisfa $x(2) = 1$.

8. Partendo dal grafico $y = f(x)$ disegnato nella figura sotto, disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $f(x) \le y \le f(2x) + 1$.



PRIMA PARTE, GRUPPO 5.

1. Per ciascuno dei seguenti punti dare le coordinate (polari o cartesiane) che mancano:
a) $x = 0$, $y = 2$; $r =$ $\alpha =$
b) $x = -1$, $y = -1$; $r =$ $\alpha =$
c) $r = 2\sqrt{3}$, $\alpha = -5\pi/6$; $x =$ $y =$
(Per le coordinate polari indicare un angolo α compreso tra $-\pi$ e π.)

2. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := \cos(2x) + ax^2$ risulta essere convessa su tutto $\mathbb{R}$.

3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2^{x^2}}{4^x}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to(2\pi)^-} \frac{x}{\sin x}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x^2)-1}{\sqrt[4]{1+x^4}-1}$.

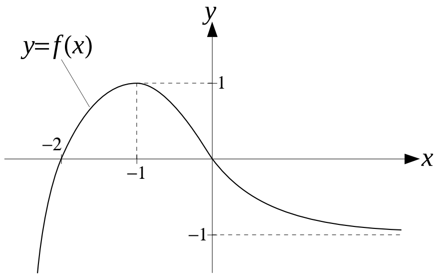
4. Dire per quali $a > 0$ vale che $a^x \ll x2^x$ per $x \to -\infty$.

5. Calcolare la velocità scalare $v(t)$ di un punto che si muove con legge oraria
$$x(t) = 4e^{2t}\sin t + 1\,, \quad y(t) = 4e^{2t}\cos t - 2\,,$$
e la distanza d percorsa tra l'istante $t = 0$ e l'istante $t = 2$.

6. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(1-x^2)^{3a}}$ è finito.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} + \frac{4}{t}x = 5$ che soddisfa $x(2) = 1$.

8. Partendo dal grafico $y = f(x)$ disegnato nella figura sotto, risolvere graficamente la disequazione $f(-x-1) \leq f(x)$.



Prima parte, gruppo 6.

1. Per ciascuno dei seguenti punti dare le coordinate (polari o cartesiane) che mancano:
   a) $x = -2,\ y = 0;$ $r =$ $\alpha =$
   b) $x = 2,\ y = -2;$ $r =$ $\alpha =$
   c) $r = \sqrt{2},\ \alpha = -3\pi/4;$ $x =$ $y =$
   (Per le coordinate polari indicare un angolo α compreso tra $-\pi$ e π.)

2. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := \cos(3x) + ax^2$ risulta essere concava su tutto $\mathbb{R}$.

3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim\limits_{x\to-\infty} 2^x - x^4$; b) $\lim\limits_{x\to 2\pi} \frac{x}{\sin x}$; c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sin(x^2) - x^2}{x^6}$.

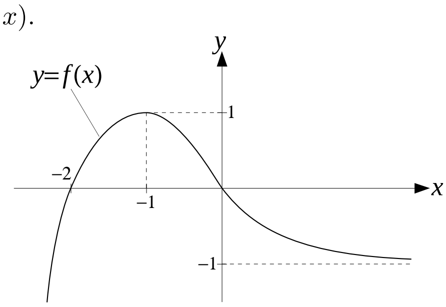
4. Dire per quali $a > 0$ vale che $\log(x^x) = O(x^a)$ per $x \to 0^+$.

5. Calcolare la velocità scalare $v(t)$ di un punto che si muove con legge oraria
$$x(t) = 3e^{-t}\sin t - 1\,, \quad y(t) = 3e^{-t}\cos t + 2\,,$$
   e la distanza d percorsa tra l'istante $t = 0$ e l'istante $t = 2$.

6. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{(4-x^2)^{3a}}$ è finito.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} + \frac{4}{t}x = 6t$ che soddisfa $x(2) = 1$.

8. Partendo dal grafico $y = f(x)$ disegnato nella figura sotto, disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $\frac{1}{2}f(x) \geq y \geq f(-x)$.

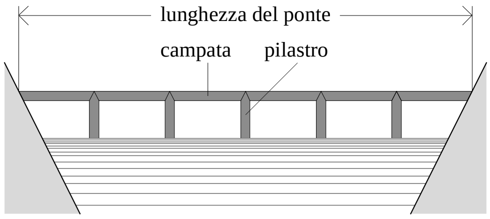


Seconda parte, gruppo 1.

1. Dato $a \in \mathbb{R}$ consideriamo l'equazione differenziale
$$\ddot{x} - 2a\dot{x} + (a+2)^2 x = e^{-t}\,. \qquad (*)$$
   a) Trovare la soluzione generale di (*) per $a \neq -1; -5$.
   b) Trovare la soluzione generale di (*) per $a = -1$.

c) Per ogni a determinare le soluzioni di (*) che convergono a 1 per $t \to +\infty$.

2. Si decide di costruire attraverso un fiume un ponte di lunghezza 15 (non specifico l'unità di misura) formato da n campate di lunghezza uguale ed $n-1$ pilastri, come in figura.



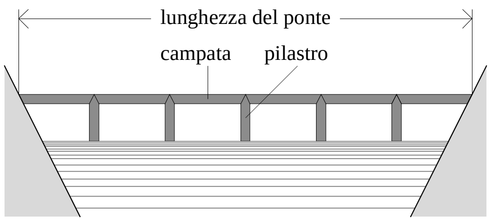
Sapendo che il costo di un pilastro è 3 e che il costo di una campata di lunghezza ℓ è $1+\ell^2$, come conviene prendere n?

3. Dimostrare che la serie $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{4^{n^2}}$ converge e calcolarne il valore con errore inferiore a 10^{-10}.

Seconda parte, gruppo 2.

1. Dato $a \in \mathbb{R}$ consideriamo l'equazione differenziale
$$\ddot{x} - 2a\dot{x} + (a+4)^2 x = e^{-2t}\,. \tag{*}$$
a) Trovare la soluzione generale di (*) per $a \neq -2; -10$.
b) Trovare la soluzione generale di (*) per $a = -2$.
c) Per ogni a determinare le soluzioni di (*) che convergono a 1 per $t \to +\infty$.

2. Si decide di costruire attraverso un fiume un ponte di lunghezza 13 (non specifico l'unità di misura) formato da n campate di lunghezza uguale ed $n-1$ pilastri, come in figura.



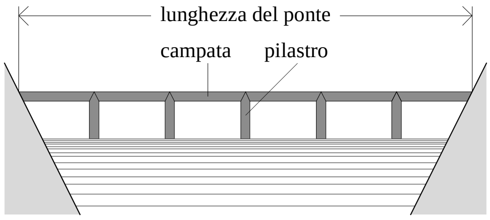
Sapendo che il costo di un pilastro è 2 e che il costo di una campata di lunghezza ℓ è $1+\ell^2$, come conviene prendere n?

3. Dimostrare che la serie $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{4^{n^2}}$ converge e calcolarne il valore con errore inferiore a 10^{-10}.

Seconda parte, gruppo 3.

1. Dato $a \in \mathbb{R}$ consideriamo l'equazione differenziale
$$\ddot{x} - 2a\dot{x} + (a+2)^2 x = -e^{-t}\,. \tag{*}$$
a) Trovare la soluzione generale di (*) per $a \neq -1; -5$.
b) Trovare la soluzione generale di (*) per $a = -1$.
c) Per ogni a determinare le soluzioni di (*) che convergono a 1 per $t \to +\infty$.

2. Si decide di costruire attraverso un fiume un ponte di lunghezza 25 (non specifico l'unità di misura) formato da n campate di lunghezza uguale ed $n-1$ pilastri, come in figura.



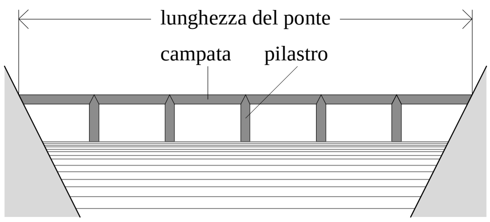
Sapendo che il costo di un pilastro è 3 e che il costo di una campata di lunghezza ℓ è $1 + \ell^2$, come conviene prendere n?

3. Dimostrare che la serie $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{4^{n^2}}$ converge e calcolarne il valore con errore inferiore a 10^{-10}.

SECONDA PARTE, GRUPPO 4.

1. Dato $a \in \mathbb{R}$ consideriamo l'equazione differenziale
$$\ddot{x} - 2a\dot{x} + (a+4)^2 x = -e^{-2t} \,. \tag{*}$$
   a) Trovare la soluzione generale di (*) per $a \neq -2; -10$.
   b) Trovare la soluzione generale di (*) per $a = -2$.
   c) Per ogni a determinare le soluzioni di (*) che convergono a 1 per $t \to +\infty$.

2. Si decide di costruire attraverso un fiume un ponte di lunghezza 20 (non specifico l'unità di misura) formato da n campate di lunghezza uguale ed $n - 1$ pilastri, come in figura.



Sapendo che il costo di un pilastro è 2 e che il costo di una campata di lunghezza ℓ è $1 + \ell^2$, come conviene prendere n?

3. Dimostrare che la serie $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{4^{n^2}}$ converge e calcolarne il valore con errore inferiore a 10^{-10}.

Prima parte, gruppo 1.

1. Trovare le soluzioni della disequazione $\tan(3x) \le 1$ nell'intervallo $0 \le x \le \pi/3$.

2. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico $y = x \exp(-x^3)$ nel punto di ascissa $x = -1$.

3. Trovare il polinomio di Taylor (in 0) di ordine 6 della funzione $2\sin(3x^2 + x^6)$.

4. Mettere le seguenti funzioni nell'ordine corretto rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to +\infty$:
$$\underbrace{\frac{8^x}{2^x+1}}_{a} \ll \underbrace{\frac{\log x}{x^3-2x}}_{b} \ll \underbrace{\frac{2x-1}{x^4+1}}_{c} \ll \underbrace{e^{2x+1}}_{d}$$

5. Dire per quali $a > 0$ converge la serie $\displaystyle\sum_1^{+\infty} (1+n^a)\log(1+n^{-3a})$.

6. Calcolare la velocità (vettore) del punto P che si muove con legge oraria
$$P(t) = \big(t^3/3 - 4t - 1;\ 2t^2 - 2\big)$$
e la distanza percorsa tra l'istante $t = 0$ e l'istante $t = 1$.

7. Dire per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ la funzione $x(t) := \exp(\lambda t^2)$ risolve l'equazione $\ddot{x} + t\dot{x} + 12\,t^2 x = 0$.

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $\dfrac{1}{(x+1)^2} - 1 \le y \le 1 - x^2$.

Prima parte, gruppo 2.

1. Trovare le soluzioni della disequazione $\tan(3x) \ge -\sqrt{3}$ nell'intervallo $0 \le x \le \pi/3$.

2. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico $y = x^2 \exp(-x^2)$ nel punto di ascissa $x = -1$.

3. Trovare il polinomio di Taylor (in 0) di ordine 4 della funzione $\log(1 + 2x^2 + x^4)$.

4. Mettere le seguenti funzioni nell'ordine corretto rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to +\infty$:
$$\underbrace{\frac{x^3}{\sqrt{x}+1}}_{a} \ll \underbrace{\frac{3\cdot 2^x+1}{8^x-1}}_{b} \ll \underbrace{\frac{1}{5^x+3}}_{c} \ll \underbrace{x^2\log(1+e^x)}_{d}$$

5. Dire per quali $a > 0$ converge la serie $\displaystyle\sum_1^{+\infty} \frac{4^n+1}{2^{an}+n}$.

6. Calcolare la velocità (vettore) del punto P che si muove con legge oraria
$$P(t) = \big(t^5/5 - 9t + 2;\ 2t^3 + 1\big)$$
e la distanza percorsa tra l'istante $t = 0$ e l'istante $t = 1$.

7. Dire per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ la funzione $x(t) := \exp(\lambda t^2)$ risolve l'equazione $\ddot{x} + 3t\dot{x} - (10\,t^2 + 2)x = 0$.

8. Risolvere graficamente la disequazione $2 - e^{-x} \le \sqrt{2-x}$.

Prima parte, gruppo 3.

1. Trovare le soluzioni della disequazione $\tan(2x) \le \sqrt{3}$ nell'intervallo $0 \le x \le \pi/2$.

2. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico $y = x^2 \exp(x^2)$ nel punto di ascissa $x = 1$.

3. Trovare il polinomio di Taylor (in 0) di ordine 6 della funzione $\exp(4x^3 + x^6)$.

4. Mettere le seguenti funzioni nell'ordine corretto rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to +\infty$:
$$\underbrace{\frac{3 \cdot 2^x + 1}{9^x - 1}}_{a} \ll \underbrace{\frac{x^4}{\sqrt[3]{x} + 2}}_{b} \ll \underbrace{\frac{1}{4^x + 1}}_{c} \ll \underbrace{x^3 \log(e^x - 1)}_{d}$$

5. Dire per quali $a > 0$ converge l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^a - 1}{x^{2x} + 1} dx$.

6. Calcolare la velocità (vettore) del punto P che si muove con legge oraria
$$P(t) = \big(2t^2 - 1;\, t^3/3 - 4t + 3\big)$$
e la distanza percorsa tra l'istante $t = 0$ e l'istante $t = 1$.

7. Dire per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ la funzione $x(t) := \exp(\lambda t^2)$ risolve l'equazione $\ddot{x} + t\dot{x} - (6t^2 + 2)x = 0$.

8. Risolvere graficamente la disequazione $\arctan(1 - x) \le 2\log(x + 3)$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 4.

1. Trovare le soluzioni della disequazione $\tan(3x) \le 1$ nell'intervallo $-\pi/3 \le x \le 0$.

2. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico $y = x\,\exp(-x^3)$ nel punto di ascissa $x = 1$.

3. Trovare il polinomio di Taylor (in 0) di ordine 6 della funzione $2\sin(3x^2 - x^6)$.

4. Mettere le seguenti funzioni nell'ordine corretto rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to +\infty$:
$$\underbrace{\frac{5^x}{2^x + 1}}_{a} \ll \underbrace{\frac{\log x}{x^4 + 1}}_{b} \ll \underbrace{e^{x-1}}_{c} \ll \underbrace{\frac{2x^2 - 1}{x^6 + x}}_{d}$$

5. Dire per quali $a > 0$ converge l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} (1 + x^a)\log(1 + x^{-4a})\, dx$.

6. Calcolare la velocità (vettore) del punto P che si muove con legge oraria
$$P(t) = \big(2t^3 + 2;\, t^5/5 - 9t - 4\big)$$
e la distanza percorsa tra l'istante $t = 0$ e l'istante $t = 1$.

7. Dire per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ la funzione $x(t) := \exp(\lambda t^2)$ risolve l'equazione $\ddot{x} + t\dot{x} + (4 - 12\,t^2)x = 0$.

8. Risolvere graficamente la disequazione $\displaystyle\frac{1}{(x+1)^2} - 1 \le 1 - x^2$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 5.

1. Trovare le soluzioni della disequazione $\tan(3x) \ge -\sqrt{3}$ nell'intervallo $-\pi/3 \le x \le 0$.

2. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico $y = x^2 \exp(-x^2)$ nel punto di ascissa $x = 1$.

3. Trovare il polinomio di Taylor (in 0) di ordine 4 della funzione $\log(1 + 2x^2 - x^4)$.

4. Mettere le seguenti funzioni nell'ordine corretto rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to +\infty$:
$$\underbrace{\frac{x^4}{\sqrt{x}-2}}_{a} \ll \underbrace{\frac{1}{5^x+3}}_{b} \ll \underbrace{\frac{3\cdot 2^x-1}{9^x+2}}_{c} \ll \underbrace{x^3\log(e^x-1)}_{d}$$

5. Dire per quali $a>0$ converge l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{8^x+1}{2^{ax}+x}dx$.

6. Calcolare la velocità (vettore) del punto P che si muove con legge oraria
$$P(t) = \big(2t^2-3;\, t^3/3-4t-1\big)$$
e la distanza percorsa tra l'istante $t=0$ e l'istante $t=1$.

7. Dire per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ la funzione $x(t) := \exp(\lambda t^2)$ risolve l'equazione $\ddot{x} + 3t\dot{x} + 2x = 0$.

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x,y) tali che $2-e^{-x} \le y \le \sqrt{2-x}$.

Prima parte, gruppo 6.

1. Trovare le soluzioni della disequazione $\tan(2x) \le \sqrt{3}$ nell'intervallo $-\pi/2 \le x \le 0$.

2. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico $y = x^2\exp(x^2)$ nel punto di ascissa $x=-1$.

3. Trovare il polinomio di Taylor (in 0) di ordine 6 della funzione $\exp(4x^3-x^6)$.

4. Mettere le seguenti funzioni nell'ordine corretto rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to +\infty$:
$$\underbrace{\frac{\log x}{x^2+1}}_{a} \ll \underbrace{\frac{6^x}{2^x+1}}_{b} \ll \underbrace{e^x - x}_{c} \ll \underbrace{\frac{\sin(2/x)}{x+1}}_{d}$$

5. Dire per quali $a>0$ converge la serie $\displaystyle\sum_1^{+\infty} \frac{n^{2n}+1}{n^a-1}$.

6. Calcolare la velocità (vettore) del punto P che si muove con legge oraria
$$P(t) = \big(t^5/5-9t+1;\, 2t^3-2\big)$$
e la distanza percorsa tra l'istante $t=0$ e l'istante $t=1$.

7. Dire per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ la funzione $x(t) := \exp(\lambda t^2)$ risolve l'equazione $\ddot{x} + t\dot{x} + (3-6t^2)x = 0$.

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x,y) tali che $\arctan(1-x) \le y \le 2\log(x+3)$.

Seconda parte, gruppo 1.

1. Dato $a>0$, consideriamo la funzione
$$f(x) := \log(1+2x^a) - 2\big(\log(1+x)\big)^a$$
a) Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x)$ quando $a=2$.
b) Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x)$ per ogni $a>0$.

2. Sia V il solido ottenuto facendo ruotare un cerchio di raggio 2 attorno ad una retta che dista 1 dal centro del cerchio.
a) Fare un disegno approssimativo di V.
b) Calcolare il volume di V.

3. Per ogni numero reale $a > 0$ indichiamo con T_a il triangolo rettangolo (nel piano cartesiano) di vertici $(0, 0)$, $(1/a^2, 0)$ e $(0, a)$. Indichiamo poi con A l'unione di tutti i triangoli T_a con $a \geq 0$.
   a) Tracciare un disegno approssimativo di A.
   b) Si vede che A è delimitato dagli assi e dal grafico di una funzione g; trovare questa g.
   c) Trovare g nel caso in cui A sia invece l'unione dei triangoli T_a con $a \geq 1$.

Seconda parte, gruppo 2.

1. Dato $a > 0$, consideriamo la funzione
$$f(x) := \log(1 - 2x^a) + 2\big(\log(1 + x)\big)^a$$
   a) Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x)$ quando $a = 2$.
   b) Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x)$ per ogni $a > 0$.

2. Sia V il solido ottenuto facendo ruotare un cerchio di raggio 2 attorno ad una retta che dista $\sqrt{2}$ dal centro del cerchio.
   a) Fare un disegno approssimativo di V.
   b) Calcolare il volume di V.

3. Per ogni numero reale $a > 0$ indichiamo con T_a il triangolo rettangolo (nel piano cartesiano) di vertici $(0, 0)$, $(1/a, 0)$ e $(0, a)$. Indichiamo poi con A l'unione di tutti i triangoli T_a con $a \geq 0$.
   a) Tracciare un disegno approssimativo di A.
   b) Si vede che A è delimitato dagli assi e dal grafico di una funzione g; trovare questa g.
   c) Trovare g nel caso in cui A sia invece l'unione dei triangoli T_a con $a \geq 1$.

Seconda parte, gruppo 3.

1. Dato $a > 0$, consideriamo la funzione
$$f(x) := \log(1 + 4x^a) - 4\big(\log(1 + x)\big)^a$$
   a) Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x)$ quando $a = 2$.
   b) Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x)$ per ogni $a > 0$.

2. Sia V il solido ottenuto facendo ruotare un cerchio di raggio 4 attorno ad una retta che dista 2 dal centro del cerchio.
   a) Fare un disegno approssimativo di V.
   b) Calcolare il volume di V.

3. Per ogni numero reale $a > 0$ indichiamo con T_a il triangolo rettangolo (nel piano cartesiano) di vertici $(0, 0)$, $(2/a, 0)$ e $(0, a)$. Indichiamo poi con A l'unione di tutti i triangoli T_a con $a \geq 0$.
   a) Tracciare un disegno approssimativo di A.
   b) Si vede che A è delimitato dagli assi e dal grafico di una funzione g; trovare questa g.
   c) Trovare g nel caso in cui A sia invece l'unione dei triangoli T_a con $a \geq 1$.

Seconda parte, gruppo 4.

1. Dato $a > 0$, consideriamo la funzione
$$f(x) := \log(1 - 4x^a) + 4\big(\log(1 + x)\big)^a$$
   a) Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x)$ quando $a = 2$.
   b) Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x)$ per ogni $a > 0$.

2. Sia V il solido ottenuto facendo ruotare un cerchio di raggio 4 attorno ad una retta che dista $2\sqrt{2}$ dal centro del cerchio.

   a) Fare un disegno approssimativo di V.

   b) Calcolare il volume di V.

3. Per ogni numero reale $a > 0$ indichiamo con T_a il triangolo rettangolo (nel piano cartesiano) di vertici $(0,0)$, $(2/a^2, 0)$ e $(0, a)$. Indichiamo poi con A l'unione di tutti i triangoli T_a con $a \geq 0$.

   a) Tracciare un disegno approssimativo di A.

   b) Si vede che A è delimitato dagli assi e dal grafico di una funzione g; trovare questa g.

   c) Trovare g nel caso in cui A sia invece l'unione dei triangoli T_a con $a \geq 1$.

Prima parte, gruppo 1.

1. Per ciascuno dei seguenti punti dare le coordinate (polari o cartesiane) che mancano:
   a) $x = -2,\ \ y = 2;$ $\qquad r =$ $\qquad \alpha =$
   b) $x = 0,\ \ y = -3;$ $\qquad r =$ $\qquad \alpha =$
   c) $r = 2\sqrt{3},\ \ \alpha = -2\pi/3;$ $\quad x =$ $\qquad y =$
   Per le coordinate polari indicare un angolo α compreso tra $-\pi$ e π.

2. Trovare i punti di minimo e massimo *assoluti* della funzione $f(x) := \sqrt{x}\log x$ relativamente all'insieme $x \geq 1/2$, specificando quando non esistono.

3. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\arctan(3^x)$; b) $x\,(1+x^2)^{1/2}$; c) $\log\big(x^{2x}\big)$.

4. Dire per quali $a > 0$ vale che $e^x(\sin x - x) \gg \dfrac{x^a}{\log x}$ per $x \to 0$.

5. Calcolare il raggio di convergenza R della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n - 3^n}{(n+2)^n} x^n$.

6. Dire dove è improprio l'integrale $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{(\sin x)^a\,(\cos x)^{2a}}$, e per quali $a > 0$ è finito.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = te^t(1+x^2)$ tale che $x(1) = 1$.

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $e^{-x} \leq y \leq \sqrt[4]{1-x}$.

Prima parte, gruppo 2.

1. Per ciascuno dei seguenti punti dare le coordinate (polari o cartesiane) che mancano:
   a) $x = -\sqrt{3},\ \ y = 3;$ $\qquad r =$ $\qquad \alpha =$
   b) $x = 0,\ \ y = -2;$ $\qquad r =$ $\qquad \alpha =$
   c) $r = \sqrt{2},\ \ \alpha = 3\pi/4;$ $\quad x =$ $\qquad y =$
   Per le coordinate polari indicare un angolo α compreso tra $-\pi$ e π.

2. Trovare i punti di minimo e massimo *assoluti* della funzione $f(x) := \sqrt[3]{x}\log x$ relativamente all'insieme $0 < x \leq 1/2$, specificando quando non esistono.

3. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $x^2(1+x^2)^{1/2}$; b) $\arctan(2^x)$; c) $\log\left(\dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\right)$.

4. Dire per quali $a > 0$ vale che $(e^x - 1)\sin x \gg \dfrac{x^a}{\log x}$ per $x \to 0$.

5. Calcolare il raggio di convergenza R della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)^n}{n+4^n} x^n$.

6. Dire dove è improprio l'integrale $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{(\sin x)^{2a}\,(\cos x)^{a}}$, e per quali $a > 0$ è finito.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = te^t(1+x^2)$ tale che $x(1) = \sqrt{3}$.

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $e^{-x} \leq y \leq \sqrt{2-x}$.

Prima parte, gruppo 3.

1. Per ciascuno dei seguenti punti dare le coordinate (polari o cartesiane) che mancano:

a) $x = -1$, $y = 1$; $r =$ $\alpha =$
b) $x = 0$, $y = 4$; $r =$ $\alpha =$
c) $r = 2$, $\alpha = -2\pi/3$; $x =$ $y =$
Per le coordinate polari indicare un angolo α compreso tra $-\pi$ e π.

2. Trovare i punti di minimo e massimo *assoluti* della funzione $f(x) := \sqrt{x}\log x$ relativamente all'insieme $0 < x \le 1$, specificando quando non esistono.

3. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\arcsin(2^x)$; b) $x^3(1+x^2)^{1/2}$; c) $\log\left(\dfrac{\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[4]{x+1}}\right)$.

4. Dire per quali $a > 0$ vale che $\log(1+x) - x \gg x^a \log x$ per $x \to 0$.

5. Calcolare il raggio di convergenza R della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^4+1}{3-2^n} x^n$.

6. Dire dove è improprio l'integrale $\displaystyle\int_1^{\pi/2} \frac{dx}{(e^x - e)^{4a}(\sin x)^a}$, e per quali $a > 0$ è finito.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = te^t(1+x^2)$ tale che $x(1) = -1$.

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $e^x \le y \le \log(2-x)$.

Prima parte, gruppo 4.

1. Per ciascuno dei seguenti punti dare le coordinate (polari o cartesiane) che mancano:
a) $x = -1$, $y = -\sqrt{3}$; $r =$ $\alpha =$
b) $x = -2$, $y = 0$; $r =$ $\alpha =$
c) $r = 2$, $\alpha = 3\pi/4$; $x =$ $y =$
Per le coordinate polari indicare un angolo α compreso tra $-\pi$ e π.

2. Trovare i punti di minimo e massimo *assoluti* della funzione $f(x) := \sqrt[3]{x}\log x$ relativamente all'insieme $x \ge 1/2$, specificando quando non esistono.

3. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $x(1+x^4)^{1/2}$; b) $\arcsin(3^x)$; c) $\log\left(x^{3x}\right)$.

4. Dire per quali $a > 0$ vale che $e^x(\sin x - x) \ll x^a \log x$ per $x \to 0$.

5. Calcolare il raggio di convergenza R della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1-2^n}{n^5+1} x^n$.

6. Dire dove è improprio l'integrale $\displaystyle\int_1^{\pi/2} \frac{dx}{(e^x - e)^{a}(\sin x)^{4a}}$, e per quali $a > 0$ è finito.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = \dfrac{2t}{e^x(1+t^2)}$ tale che $x(0) = 2$.

8. Risolvere graficamente la disequazione $e^{-x} \le \sqrt{2-x}$.

Prima parte, gruppo 5.

1. Per ciascuno dei seguenti punti dare le coordinate (polari o cartesiane) che mancano:
a) $x = -\sqrt{2}$, $y = \sqrt{2}$; $r =$ $\alpha =$
b) $x = -\sqrt{2}$, $y = 0$; $r =$ $\alpha =$
c) $r = 2$, $\alpha = 5\pi/6$; $x =$ $y =$

Per le coordinate polari indicare un angolo α compreso tra $-\pi$ e π.

2. Trovare i punti di minimo e massimo *assoluti* della funzione $f(x) := \sqrt{x}\,\log x$ relativamente all'insieme $0 < x \le 1/2$, specificando quando non esistono.

3. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\arccos(2^x)$; b) $x^2(1+x^4)^{1/2}$; c) $\log\left(\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right)$.

4. Dire per quali $a > 0$ vale che $(e^x - 1)\sin x \ll x^a \log x$ per $x \to 0$.

5. Calcolare il raggio di convergenza R della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n - 4^n}{5^n + 4^n} x^n$.

6. Dire dove è improprio l'integrale $\displaystyle\int_1^e \frac{dx}{x^a (\log x)^{3a}}$, e per quali $a > 0$ è finito.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = \dfrac{2t}{e^x(1+t^2)}$ tale che $x(0) = 3$.

8. Risolvere graficamente la disequazione $e^x \le \log(2 - x)$.

Prima parte, gruppo 6.

1. Per ciascuno dei seguenti punti dare le coordinate (polari o cartesiane) che mancano:
   a) $x = -\sqrt{3}$, $y = 1$; $r =$ $\alpha =$
   b) $x = -3$, $y = 0$; $r =$ $\alpha =$
   c) $r = 2\sqrt{2}$, $\alpha = 3\pi/4$; $x =$ $y =$
   Per le coordinate polari indicare un angolo α compreso tra $-\pi$ e π.

2. Trovare i punti di minimo e massimo *assoluti* della funzione $f(x) := \sqrt[3]{x}\,\log x$ relativamente all'insieme $0 < x \le 1$, specificando quando non esistono.

3. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $x^3(1+x^4)^{1/2}$; b) $\arccos(3^x)$; c) $\log\left(\dfrac{\sqrt[4]{x+1}}{\sqrt[5]{x+1}}\right)$.

4. Dire per quali $a > 0$ vale che $\log(1+x) - x \ll \dfrac{x^a}{\log x}$ per $x \to 0$.

5. Calcolare il raggio di convergenza R della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n - 5^n}{4^n + 2^n} x^n$.

6. Dire dove è improprio l'integrale $\displaystyle\int_1^e \frac{dx}{x^{3a} (\log x)^{a}}$, e per quali $a > 0$ è finito.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = \dfrac{2t}{e^x(1+t^2)}$ tale che $x(0) = 1$.

8. Risolvere graficamente la disequazione $e^{-x} \le \sqrt[4]{1 - x}$.

Seconda parte, gruppo 1.

1. a) Disegnare il grafico $y = \log\log x$.
   b) Dire se è vero che $\log\log x \le \sqrt{\log x}$ per ogni $x > 1$.
   c) Dire per quali $a > 0$ vale che $\log\log x \le a\sqrt{\log x}$ per ogni $x > 1$.

2. a) Disegnare il grafico della funzione
$$f(x) := \frac{2x^4 - x^2 + 1}{2x^2 - 2}$$
b) Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $f(x) \geq y \geq x^2 + \frac{1}{2}$.
c) Dire se A ha area finita oppure no.

3. Discutere al variare di $a \in \mathbb{R}$ il comportamento della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \big[(1+n)^{n^a} - 1\big]$.

SECONDA PARTE, GRUPPO 2.

1. a) Disegnare il grafico $y = \log\log x$.
b) Dire se è vero che $\log\log x \leq \sqrt[3]{\log x}$ per ogni $x > 1$.
c) Dire per quali $a > 0$ vale che $\log\log x \leq a\sqrt[3]{\log x}$ per ogni $x > 1$.

2. a) Disegnare il grafico della funzione
$$f(x) := \frac{4x^4 + 3x^2 + 3}{4x^2 - 1}$$
b) Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $f(x) \geq y \geq x^2 + 1$.
c) Dire se A ha area finita oppure no.

3. Discutere al variare di $a \in \mathbb{R}$ il comportamento della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \big[(1+n)^{n^a} - 1\big]$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 1.

1. Trovare $\alpha \in [0, 2\pi)$ per cui vale l'identità trigonometrica $\sin(x - \pi/3) = \cos(x + \alpha)$.

2. Trovare il polinomio di Taylor (in 0) di ordine 4 della funzione $f(x) := (2 + x^4)\, \sqrt[4]{1 + 4x^2}$.

3. Mettere le seguenti funzioni nell'ordine corretto rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to +\infty$:
$$\underbrace{\frac{12^x}{2^x + x}}_{a} \ll \underbrace{\frac{x - x^4}{x + 1}}_{b} \ll \underbrace{\frac{x + x^3}{\log x}}_{c} \ll \underbrace{xe^{2x}}_{d}$$

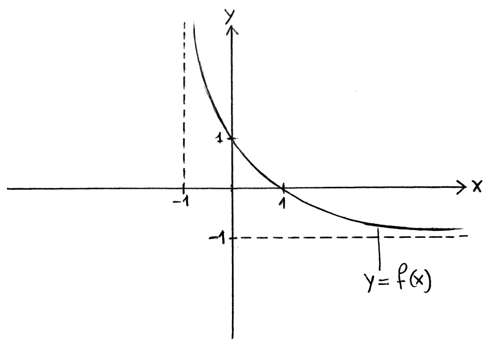
4. Consideriamo un punto P che si muove con la legge oraria $P(t) := \big(1 + e^{-2t}\cos t,\, 5 - e^{-2t}\sin t\big)$. Calcolare il vettore velocità di P e la distanza percorsa tra l'istante $t = 0$ e $t = +\infty$.

5. Calcolare la derivata della funzione $f(x) := \displaystyle\int_1^{\arcsin x} (\sin t)^4\, dt$.

6. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ l'integrale $\displaystyle\int_1^a \frac{dx}{\cos x}$ non è improprio.

7. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{1/n}}{n^{2a} + n^{3a}}$ converge ad un numero finito.

8. Partendo dal grafico $y = f(x)$ riportato sotto, disegnare il grafico $y = 1 - f(|x|)$ e l'insieme A dei punti (x, y) tali che $1 - f(|x|) \le y \le 1 - x^2$.



PRIMA PARTE, GRUPPO 2.

1. Trovare $\alpha \in [0, 2\pi)$ per cui vale l'identità trigonometrica $\sin(x - \pi/4) = \cos(x + \alpha)$.

2. Trovare il polinomio di Taylor (in 0) di ordine 6 della funzione $f(x) := (3 + x^4)\, \log(1 + 2x^2)$.

3. Mettere le seguenti funzioni nell'ordine corretto rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to +\infty$:
$$\underbrace{\frac{e^{2x}}{x^3}}_{a} \ll \underbrace{\frac{x + x^3}{\sin(1/x)}}_{b} \ll \underbrace{\frac{9^x}{x^4 + 1}}_{c} \ll \underbrace{\frac{2x^4}{\log x}}_{d}$$

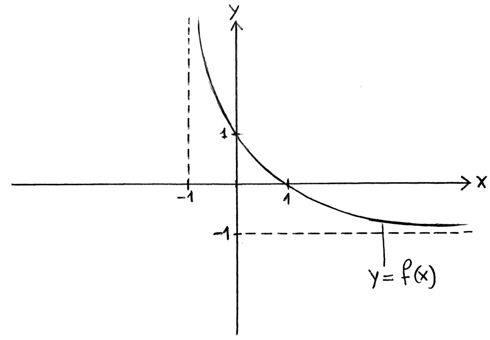
4. Consideriamo un punto P che si muove con la legge oraria $P(t) := \big(2 + e^{-3t}\cos t,\, 2 + e^{-3t}\sin t\big)$. Calcolare il vettore velocità di P e la distanza percorsa tra l'istante $t = 0$ e $t = +\infty$.

5. Calcolare la derivata della funzione $f(x) := \displaystyle\int_1^{\arctan x} (\tan t)^4\, dt$.

6. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ l'integrale $\displaystyle\int_2^a \frac{dx}{\cos x}$ non è improprio.

7. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{1/n} - 1}{n^{2a} + n^{4a}}$ converge ad un numero finito.

8. Partendo dal grafico $y = f(x)$ riportato sotto, disegnare il grafico $y = 2f(|x|)$ e l'insieme A dei punti (x, y) tali che $f(x) \le y \le 2f(|x|)$.



Prima parte, gruppo 3.

1. Trovare $\alpha \in [0, 2\pi)$ per cui vale l'identità trigonometrica $\sin(x + \pi/3) = \cos(x + \alpha)$.

2. Trovare il polinomio di Taylor (in 0) di ordine 4 della funzione $f(x) := (2 - x^4)\,\sqrt[3]{1 + 3x^2}$.

3. Mettere le seguenti funzioni nell'ordine corretto rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to +\infty$:

$$\underbrace{\frac{12^x}{2^x + x}}_{a} \ll \underbrace{\frac{9^x}{x^4 + 1}}_{b} \ll \underbrace{xe^{2x}}_{c} \ll \underbrace{x^3 - 1}_{d}$$

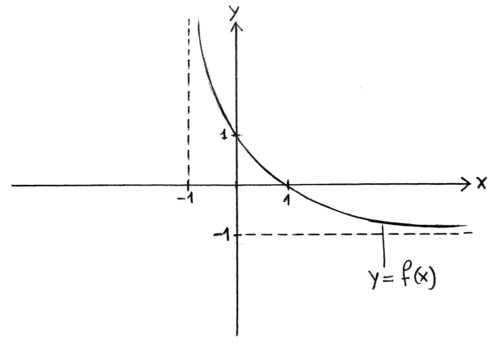
4. Consideriamo un punto P che si muove con la legge oraria $P(t) := \big(1 - 2e^{-2t}\cos t,\, 3 + 2e^{-2t}\sin t\big)$. Calcolare il vettore velocità di P e la distanza percorsa tra l'istante $t = 0$ e $t = +\infty$.

5. Calcolare la derivata della funzione $f(x) := \displaystyle\int_1^{\arccos x} (\cos t)^4 \, dt$.

6. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ l'integrale $\displaystyle\int_{-2}^{a} \frac{dx}{\cos x}$ non è improprio.

7. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n - 1}{n^a + n^{2a}}$ converge ad un numero finito.

8. Partendo dal grafico $y = f(x)$ riportato sotto, disegnare il grafico $y = |f(x + 1)|$ e l'insieme A dei punti (x, y) tali che $f(x) \le y \le |f(x + 1)|$.



PRIMA PARTE, GRUPPO 4.

1. Trovare $\alpha \in [0, 2\pi)$ per cui vale l'identità trigonometrica $\cos(x + 2\pi/3) = \sin(x - \alpha)$.

2. Trovare il polinomio di Taylor (in 0) di ordine 6 della funzione $f(x) := (2 - x^6)\,\sqrt[4]{1 + 4x^3}$.

3. Mettere le seguenti funzioni nell'ordine corretto rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to +\infty$:
$$\underbrace{\frac{2^x + x}{12^x}}_{a} \ll \underbrace{\frac{x - x^4}{x + 1}}_{b} \ll \underbrace{xe^{-2x}}_{c} \ll \underbrace{\frac{x + x^3}{\log x}}_{d}$$

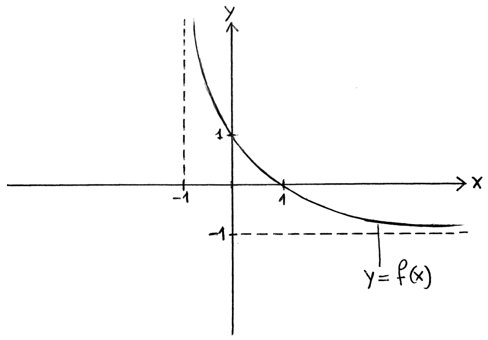
4. Consideriamo un punto P che si muove con la legge oraria $P(t) := \big(1 + 3e^{-3t}\cos t,\ 1 - 3e^{-3t}\sin t\big)$. Calcolare il vettore velocità di P e la distanza percorsa tra l'istante $t = 0$ e $t = +\infty$.

5. Calcolare la derivata della funzione $f(x) := \displaystyle\int_0^{\arcsin x} (\sin t)^5\,dt$.

6. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ l'integrale $\displaystyle\int_1^a \frac{dx}{\sin x}$ non è improprio.

7. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{-2a} + n^{-3a}}{e^{1/n^2} - 1}$ converge ad un numero finito.

8. Partendo dal grafico $y = f(x)$ riportato sotto, disegnare il grafico $y = 1 - f(1 - x)$ e l'insieme A dei punti (x, y) tali che $f(x) \leq y \leq 1 - f(1 - x)$.



PRIMA PARTE, GRUPPO 5.

1. Trovare $\alpha \in [0, 2\pi)$ per cui vale l'identità trigonometrica $\cos(x + 3\pi/4) = \sin(x - \alpha)$.

2. Trovare il polinomio di Taylor (in 0) di ordine 9 della funzione $f(x) := (3 - x^6)\,\log(1 + 2x^3)$.

3. Mettere le seguenti funzioni nell'ordine corretto rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to +\infty$:
$$\underbrace{\frac{x^3}{e^{2x}}}_{a} \ll \underbrace{\frac{2x^4}{\log x}}_{b} \ll \underbrace{\frac{x + x^3}{\sin(1/x)}}_{c} \ll \underbrace{\frac{x^4 + 1}{9^x}}_{d}$$

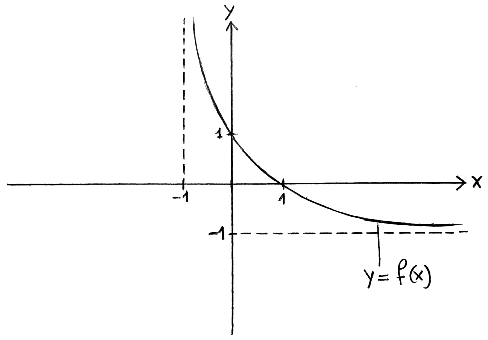
4. Consideriamo un punto P che si muove con la legge oraria $P(t) := \big(5 - e^{-2t}\sin t,\ 3 - e^{-2t}\cos t\big)$. Calcolare il vettore velocità di P e la distanza percorsa tra l'istante $t = 0$ e $t = +\infty$.

5. Calcolare la derivata della funzione $f(x) := \displaystyle\int_0^{\arctan x} (\tan t)^5\,dt$.

6. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ l'integrale $\displaystyle\int_4^a \frac{dx}{\sin x}$ non è improprio.

7. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{-2a} + n^{-4a}}{n^a + n^{4a}}$ converge ad un numero finito.

8. Partendo dal grafico $y = f(x)$ riportato sotto, disegnare il grafico $y = 2f(|x|)$ e l'insieme A dei punti (x, y) tali che $x^4 - 1 \leq y \leq 2f(|x|)$.



Prima parte, gruppo 6.

1. Trovare $\alpha \in [0, 2\pi)$ per cui vale l'identità trigonometrica $\cos(x + 5\pi/4) = \sin(x - \alpha)$.

2. Trovare il polinomio di Taylor (in 0) di ordine 6 della funzione $f(x) := (2 + x^6)\,\sqrt[3]{1 + 3x^3}$.

3. Mettere le seguenti funzioni nell'ordine corretto rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to +\infty$:

$$\underbrace{\frac{2^x + x}{12^x}}_{a} \ll \underbrace{\frac{x^4 + 1}{9^x}}_{b} \ll \underbrace{\frac{x}{e^{2x}}}_{c} \ll \underbrace{x^3 - 1}_{d}$$

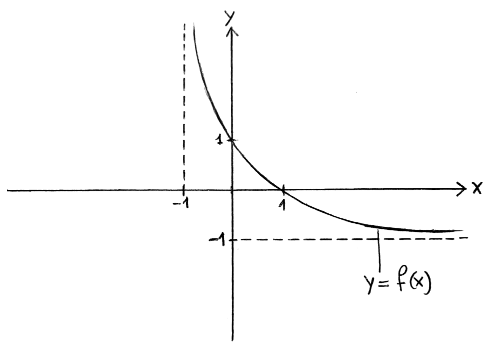
4. Consideriamo un punto P che si muove con la legge oraria $P(t) := \big(4 - e^{-3t} \sin t,\, 2 - e^{-3t} \cos t\big)$. Calcolare il vettore velocità di P e la distanza percorsa tra l'istante $t = 0$ e $t = +\infty$.

5. Calcolare la derivata della funzione $f(x) := \displaystyle\int_0^{\arccos x} (\cos t)^5 \, dt$.

6. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ l'integrale $\displaystyle\int_{-2}^{a} \frac{dx}{\sin x}$ non è improprio.

7. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{-a} + n^{-2a}}{e^n - 1}$ converge ad un numero finito.

8. Partendo dal grafico $y = f(x)$ riportato sotto, disegnare il grafico $y = |f(x + 1)|$ e l'insieme A dei punti (x, y) tali che $y \geq f(x)$ e $y \geq |f(x + 1)|$.



Seconda parte, gruppo 1.

1. Dato $a \in \mathbb{R}$ consideriamo l'equazione differenziale
$$\ddot{x} - 2a\dot{x} + (a^2 - a + 1)x = \sin t + 2 \qquad (*)$$
a) Trovare la soluzione generale di (*) per $a \neq 0$.
b) Trovare la soluzione generale di (*) per $a = 0$.
c) Dire per quali valori di a esistono soluzioni asintoticamente equivalenti a e^{3t} per $t \to +\infty$, e specificare quante sono.

2. a) Disegnare il grafico della funzione $f(x) := x^2 \log x$.
b) Detto P_x il punto del grafico di f di ascissa x, dire per quali x il punto P_x è "direttamente visibile" dall'origine degli assi O, vale a dire che il segmento che congiunge O a P non interseca il grafico di f se non agli estremi.

3. Consideriamo la funzione
$$f(x) := \log\left(x^4 - 1 + \frac{16}{x^2}\right).$$
a) Disegnare il grafico di f.
b) Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $f(x) \leq y \leq 4 \log x$.
c) Dire se l'area di A è finita oppure no.

Seconda parte, gruppo 2.

1. Dato $a \in \mathbb{R}$ consideriamo l'equazione differenziale
$$\ddot{x} - 4a\dot{x} + (4a^2 - a + 1)x = \cos t + 1 \qquad (*)$$
a) Trovare la soluzione generale di (*) per $a \neq 0$.
b) Trovare la soluzione generale di (*) per $a = 0$.
c) Dire per quali valori di a esistono soluzioni asintoticamente equivalenti a e^{3t} per $t \to +\infty$, e specificare quante sono.

2. a) Disegnare il grafico della funzione $f(x) := x^{1/2} \log x$.
b) Detto P_x il punto del grafico di f di ascissa x, dire per quali x il punto P_x è "direttamente visibile" dall'origine degli assi O, vale a dire che il segmento che congiunge O a P non interseca il grafico di f se non agli estremi.

3. Consideriamo la funzione
$$f(x) := \log\left(x^4 - 1 + \frac{16}{x^2}\right).$$
a) Disegnare il grafico di f.
b) Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $f(x) \leq y \leq 4 \log x$.
c) Dire se l'area di A è finita oppure no.

Prima parte, gruppo 1.

1. Determinare tutti i punti di massimo e di minimo *assoluti* della funzione $f(x) := (x^2 - 3)e^{-x}$ relativamente alla semiretta $x \geq 0$, specificando quando non esistono.

2. Sia T la retta tangente al grafico $y = \exp(-x^2/2)$ nel punto di ascissa $x = -2$.
   a) Trovare l'equazione di T.
   b) Calcolare l'area del triangolo delimitato dagli assi cartesiani e dalla retta T.

3. Dire per quali $a > 0$ vale che $2^x = o(e^{ax})$ per $x \to +\infty$.

4. Trovare la parte principale per $x \to +\infty$ della funzione $f(x) := (3x^2 - 2)\sin\Big(\dfrac{2}{x}\Big) - 6x$.

5. Calcolare il valore dell'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^2}{1 + x^6}\, dx$.

6. Dire per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2 + (-2)^n}{2^n - 4^n} x^n$ converge ad un numero finito.

7. Trovare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $\ddot{x} + 4\dot{x} + 5x = 0$ che soddisfano la condizione iniziale $x(0) = -1$.

8. Risolvere graficamente la disequazione $4 - x^2 \leq \sqrt{1 - x}$.

Prima parte, gruppo 2.

1. Determinare tutti i punti di massimo e di minimo *assoluti* della funzione $f(x) := (x^2 - 8)e^{-x}$ relativamente alla semiretta $x \geq -3$, specificando quando non esistono.

2. Sia T la retta tangente al grafico $y = \exp(-x^2/2)$ nel punto di ascissa $x = -4$.
   a) Trovare l'equazione di T.
   b) Calcolare l'area del triangolo delimitato dagli assi cartesiani e dalla retta T.

3. Dire per quali $a > 0$ vale che $\log(1 + x^2) = O(\log^a x)$ per $x \to +\infty$.

4. Trovare la parte principale per $x \to +\infty$ della funzione $f(x) := (x + 2)\log\Big(1 + \dfrac{2}{x}\Big) - 2$.

5. Calcolare il valore dell'integrale improprio $\displaystyle\int_2^{+\infty} xe^{-x^2}\, dx$.

6. Dire per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 + n^n}{1 + (-n)^{2n}} x^n$ converge ad un numero finito.

7. Trovare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $\ddot{x} - 2\dot{x} + 5x = 0$ che soddisfano la condizione iniziale $x(0) = -1$.

8. Risolvere graficamente la disequazione $\sqrt{3 - x} \leq 4 - x^2$.

Prima parte, gruppo 3.

1. Determinare tutti i punti di massimo e di minimo *assoluti* della funzione $f(x) := (x^2 - 3)e^{-x}$ relativamente alla semiretta $x \leq 4$, specificando quando non esistono.

2. Sia T la retta tangente al grafico $y = \exp(-x^2/2)$ nel punto di ascissa $x = 2$.
   a) Trovare l'equazione di T.
   b) Calcolare l'area del triangolo delimitato dagli assi cartesiani e dalla retta T.
3. Dire per quali $a > 0$ vale che $x^2 + x^{2a} \ll x^a$ per $x \to 0$.
4. Trovare la parte principale per $x \to +\infty$ della funzione $f(x) := (3x^2 - 1) \sin\Big(\dfrac{2}{x}\Big) - 6x$.
5. Calcolare il valore dell'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} xe^{-x} dx$.
6. Dire per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n - 2^n}{1 + (-n)^n} x^n$ converge ad un numero finito.
7. Trovare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $\ddot{x} - 4\dot{x} + 5x = 0$ che soddisfano la condizione iniziale $x(0) = 1$.
8. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $4 - x^2 \le y \le \sqrt{1 - x}$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 4.

1. Determinare tutti i punti di massimo e di minimo *assoluti* della funzione $f(x) := (x^2 - 8)e^{-x}$ relativamente alla semiretta $x \le 2$, specificando quando non esistono.
2. Sia T la retta tangente al grafico $y = \exp(-x^2/2)$ nel punto di ascissa $x = 4$.
   a) Trovare l'equazione di T.
   b) Calcolare l'area del triangolo delimitato dagli assi cartesiani e dalla retta T.
3. Dire per quali $a > 0$ vale che $1/x^2 \ll e^{ax}$ per $x \to -\infty$.
4. Trovare la parte principale per $x \to +\infty$ della funzione $f(x) := = (x - 1) \log\Big(1 + \dfrac{2}{x}\Big) - 2$.
5. Calcolare il valore dell'integrale improprio $\displaystyle\int_{-\infty}^{2} xe^{-x^2} dx$.
6. Dire per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n - 4^n}{1 + (-2)^n} x^n$ converge ad un numero finito.
7. Trovare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = 0$ che soddisfano la condizione iniziale $x(0) = 1$.
8. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $\sqrt{3 - x} \le y \le 4 - x^2$.

SECONDA PARTE.

1. Consideriamo l'insieme A dei punti (x, y) tali che $0 \le y \le f(x)$, dove
$$f(x) := (x - 1)\, e^{-x} .$$
   a) Disegnare il grafico di f e l'insieme A.
   b) Calcolare il volume del solido V ottenuto ruotando A attorno all'asse delle x.
   c) Calcolare il volume del solido V' ottenuto ruotando A attorno alla retta di equazione $x = 1$.

2. Dato $a > 0$ consideriamo la funzione
$$f(x) := \frac{1}{(a+x^2)^2}\,.$$
   a) Disegnare il grafico di f per $a = 1$.
   b) Trovare il punto del grafico di f più vicino all'origine per $a = 1$.
   c) Trovare il punto del grafico di f più vicino all'origine per ogni $a > 0$.

3. Determinare il comportamento dell'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left[\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}} - e^2\right] dx$

SOLUZIONI

PRIMA PARTE, GRUPPO 1.

1. a) $r = 2\sqrt{2}$; $\alpha = \dfrac{3\pi}{4}$; b) $r = 4$; $\alpha = -\dfrac{\pi}{2}$; c) $x = \sqrt{3}$; $y = -3$.

2. L'insieme delle soluzioni è $\Big[0, \dfrac{\pi}{4}\Big) \cup \Big[\dfrac{3\pi}{8}, \dfrac{\pi}{2}\Big]$.

3. a) $+\infty$; b) non esiste; c) 2.

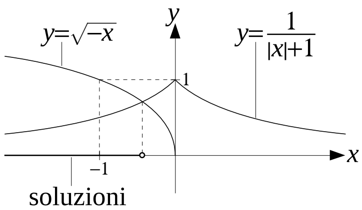
4. a) $\dfrac{2e^{2x}}{1+e^{4x}}$; b) $\dfrac{x^4+12\,x^2}{(x^2+4)^2}$ c) $\log 3 \cdot 3^{x-5} = \dfrac{\log 3}{243}\, 3^x$.

5. Il punto di massimo è $x = -2$; il punto di minimo non esiste.

6. L'ordine corretto è $c \ll b \ll d \ll a$.

7. $f(x) = 1 + 4x^2 + 6x^4 + O(x^6)$.

8.



PRIMA PARTE, GRUPPO 2.

1. a) $r = 2\sqrt{3}$; $\alpha = \dfrac{5\pi}{6}$; b) $r = 2$; $\alpha = \pi$; c) $x = 2$; $y = -2$.

2. L'insieme delle soluzioni è $\Big(-\dfrac{\pi}{4}, -\dfrac{\pi}{8}\Big]$.

3. a) 0; b) 1; c) -2.

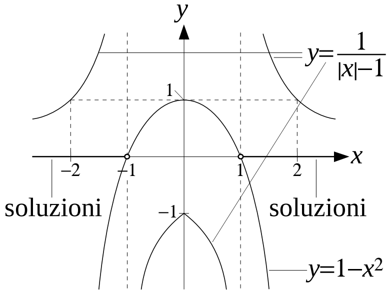
4. a) $\dfrac{\log 2 \cdot 2^x}{1+2^{2x}}$; b) $\dfrac{12\,x^2 - 2x^7}{(x^5+4)^2}$; c) 0.

5. Il punto di massimo è $x = 0$; il punto di minimo non esiste.

6. L'ordine corretto è $c \ll b \ll a \ll d$.

7. $f(x) = 6x - 3x^3 + O(x^5)$.

8.



PRIMA PARTE, GRUPPO 3.

1. a) $r = 2\sqrt{3}$; $\alpha = -\dfrac{2\pi}{3}$; b) $r = 2$; $\alpha = -\dfrac{\pi}{2}$; c) $x = -1$; $y = \sqrt{3}$.

2. L'insieme delle soluzioni è $\left[0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$.

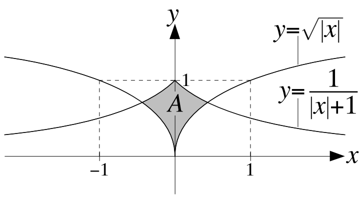
3. a) $+\infty$; b) $-\infty$; c) 6.

4. a) $\dfrac{4x^3}{1+x^8}$ b) $\dfrac{12\,x - 5x^8}{(x^7+6)^2}$ c) $\log 2 \cdot 2^{x-3} = \dfrac{\log 2}{8}\, 2^x$.

5. Il punto di massimo non esiste; il punto di minimo è $x = 0$.

6. L'ordine corretto è $a \ll d \ll b \ll c$.

7. $f(x) = 2x^2 - 3x^4 + O(x^6)$.

8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 4.

1. a) $r = 2$; $\alpha = \dfrac{3\pi}{4}$; b) $r = 2$; $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$; c) $x = -2$; $y = 2$.

2. L'insieme delle soluzioni è $\left(-\frac{3\pi}{4}, -\frac{2\pi}{3}\right] \cup \left(-\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{6}\right] \cup \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$.

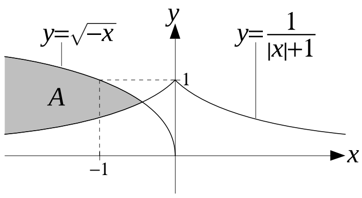
3. a) 0; b) non esiste; c) 0.

4. a) $\dfrac{4x^3}{\sqrt{1-x^8}}$; b) $\dfrac{16\,x^3}{(x^4+4)^2}$ c) $-\log 2 \cdot 2^{-x} = -\dfrac{\log 2}{2^x}$.

5. Il punto di massimo è $x = 0$; il punto di minimo non esiste.

6. L'ordine corretto è $d \ll a \ll b \ll c$.

7. $f(x) = 6x^2 - 3x^6 + O(x^{10})$.

8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 5.

1. a) $r = \sqrt{6}$; $\alpha = -\dfrac{3\pi}{4}$; b) $r = 1$; $\alpha = -\dfrac{\pi}{2}$; c) $x = -3$; $y = \sqrt{3}$.

2. L'insieme delle soluzioni è $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right]$.

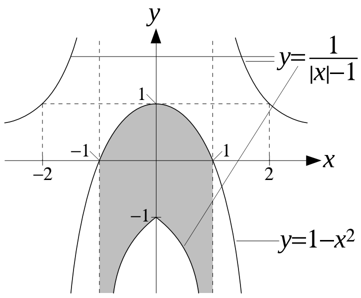
3. a) 0; b) non esiste; c) 1.

4. a) $\dfrac{\log 2 \cdot 2^x}{\sqrt{1-2^{2x}}}$; b) $\dfrac{2x^7 + 15\,x^4}{(x^3+3)^2}$ c) $-\log 2 \cdot 2^{-x+3} = -\dfrac{8\log 2}{2^x}$.

5. Il punto di massimo è $x = 1$; il punto di minimo è $x = 0$.

6. L'ordine corretto è $c \ll b \ll d \ll a$.

7. $f(x) = 2x - 3x^2 + O(x^3)$.

8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 6.

1. a) $r = 4$; $\alpha = \dfrac{2\pi}{3}$; b) $r = 2$; $\alpha = \pi$; c) $x = -1$; $y = 1$.

2. L'insieme delle soluzioni è $\Big[-1, -\dfrac{1}{2}\Big) \cup \Big[-\dfrac{1}{4}, 0\Big]$.

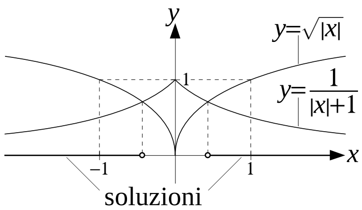
3. a) $-\infty$; b) 0; c) non esiste.

4. a) $\dfrac{2e^{2x}}{\sqrt{1-e^{4x}}}$; b) $\dfrac{5x^8 + 14\,x^6}{(x^2+2)^2}$ c) 0.

5. Il punto di massimo è $x = -1$; il punto di minimo non esiste.

6. L'ordine corretto è $a \ll d \ll b \ll c$.

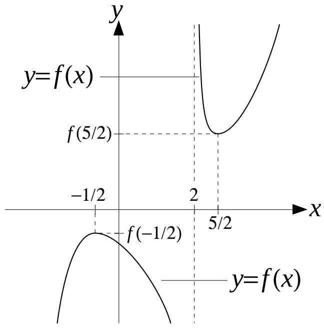
7. $f(x) = 1 + 4x + 6x^2 + O(x^3)$.

8. 

SECONDA PARTE, GRUPPO 1.

1. Riscrivo l'equazione in questione nella forma
$$f(x) = a \quad \text{con} \quad f(x) := (x-2)^{-5} \exp(2x^2)\,.$$
Per determinare il numero di soluzioni dell'equazione devo quindi disegnare il grafico della funzione $f(x)$.
A questo scopo osservo che $f(x)$ è definita per ogni $x \neq 2$, è positiva per $x > 2$ e negativa per $x < 2$, tende a $-\infty$ per $x \to -\infty$ e per $x \to 2^-$, tende a $+\infty$ per $x \to +\infty$ e per $x \to 2^+$. Inoltre, studiando il segno della derivata prima
$$f'(x) = (4x^2 - 8x - 5)(x-2)^{-6} \exp(2x^2)\,,$$
ottengo che la funzione cresce negli intervalli $(-\infty, -1/2]$ e $[5/2, +\infty)$, e decresce negli intervalli $[-1/2, 2)$ e $(2, 5/2]$; in particolare $x = -1/2$ è un a punti di massimo locale con
$$f(-1/2) = -(2/5)^5 e^{1/2} \simeq -1{,}69 \cdot 10^{-2}\,,$$
mentre $x = 5/2$ è un punto di minimo locale con
$$f(5/2) = 2^5 e^{25/2} \simeq 8{,}59 \cdot 10^6\,.$$

Usando questi dati traccio il grafico $y = f(x)$ (nel farlo non rispetto le proporzioni):



Dal grafico ottengo il seguente schema per le soluzioni dell'equazione $f(x) = a$:
- per $a < f(-1/2)$ ci sono due soluzioni;
- per $a = f(-1/2)$ c'è una soluzione ($x = -1/2$);
- per $f(-1/2) < a < f(5/2)$ non ci sono soluzioni;
- per $a = f(5/2)$ c'è una soluzione ($x = 5/2$);
- per $a > f(5/2)$ ci sono due soluzioni.

2. a) Osservo come prima cosa che

$$f(x) := \log\big(\sin(x^3)\big) - 3\log x = \log\Big(\frac{\sin(x^3)}{x^3}\Big)\,.$$

Usando lo sviluppo di Taylor $\sin t = t - \frac{1}{6}t^3 + O(t^5)$ con $t = x^3$ ottengo quindi

$$f(x) = \log\Big(1 - \frac{x^6}{6} + O(x^{12})\Big)\,,$$

e usando il cambio di variabile $t = -\frac{1}{6}x^6 + O(x^{12})$ e lo sviluppo $\log(1+t) \sim t$

$$f(x) = \log(1+t) \sim t = -\frac{x^6}{6} + O(x^{12}) \sim -\frac{x^6}{6}\,.$$

In conclusione la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0$ è $-\frac{1}{6}x^6$.

b) Per quanto visto al punto precedente,

$$\text{p.p.}(f(x)) = \Big(a - \frac{1}{6}\Big)\,x^6 \quad \text{per ogni } a \neq \frac{1}{6}.$$

Nel caso $a = 1/6$ ho bisogno di uno sviluppo più preciso di $f(x)$.
Usando lo sviluppo di Taylor $\sin t = t - \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{120}t^5 + O(t^7)$ con $t = x^3$ ottengo

$$f(x) = \log\Big(1 - \frac{x^6}{6} + \frac{x^{12}}{120} + O(x^{18})\Big)\,,$$

e usando il cambio di variabile $t = -\frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{120}x^{12} + O(x^{18})$ e lo sviluppo $\log(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + O(t^3)$

$$\begin{aligned}
f(x) &= \log(1+t)\\
&= t - \frac{1}{2}t^2 + O(t^3)\\
&= \Big[-\frac{x^6}{6} + \frac{x^{12}}{120} + O(x^{18})\Big] - \frac{1}{2}\Big[-\frac{x^6}{6} + O(x^{12})\Big]^2 + O\Big[\Big(-\frac{x^6}{6}\Big)^3\Big]\\
&= \Big[-\frac{x^6}{6} + \frac{x^{12}}{120} + O(x^{18})\Big] - \frac{1}{2}\Big[\frac{x^{12}}{36} + O(x^{18}) + O(x^{24})\Big] + O(x^{18})\\
&= -\frac{x^6}{6} - \frac{x^{12}}{180} + O(x^{18})\,.
\end{aligned}$$

Quindi

$$f(x) + \frac{x^6}{6} = -\frac{x^{12}}{180} + O(x^{18}) \sim -\frac{x^{12}}{180}\,.$$

3. Per ogni $a \geq 0$ indico con T_a il triangolo delimitato dagli assi cartesiani e dalla retta tangente al grafico di $f(x) := e^{-x}$ nel punto di ascissa a.
Usando il fatto che la retta in questione ha equazione

$$y = f'(a)\,(x-a) + f(a) = e^{-a}(1+a-x)$$

ottengo subito che l'intersezione con l'asse delle y, vale a dire l'altezza di T_a, è $y = e^{-a}(1+a)$, mentre l'intersezione con l'asse delle x, vale a dire la base di T_a, è $x = 1+a$. Ne segue che l'area di T_a è data dalla funzione

$$g(a) := \frac{1}{2}(1+a)^2 e^{-a}\,.$$

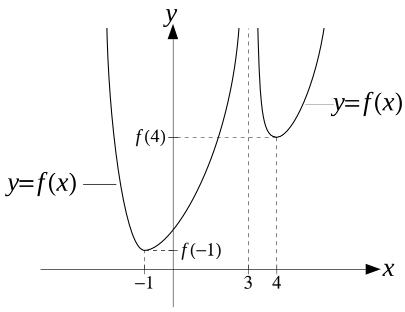
Cerco ora i punti di massimo e minimo assoluto della funzione $g(a)$ relativamente alla semiretta $a \geq 0$. Per farlo confronto i valori di g per $a = 0$, $a = +\infty$, e per gli $a \geq 0$ dove si annulla la derivata

$$g'(a) = \frac{1}{2}(1-a^2)e^{-a}\,,$$

vale a dire $a = 1$.
Poiché $g(0) = 1/2$, $g(1) = 2/e$ e $g(+\infty) = 0$, concludo che $a = 1$ è il punto di massimo assoluto di g, e il valore massimo è $g(1) = 2/e$, mentre non ci sono punti di minimo assoluto, e l'estremo inferiore dei valori di g è 0 ("raggiunto" per $a \to +\infty$).
In altre parole, il triangolo di area massima è T_1, mentre quello di area minima non esiste.

SECONDA PARTE, GRUPPO 2.

1. Riscrivo l'equazione in questione nella forma $f(x) = a$ con $f(x) := (x-3)^{-16}\exp(2x^2)$ e disegno il grafico $y = f(x)$. A questo scopo osservo che $f(x)$ è definita per ogni $x \neq 3$, è sempre positiva, e tende a $+\infty$ per $x \to \pm\infty$ e per $x \to 2$.
Inoltre, studiando il segno della derivata prima $f'(x) = (4x^2 - 12\,x - 16)(x-3)^{-17}\exp(2x^2)$ ottengo che la funzione decresce negli intervalli $(-\infty, -1]$ e $(3, 4]$, e cresce negli intervalli $[-1, 3)$ e $[4, +\infty)$. In particolare $x = -1$ e $x = 4$ sono punti di minimo locale con $f(-1) = e^2/2^{32} = 1{,}72 \cdot 10^{-9}$ e $f(4) = e^{32} = 7{,}89 \cdot 10^{13}$.
Usando questi dati traccio il grafico $y = f(x)$:



Dal grafico ottengo il seguente schema per le soluzioni dell'equazione $f(x) = a$:
- per $a < f(-1)$ non ci sono soluzioni;
- per $a = f(-1)$ c'è una soluzione ($x = -1$);
- per $f(-1) < a < f(4)$ ci sono due soluzioni;
- per $a = f(4)$ ci sono tre soluzioni (tra cui $x = 4$);
- per $a > f(4)$ ci sono quattro soluzioni.

2. Analogo al gruppo 1: a) $\text{p.p.}(f(x)) = -\frac{1}{6}x^4$; b) $\text{p.p.}(f(x) + ax^4) = \begin{cases} (a-\frac{1}{6})x^4 & \text{per } a \neq \frac{1}{6}, \\ -\frac{1}{180}x^8 & \text{per } a = \frac{1}{6}. \end{cases}$

3. Uguale al gruppo 1.

SECONDA PARTE, GRUPPO 3.

1. Riscrivo l'equazione come $f(x) = a$ con $f(x) := (x-2)^{-12}\exp(2x^2)$. Il grafico di f è simile a quello del gruppo 2, con la differenza che l'asintoto verticale è in $x = 2$ e i punti di minimo locale sono $x = -1$ e $x = 3$. Dal grafico di f ottengo che
   - per $a < f(-1)$ non ci sono soluzioni;
   - per $a = f(-1)$ c'è una soluzione ($x = -1$);
   - per $f(-1) < a < f(3)$ ci sono due soluzioni;
   - per $a = f(3)$ ci sono tre soluzioni (tra cui $x = 3$);
   - per $a > f(3)$ ci sono quattro soluzioni.

2. a) Osservo che
$$f(x) = \log\Big(\frac{\exp(x^2)-1}{x^2}\Big)$$
e procedo come per il gruppo 1, usando gli sviluppi $e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + O(t^3)$ e $\log(1+t) \sim t$:
$$f(x) = \log\Big(1 + \underbrace{\frac{x^2}{2} + O(x^4)}_{t}\Big) = \log(1+t) \sim t = \frac{x^2}{2} + O(x^4) \sim \frac{x^2}{2}\,.$$
In conclusione la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0$ è $\frac{1}{2}x^2$.
b) Per quanto fatto sopra la parte principale di $f(x) + ax^2$ è $(a + \frac{1}{2})x^2$ per ogni $a \neq -\frac{1}{2}$.
Nel caso $a = -\frac{1}{2}$ ho bisogno di uno sviluppo più preciso della funzione $f(x)$, che ottengo usando gli sviluppi $e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + O(t^4)$ e $\log(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + O(t^3)$:
$$\begin{aligned} f(x) &= \log\Big(1 + \underbrace{\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} + O(x^6)}_{t}\Big) \\ &= \log(1+t) \\ &= t - \frac{t^2}{2} + O(t^3) \\ &= \Big[\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} + O(x^6))\Big] - \frac{1}{2}\Big[\frac{x^2}{2} + O(x^4)\Big]^2 + O\Big[\Big(\frac{x^2}{2}\Big)^3\Big] \\ &= \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + O(x^6)\,. \end{aligned}$$
Da questo ottengo che la parte principale di $f(x) - \frac{1}{2}x^2$ per $x \to 0$ è $\frac{1}{24}x^4$.

3. Uguale al gruppo 1.

SECONDA PARTE, GRUPPO 4.

1. Riscrivo l'equazione come $f(x) = a$ con $f(x) := (x-3)^{-7}\exp(2x^2)$, Il grafico di f è simile a quello del gruppo 1, con la differenza che l'asintoto verticale è in $x = 3$, il punto di massimo locale è $x = -1/2$ e il punto di minimo locale è $x = 7/2$. Dal grafico di f ottengo che
   - per $a < f(-1/2)$ ci sono due soluzioni;
   - per $a = f(-1/2)$ c'è una soluzione ($x = -1/2$);
   - per $f(-1/2) < a < f(7/2)$ non ci sono soluzioni;
   - per $a = f(7/2)$ c'è una soluzione ($x = 7/2$);
   - per $a > f(7/2)$ ci sono due soluzioni.

2. Analogo al gruppo 3: a) $\text{p.p.}(f(x)) = \frac{1}{2}x^3$; b) $\text{p.p.}(f(x) + ax^3) = \begin{cases} (a+\frac{1}{2})x^3 & \text{per } a \neq -\frac{1}{2}, \\ \frac{1}{24}x^6 & \text{per } a = -\frac{1}{2}. \end{cases}$

3. Uguale al gruppo 1.

Commenti

- Seconda parte, esercizio 1. Alcuni dei presenti hanno provato a risolvere questo esercizio disegnando separatamente i grafici $y = \exp(2x^2)$ e $y = a(x-3)^{16}$ (mi riferisco per semplicità al gruppo 1), ottenendo risultati completamente errati. In effetti questo approccio presenta diversi problemi: il primo è che questi disegni sono solo approssimativi, mentre il numero di intersezioni dipende dalla precisione del disegno, il secondo è che le intersezioni di questi due grafici (quando ci sono) non rientrano tutte nell'area effettivamente disegnata; il terzo è che il grafico $y = a(x-3)^{16}$ è stato disegnato solo per un valore di a, mentre il disegno cambia con a e così anche il risultato finale.

- Seconda parte, esercizio 1. Alcuni dei presenti hanno disegnato il grafico della funzione $f(x)$ senza studiare il segno della derivata $f'(x)$, ma risolvendo solo l'equazione $f'(x) = 0$. Pur essendo corretto il disegno, non è chiaro come sia possibile disegnare un grafico senza sapere dove la funzione cresce e dove decresce...

- Seconda parte, esercizio 2, punto b). Nel discutere il caso "difficile" ($a = 1/6$ per il gruppo 1) diversi dei presenti hanno sviluppato ulteriormente solo una delle due funzioni coinvolte: in un caso quella all'interno del logaritmo ma non il logaritmo, nell'altro il logaritmo ma non la funzione all'interno. In entrambi i casi il risultato finale è sbagliato, cosa di cui ci si può accorgere scrivendo (correttamente) i resti.
  Per chiarire, nel primo caso la versione *corretta* dei passaggi fatti è la seguente (mi riferisco sempre al gruppo 1):
  $$f(x) = \log\Big(\frac{\sin(x^3)}{x^3}\Big) = \log\Big(1 - \frac{x^6}{6} + \frac{x^{12}}{120} + O(x^{18})\Big)$$
  usando quindi cambio di variabile $t = -\frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{120}x^{12} + O(x^{18})$ e lo sviluppo $\log(1+t) = t + O(t^2)$ si ottiene
  $$\begin{aligned} f(x) &= \log(1+t) \\ &= t + O(t^2) \\ &= \Big[-\frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{120}x^{12} + O(x^{18})\Big] + O\Big[\Big(-\frac{1}{6}x^6\Big)^2\Big] = -\frac{1}{6}x^6 + O(x^{12}). \end{aligned}$$
  Nel secondo caso invece si comincia con
  $$f(x) = \log\Big(\frac{\sin(x^3)}{x^3}\Big) = \log\Big(1 - \frac{x^6}{6} + O(x^{12})\Big)$$
  e usando cambio di variabile $t = -\frac{1}{6}x^6 + O(x^{12})$ e lo sviluppo $\log(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + O(t^3)$ si ottiene
  $$\begin{aligned} f(x) &= \log(1+t) \\ &= t - \frac{1}{2}t^2 + O(t^3) \\ &= \Big[-\frac{1}{6}x^6 + O(x^{12})\Big] - \frac{1}{2}\Big[-\frac{1}{6}x^6 + O(x^{12})\Big]^2 + O\Big[\Big(-\frac{1}{6}x^6\Big)^3\Big] \\ &= -\frac{1}{6}x^6 + O(x^{12}) - \frac{1}{72}x^{12} + O(x^{18}) + O(x^{24}) + O(x^{18}) = -\frac{1}{6}x^6 + O(x^{12}). \end{aligned}$$

- Seconda parte, esercizio 3. Pochissimi dei presenti hanno impostato correttamente l'esercizio. In particolare quasi tutti hanno scritto in modo errato l'equazione della retta tangente al grafico $y = e^{-x}$ (vanificando i calcoli successivi); l'errore è stato più o meno sempre lo stesso: indicare con x sia l'ascissa del punto di tangenza, sia la variabile indipendente nell'equ azione della retta tangente, ottenendo così un equazione che non è quella di una retta (e tantomeno quella della retta tangente).

- Seconda parte, esercizio 3. Molti hanno impostato l'esercizio senza fare alcun disegno...

PRIMA PARTE, GRUPPO 1.

1. La velocità è $\vec{v}(t) = \big(e^t(\cos t - \sin t);\ e^t(\sin t + \cos t)\big)$, e quindi $\big|\vec{v}(t)\big| = \sqrt{2}\,e^t$.

2. a) 0; b) $+\infty$; c) 2.

3. La funzione $f(x)$ è crescente per $a \geq 2$.

4. Integrando per parti si ottiene
$$\int_0^\pi x\,\cos x\,dx = \Big|x\,\sin x\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \sin x\,dx = \Big|\cos x\Big|_0^\pi = -2\,.$$

5. La serie si comporta come $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\frac{2}{a}\Big)^n$ e quindi converge per $a > 2$.

6. La soluzione è $x(t) = \sqrt[3]{3e^t - 2}$.

7. Usando il criterio del rapporto si ottiene $R = +\infty$.

8. Una formula per la funzione in questione è $f(x) = 2 + 2\sin(2\pi x)$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 2.

1. La velocità è $\vec{v}(t) = \big(\cos t - t\sin t;\ \sin t + t\cos t\big)$, e quindi $\big|\vec{v}(t)\big| = \sqrt{1+t^2}$.

2. a) 0; b) non esiste; c) -2.

3. La funzione $f(x)$ è crescente per $a \leq -3$.

4. Usando il cambio di variabile $y = 4 - 2x$ si ottiene
$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-2x}} = -\frac{1}{2}\int\frac{dy}{\sqrt{y}} = -\frac{1}{2}\int y^{-1/2}dy = -y^{1/2} + c = -\sqrt{4-2x} + c\,.$$

5. La serie si comporta come $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\frac{1}{a}\Big)^n$ e quindi converge per $a > 1$.

6. La soluzione è $x(t) = \sqrt[3]{3e^t + 5}$.

7. Usando il criterio della radice si ottiene $R = \dfrac{2}{3}$.

8. Una formula per la funzione in questione è $f(x) = -1 + 2\sin(\pi x)$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 3.

1. La velocità è $\vec{v}(t) = \big(e^{-t}(\cos t + \sin t);\ e^{-t}(-\sin t + \cos t)\big)$, e quindi $\big|\vec{v}(t)\big| = \sqrt{2}\,e^{-t}$.

2. a) $-\infty$; b) $+\infty$; c) 1.

3. La funzione $f(x)$ è decrescente per $a \leq -2$.

4. Raccogliendo 4 al denominatore e usando il cambio di variabile $y = x/2$ si ottiene
$$\int_0^2 \frac{dx}{4+x^2} = \frac{1}{4}\int_0^2 \frac{dx}{1+(x/2)^2} = \frac{1}{2}\int_0^1\frac{dy}{1+y^2} = \frac{1}{2}\Big|\arctan y\Big|_0^1 = \frac{\pi}{8}\,.$$

5. La serie si comporta come $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2a}}$ e quindi converge per $a > \dfrac{1}{2}$.

6. La soluzione è $x(t) = \sqrt[4]{4e^t - 3}$.

7. Usando il criterio della radice si ottiene $R = 0$.

8. Una formula per la funzione in questione è $f(x) = -2 + 2\sin(2x)$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 4.

1. La velocità è $\vec{v}(t) = \big(e^t(\sin t + \cos t);\ e^t(\cos t - \sin t)\big)$, e quindi $\big|\vec{v}(t)\big| = \sqrt{2}\, e^t$.

2. a) $+\infty$; b) 0; c) $\dfrac{1}{2}$.

3. La funzione $f(x)$ è decrescente per $a \geq 3$.

4. Integrando per parti si ottiene
$$\int x \cos x\, dx = x \sin x - \int \sin x\, dx = x \sin x + \cos x + c\,.$$

5. La serie si comporta come $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\frac{a}{2}\Big)^n$ e quindi converge per $a < 2$.

6. La soluzione è $x(t) = \sqrt[4]{4e^t + 12}$.

7. Usando il criterio del rapporto si ottiene $R = 0$.

8. Una formula per la funzione in questione è $f(x) = 2 + 2\cos(2\pi x)$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 5.

1. La velocità è $\vec{v}(t) = \big(\sin t + t\cos t;\ \cos t - t\sin t\big)$, e quindi $\big|\vec{v}(t)\big| = \sqrt{1+t^2}$.

2. a) $+\infty$; b) 1; c) $-\dfrac{1}{2}$.

3. La funzione $f(x)$ è crescente per $a \geq 2$.

4. Usando il cambio di variabile $y = 4 - 2x$ si ottiene
$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{4-2x}} = -\frac{1}{2}\int_2^0 \frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{1}{2}\int_0^2 y^{-1/2} dy = \Big|y^{1/2}\Big|_0^2 = \sqrt{2}\,.$$

5. La serie si comporta come $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\frac{a}{3}\Big)^n$ e quindi converge per $a < 3$.

6. La soluzione è $x(t) = \sqrt[3]{3\sin t + 1}$.

7. Usando il criterio della radice si ottiene $R = +\infty$.

8. Una formula per la funzione in questione è $f(x) = -1 + 2\cos(\pi x)$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 6.

1. La velocità è $\vec{v}(t) = \big(e^{-t}(-\sin t + \cos t);\ e^{-t}(\cos t + \sin t)\big)$, e quindi $\big|\vec{v}(t)\big| = \sqrt{2}\, e^{-t}$.

2. a) $-\infty$; b) non esiste; c) $-\dfrac{1}{2}$.

3. La funzione $f(x)$ è decrescente per $a \le -3$.

4. Raccogliendo 4 al denominatore e usando il cambio di variabile $y = x/2$ si ottiene
$$\int \frac{dx}{4+x^2} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{1+(x/2)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dy}{1+y^2} = \frac{1}{2}\arctan y + c = \frac{1}{2}\arctan\Big(\frac{x}{2}\Big) + c\,.$$

5. La serie si comporta come $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2a-2}}$ e quindi converge per $a > \dfrac{3}{2}$.

6. La soluzione è $x(t) = \sqrt[3]{3\sin t + 8}$.

7. Usando il criterio della radice si ottiene $R = 4$.

8. Una formula per la funzione in questione è $f(x) = -2 + 2\cos(2x)$.

SECONDA PARTE, GRUPPO 1.

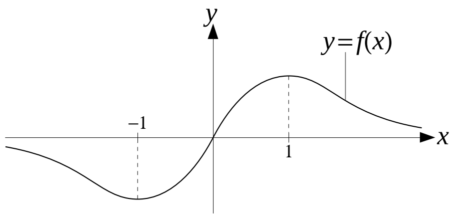
1. a) Usando il fatto che $1 + x^4 \sim x^4$ e $1 + 2x^4 \sim 2x^4$ per $x \to +\infty$ ottengo che
$$f(x) := \frac{1}{1+x^4} - \frac{1}{1+2x^4} \sim \frac{1}{x^4} - \frac{1}{2x^4} = \frac{1}{2x^4}\,,$$
e quindi p.p.$\big(f(x)\big) = \frac{1}{2}x^{-4}$ per $x \to +\infty$.
b) Per quanto appena visto ho anche che p.p.$\big(f(x) + ax^{-4}\big) = \big(\frac{1}{2} + a\big)x^{-4}$ per ogni $a \ne -\frac{1}{2}$.
Per $a = -\frac{1}{2}$ serve invece uno sviluppo più preciso di $f(x)$.
Siccome x tende a $+\infty$, conviene mettere in evidenza x^4 e $2x^4$ nei denominatori delle frazioni che compongono $f(x)$, cosa che permette poi di usare lo sviluppo di Taylor $1/(1+t) = 1 - t + O(t^2)$:
$$\begin{aligned} f(x) &:= \frac{1}{1+x^4} - \frac{1}{1+2x^4} \\ &= \frac{1}{x^4}\cdot\frac{1}{1+1/x^4} - \frac{1}{2x^4}\cdot\frac{1}{1+1/(2x^4)} \\ &= \frac{1}{x^4}\big(1 - 1/x^4 + O(1/x^8)\big) - \frac{1}{2x^4}\big(1 - 1/(2x^4) + O(1/x^8)\big) \\ &= \frac{1}{2x^4} - \frac{3}{4x^8} + O\big(1/x^{12}\big)\,. \end{aligned}$$
Da questo segue che p.p.$\big(f(x) - \frac{1}{2}x^{-4}\big) = -\frac{3}{4}x^{-8}$.

2. a) Ricordo che
$$f(x) := \int_0^{\frac{x}{5+x^6}} 2\exp(-t^2)\, dt\,.$$
Poiché l'integranda $2\exp(-t^2)$ è strettamente positiva, la funzione $f(x)$ è strettamente positiva quando l'estremo di integrazione $x/(5+x^6)$ è strettamente maggiore dell'estremo di integrazione 0, cioè quando $x > 0$. Analogamente $f(x) < 0$ per $x < 0$ e $f(x) = 0$ per $x = 0$.
b) Siccome $f(x)$ è ben definita (e continua) per ogni $x \in \mathbb{R}$, i limiti significativi sono quelli per $x \to \pm\infty$. Siccome l'estremo di integrazione $x/(5 + x^6)$ tende a 0 per $x \to \pm\infty$, ottengo che
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \int_0^0 2\exp(-t^2)\, dt = 0\,.$$

c) Per disegnare il grafico di $f(x)$ osservo che la derivata di questa funzione è

$$f'(x) = 2\exp(-t^2)\left(\frac{x}{5+x^6}\right)' = 2\exp(-t^2)\,\frac{5(1-x^6)}{(5+x^6)^2} \quad \text{con } t = \frac{x}{5+x^6}\,.$$

Il segno di $f'(x)$ è quindi quello del fattore $1-x^6$, ed in particolare $f(x)$ cresce per $-1 \le x \le 1$, e decresce per $x \le -1$ e per $x \ge 1$.
Basandomi su quanto detto posso tracciare il grafico di $f(x)$.



d) Sia per $x \to 0$ che per $x \to +\infty$ l'estremo di integrazione superiore

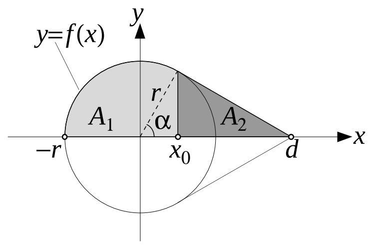
$$y := \frac{x}{5+x^6}$$

converge a 0, che è l'estremo di integrazione inferiore. Utilizzando quindi lo sviluppo di Taylor $\exp(-t^2) = 1 + O(t^2)$ ottengo

$$f(x) = \int_0^y 2\exp(-t^2)\,dt = \int_0^y 2 + O(t^2)\,dt = 2y + O\big(y^3\big) \sim 2y\,.$$

Osservo ora che per $x \to 0$ si ha $y \sim x/5$ e quindi la parte principale di $f(x)$ è $\frac{2}{5}x$.
Invece per $x \to +\infty$ si ha $y \sim 1/x^5$ e quindi la parte principale è $2/x^5$.

3. Il solido V è dato dall'unione dei solidi V_1 e V_2 ottenuti ruotando attorno all'asse delle x le figure piane A_1 ed A_2 disegnate qui sotto. Si noti in particolare che A_1 è un pezzo della circonferenza con centro l'origine e raggio $r = 2$ e V_1 è un pezzo di sfera, mentre A_2 è un triangolo e V_2 è un cono.



Per calcolare il volume di V_1 e V_2 dobbiamo innanzitutto determinare l'angolo α ed il valore di x_0. Usando la relazione $r = d\cos\alpha$ ed il fatto che $d = 4$ e $r = 2$ otteniamo $\cos\alpha = 1/2$, e quindi $\alpha = \pi/3$; infine $x_0 = r\cos\alpha = 1$.

Tenendo conto che la parte superiore della circonferenza nel disegno è il grafico della funzione

$$f(x) := \sqrt{r^2 - x^2} = \sqrt{4 - x^2}$$

otteniamo

$$\text{volume}(V_1) = \pi \int_{-r}^{x_0} \big(f(x)\big)^2 dx = \pi \int_{-2}^{1} x^2 - 4\,dx = 9\pi\,.$$

Invece il cono V_2 ha altezza h uguale alla base del triangolo A_2, vale a dire $h = d - x_0 = 3$, e raggio di base ρ uguale all'altezza del triangolo A_2, vale a dire $\rho = r\sin\alpha = \sqrt{3}$, e quindi

$$\text{volume}(V_2) = \frac{1}{3}\pi\rho^2 h = 3\pi\,.$$

In conclusione

$$\text{volume}(V) = \text{volume}(V_1) + \text{volume}(V_2) = 9\pi + 3\pi = 12\,\pi\,.$$

4. a), b) L'equazione differenziale (*) è del secondo ordine, lineare, non omogenea e a coefficienti costanti. Pertanto la soluzione generale è

$$x(t) = x_{\rm om}(t) + x_1(t) + x_2(t)$$

dove $x_{\rm om}$ è la soluzione generale dell'equazione omogenea

$$\ddot{x} + (1-6a)\dot{x} + (8a^2-2a)x = 0\,, \tag{1}$$

x_1 è una soluzione particolare dell'equazione non omogenea

$$\ddot{x} + (1-6a)\dot{x} + (8a^2-2a)x = 4t\,, \tag{2}$$

x_2 è una soluzione particolare dell'equazione non omogenea

$$\ddot{x} + (1-6a)\dot{x} + (8a^2-2a)x = 2e^t\,. \tag{3}$$

Comincio con le soluzioni dell'equazione omogenea (1). Le soluzioni dell'equazione caratteristica associata $\lambda^2 + (1-6a)\lambda + (8a^2-2a) = 0$ sono

$$\lambda_1 = 4a-1\,, \quad \lambda_2 = 2a\,.$$

In particolare λ_1 e λ_2 sono sempre reali, e coincidono solo per $a = \frac{1}{2}$, nel qual caso $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Quindi

$$x_{\rm om}(t) = \begin{cases} c_1 e^{(4a-1)t} + c_2 e^{2at} & \text{se } a \neq \frac{1}{2}, \\ (c_1 + c_2 t)e^t & \text{se } a = \frac{1}{2}, \end{cases}$$

con c_1 e c_2 costanti arbitrarie.
Cerco ora una soluzione particolare x_1 della (2) della forma $x_1(t) = b_0 + b_1 t$, e trovo

$$x_1(t) = \frac{2}{4a^2-a}t + \frac{6a-1}{(4a^2-a)^2}$$

(attenzione, questa formula ha senso solo per $a \neq 0, \frac{1}{4}$).
Per $a \neq \frac{1}{2}$ cerco una soluzione particolare x_2 della (2) della forma $x_2(t) = be^t$ e trovo

$$x_2(t) = \frac{1}{(2a-1)^2}e^t\,.$$

Infine per $a = \frac{1}{2}$ ho che $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ e quindi cerco una soluzione particolare x_2 della (2) della forma $x_2(t) = bt^2e^t$ e trovo

$$x_2(t) = t^2e^t\,.$$

In conclusione per $a \neq 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$ la soluzione generale della (*) è

$$x(t) = c_1 e^{(4a-1)t} + c_2 e^{2at} + \frac{1}{(2a-1)^2}e^t + \frac{2}{4a^2-a}t + \frac{6a-1}{(4a^2-a)^2}\,, \tag{4}$$

mentre per $a = \frac{1}{2}$

$$x(t) = (c_1 + c_2 t + t^2)e^t + 4t + 8\,. \tag{5}$$

c) Comincio dal caso $a = \frac{1}{2}$. In questo caso la formula (5) mostra che la soluzione $x(t)$ soddisfa

$$x(t) \sim t^2e^t \quad \text{per } t \to +\infty$$

e quindi $x(t)$ converge a $+\infty$ per $t \to +\infty$.
Distinguo i rimanenti valori di a in due classi, a seconda che le soluzioni dell'equazione caratteristica $\lambda_1 = 4a-1$ e $\lambda_2 = 2a$ siano maggiori o minori di 1.
Se $a < \frac{1}{2}$ ho che $4a-1 < 2a < 1$ e dunque la formula (4) mostra che

$$x(t) \sim \frac{1}{(2a-1)^2}e^t \quad \text{per } t \to +\infty,$$

e poiché il coefficiente $1/(2a-1)^2$ è positivo, $x(t)$ converge a $+\infty$ per $t \to +\infty$.
Se invece $a > \frac{1}{2}$ ho che $4a-1 > 2a > 1$, e quindi, per $c_1 \neq 0$,

$$x(t) \sim c_1 e^{(4a-1)t} \quad \text{per } t \to +\infty,$$

e di conseguenza il limite di $x(t)$ per $t \to +\infty$ è $\pm\infty$ a seconda del segno di c_1. In particolare non è più vero che tutte le soluzioni tendono a $+\infty$.

Riassumendo, le soluzioni di (*) tendono tutte a $+\infty$ se e solo se $a \leq \frac{1}{2}$.

SECONDA PARTE, GRUPPO 2.

1. a) Analogo al gruppo 1. $\text{p.p.}\big(f(x)\big) = -2x^{-4}$.
   b) Usando la formula precedente ottengo che $\text{p.p.}\big(f(x) + ax^{-4}\big) = (a-2)x^{-4}$ per $a \neq 2$.
   Per $a = 2$ procedo in modo simile al gruppo 1, raccogliendo $1/x^4$ da entrambe le frazioni che compongono $f(x)$ e utilizzando quindi lo sviluppo di Taylor $1/(1+t) = 1 - t + t^2 + O(t^3)$:
   $$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{1}{x^4}\Big(\frac{1}{1-x^{-4}} + \frac{1}{1+x^{-4}}\Big) \\ &= -x^{-4}\big(1 + x^{-4} + x^{-8} + O(x^{-12}) + 1 - x^{-4} + x^{-8} + O(x^{-12})\big) \\ &= -2x^{-4} - 2x^{-12} + O\big(x^{-16}\big)\,. \end{aligned}$$
   Di conseguenza $\text{p.p.}\big(f(x) + 2x^{-4}\big) = -2x^{-12}$.

2. Analogo al gruppo 1.
   a) La funzione $f(x)$ è strettamente positiva quando l'estremo di integrazione $-x/(3+x^4)$ è strettamente maggiore dell'estremo di integrazione 0, cioè quando $x < 0$. Analogamente $f(x) < 0$ per $x > 0$ e $f(x) = 0$ per $x = 0$.
   b) Siccome l'estremo di integrazione $-x/(3+x^4)$ tende a 0 per $x \to \pm\infty$, i corrispondenti limiti di $f(x)$ sono uguali a 0.
   c) La derivata di $f(x)$ è
   $$f'(x) = \exp(-t^2)\,\frac{3(x^4-1)}{(3+x^4)^2} \quad \text{con } t = \frac{x}{3+x^4}\,.$$
   In particolare $f(x)$ decresce per $-1 \leq x \leq 1$, e cresce per $x \leq -1$ e per $x \geq 1$.
   Sulla base dei fatti raccolti fin qui traccio il grafico sottostante.
   d) Sia per $x \to 0$ che per $x \to +\infty$ l'estremo di integrazione $y := -x/(3+x^4)$ converge a 0 e usando lo sviluppo di Taylor $\exp(-t^2) = 1 + O(t^2)$ ottengo
   $$f(x) = \int_0^y 1 + O(t^2)\,dt = y + O\big(y^3\big) \sim y\,.$$
   Osservo infine che per $x \to 0$ si ha $y \sim x/3$ e quindi la parte principale di $f(x)$ è $\frac{1}{3}x$, mentre per $x \to +\infty$ si ha $y \sim 1/x^3$ e quindi la parte principale è $1/x^3$.

3. Analogo al gruppo 1. In questo caso $r = \sqrt{2}$, $d = 2$, da cui si ricava che $\alpha = \pi/4$, $x_0 = 1$, e infine $f(x) = \sqrt{2 - x^2}$. Facendo i dovuti calcoli si ottiene
   $$\text{volume}(V) = \text{volume}(V_1) + \text{volume}(V_2) = \frac{\pi}{3}\big(5 + 4\sqrt{2}\big) + \frac{\pi}{3} = 2\pi\bigg(1 + \frac{2\sqrt{2}}{3}\bigg)\,.$$

4. Procedo come per il gruppo 1.
   a), b) Le soluzioni dell'equazione caratteristica sono $\lambda_1 = -a$ e $\lambda_2 = -2a - 1$ e quindi la soluzione generale dell'equazione omogenea $\ddot{x} + (1+3a)\dot{x} + (2a^2 + a)x = 0$ è
   $$x_{\text{om}}(t) = \begin{cases} c_1 e^{-at} + c_2 e^{(-2a-1)t} & \text{se } a \neq -1, \\ (c_1 + c_2 t)e^t & \text{se } a = -1. \end{cases}$$
   Per $a \neq 0, -\frac{1}{2}$ una soluzione dell'equazione non omogenea $\ddot{x} + (1+3a)\dot{x} + (2a^2 + a)x = -4t$ è
   $$x_1(t) = -\frac{4}{2a^2 + a}t + \frac{4 + 12a}{(2a^2 + a)^2}\,.$$
   Una soluzione particolare dell'equazione non omogenea $\ddot{x} + (1+3a)\dot{x} + (2a^2 + a)x = 2e^t$ è
   $$x_2(t) = \begin{cases} -\frac{1}{(a+1)^2}e^t & \text{per } a \neq -1, \\ t^2 e^t & \text{per } a = -1. \end{cases}$$

Infine la soluzione generale di (*) è

$$x(t) = \begin{cases} c_1 e^{-at} + c_2 e^{(-2a-1)t} - \frac{1}{(a+1)^2} e^t - \frac{4}{2a^2+a} t + \frac{4+12a}{(2a^2+a)^2} & \text{per } a \neq 0, -\frac{1}{2}, -1, \\ (c_1 + c_2 t + t^2) e^t - 4t - 8 & \text{per } a = -1. \end{cases}$$

c) Le soluzioni di (*) tendono tutte a $+\infty$ se e solo se $a \geq -1$.

SECONDA PARTE, GRUPPO 3.

1. a) Analogo al gruppo 1 $\text{p.p.}\big(f(x)\big) = \frac{1}{2} x^{-3}$.

   b) Analogo al gruppo 1: $\text{p.p.}\big(f(x) + ax^{-3}\big) = \begin{cases} \big(\frac{1}{2} + a\big) x^{-3} & \text{per } a \neq -1/2, \\ -\frac{3}{4} x^{-6} & \text{per } a = -1/2. \end{cases}$

2. Molto simile al gruppo 2; in particolare il grafico di $f(x)$ è sostanzialmente lo stesso mentre la parte principale è $-\frac{1}{5} x$ per $x \to 0$ e $-1/x^5$ per $x \to +\infty$.

3. Uguale al gruppo 1.

4. Uguale al gruppo 1.

SECONDA PARTE, GRUPPO 4.

1. a) Analogo al gruppo 1 $\text{p.p.}\big(f(x)\big) = -2x^{-3}$.

   b) Analogo al gruppo 2: $\text{p.p.}\big(f(x) + ax^{-3}\big) = \begin{cases} (a-2) x^{-3} & \text{per } a \neq 2, \\ -2x^{-9} & \text{per } a = 2. \end{cases}$

2. Molto simile al gruppo 1; in particolare il grafico di $f(x)$ è sostanzialmente lo stesso mentre la parte principale è $-\frac{2}{3} x$ per $x \to 0$ e $-2/x^3$ per $x \to +\infty$.

3. Uguale al gruppo 2.

4. Uguale al gruppo 2.

COMMENTI

- Seconda parte, esercizio 1. Nella domanda b) il caso più difficile, vale a dire $a = 2$ per il gruppo 2, può anche essere risolto senza ricorrere agli sviluppi di Taylor, mettendo a comun denominatore le varie frazioni:
  $$f(x) + \frac{2}{x^4} = \frac{1}{1-x^4} - \frac{1}{1+x^4} + \frac{2}{x^4} = \frac{2}{(1-x^4)(1+x^4)x^4} \sim -\frac{2}{x^{12}} \, .$$
  Lo stesso discorso vale anche per gli altri gruppi.

- Seconda parte, esercizio 1. Molti dei presenti hanno utilizzato lo sviluppo di Taylor
  $$\frac{1}{1+t} = (1+t)^{-1} = 1 - t + O(t^2) \tag{1}$$
  nel seguente modo (mi riferisco per semplicità al gruppo 2):
  $$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{1-x^4} - \frac{1}{1+x^4} \\ &= \big(1 + x^4 + O(x^8)\big) - \big(1 - x^4 + O(x^8)\big) = 2x^4 + O(x^8) \sim 2x^4 \, . \end{aligned}$$
  In particolare hanno usato lo sviluppo (1) prima con $t = -x^4$ e poi con $t = x^4$. Questo è completamente errato, perché lo sviluppo (1) vale per t che tende a 0, ma in questi due casi t tende a $\pm\infty$ perché $x \to +\infty$.
  Qualcuno ha giustificato questo passaggio invocando il fatto che le funzioni $1/(1 \pm x^4)$ tendono

a 0, ma questo non è rilevante; quello che conta è che la quantità che si mette al posto di t tenda a 0.

- Esercizio 2. Vale la pena di notare che la funzione $f(x)$ è dispari. La dimostrazione di questo fatto non è immediata, e utilizza sia che l'integranda $\exp(-t^2)$ è una funzione pari della variabile t, sia che l'estremo di integrazione superiore è una funzione dispari della variabile x (e quello inferiore è 0).

- Esercizio 2. Diversi dei presenti hanno calcolato (sbagliando) l'integrale che definisce $f(x)$, trovando una formula esplicita per questa funzione. Questo nonostante che fosse stato detto in aula che quell'integrale non si può calcolare.

- Esercizio 2. Incomprensibilmente, diversi dei presenti hanno studiato la funzione integranda $\exp(-t^2)$ invece della funzione $f(x)$.

- Esercizio 3. La maggior parte dei presenti ha avuto problemi a determinare il valore di x_0 (mi riferisco al disegno sopra) che è essenziale per il calcolo del volume.
  Alcuni hanno trovato x_0 a partire dall'equazione della retta che contiene l'ipotenusa del triangolo A_2, e per trovare questa equazione hanno imposto che la retta passasse per $(d, 0)$ e che fosse tangente alla circonferenza, cioè che ci fosse un'unica intersezione. Non è l'approccio più semplice ma va bene.
  Alcuni hanno scritto l'equazione della retta suddetta senza dare spiegazioni. Ma spesso l'equazione data è errata, perché descrive una retta secante alla circonferenza invece che tangente.

- Esercizio 4. Quasi nessuno dei presenti ha svolto correttamente il punto c). Stranamente, diversi hanno evidenziato il punto chiave senza però scrivere delle conclusioni chiare. Infine molti hanno scritto che il limite per $t \to +\infty$ di funzioni tipo ce^t è $+\infty$, senza accorgersi che il limite dipende invece dal segno di c.

Prima parte, gruppo 1.

1. Poiché $r\sin(x+\alpha) = r\cos\alpha\sin x + r\sin\alpha\cos x$ devo trovare r e α in modo che $r\cos\alpha = 3$, $r\sin\alpha = -3$, e quindi $r = 3\sqrt{2}$, $\alpha = -\pi/4$.

2. a) $-xe^{-x}$; b) $x^{2x}(2+2\log x)$; c) $\dfrac{3}{x} - \log 2$.

3. Il punto di minimo è $x=-1$, il punto di massimo è $x=1$.

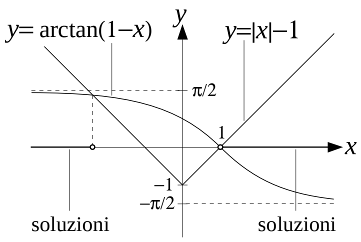
4. Il polinomio è $P(x) = 3 - 7x^2 + 4x^4$.

5. L'ordine corretto è $d \ll b \ll a \ll c$.

6. Integrando per parti ottengo

$$\int_0^{+\infty} x\,e^{-x} dx = \Big| x(-e^{-x}) \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} (-e^{-x}) dx = \Big| -e^{-x} \Big|_0^{+\infty} = 1\,.$$

7. Mi riconduco alla serie di Taylor dell'esponenziale: $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n+2^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} = e^4 + e^2$.

8. 

Prima parte, gruppo 2.

1. Poiché $r\sin(x+\alpha) = r\cos\alpha\sin x + r\sin\alpha\cos x$ devo trovare r e α in modo che $r\cos\alpha = 2$, $r\sin\alpha = 2$, e quindi $r = 2\sqrt{2}$, $\alpha = \pi/4$.

2. a) $(x-2)e^{-x}$; b) $-x^{-x}(1+\log x)$; c) $\dfrac{2}{x} - \log 4$.

3. Il punto di minimo non esiste, il punto di massimo è $x=2$.

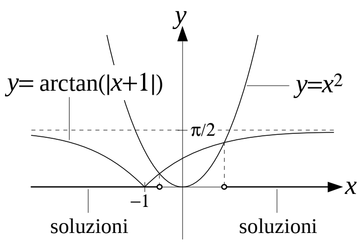
4. Il polinomio è $P(x) = 6x^2 - x^4 + x^6$.

5. L'ordine corretto è $b \ll c \ll a \ll d$.

6. Usando il cambio di variabile $y = x^2+1$ ottengo

$$\int \frac{x}{(x^2+1)^{5/2}}\, dx = \frac{1}{2}\int y^{-5/2}\, dy = -\frac{1}{3} y^{-3/2} + c = -\frac{1}{3(x^2+1)^{3/2}} + c\,.$$

7. Mi riconduco alla serie geometrica: $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n+3^n}{4^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (2/4)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (3/4)^n = \frac{1}{1-2/4} + \frac{1}{1-3/4} = 6$.

8. 

Prima parte, gruppo 3.

1. Poiché $r\sin(x+\alpha) = r\cos\alpha\sin x + r\sin\alpha\cos x$ devo trovare r e α in modo che $r\cos\alpha = -2$, $r\sin\alpha = 2$, e quindi $r = 2\sqrt{2}$, $\alpha = 3\pi/4$.

2. a) $(1+2x^2)e^{x^2}$; b) $x^{3x}(3+3\log x)$; c) $\dfrac{2}{x} - \log 2$.

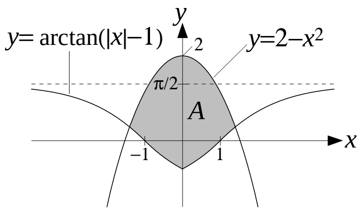
3. Il punto di minimo non esiste, il punto di massimo è $x = 1$.

4. Il polinomio è $P(x) = 6x^3 - 5x^6 + 3x^9$.

5. L'ordine corretto è $b \ll d \ll c \ll a$.

6. Usando il cambio di variabile $y = -x^3$ ottengo
$$\int_0^{+\infty} x^2 \exp(-x^3)\,dx = -\frac{1}{3}\int_0^{-\infty} e^y\,dx = -\frac{1}{3}\Big|\,e^y\,\Big|_0^{-\infty} = \frac{1}{3}\,.$$

7. Mi riconduco alla serie di Taylor dell'esponenziale: $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{2^n}{n!} = \left[\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n}{n!}\right] - 1 - 2 = e^2 - 3.$

8. 

Prima parte, gruppo 4.

1. Poiché $r\sin(x+\alpha) = r\cos\alpha\sin x + r\sin\alpha\cos x$ devo trovare r e α in modo che $r\cos\alpha = 2$, $r\sin\alpha = -2$, e quindi $r = 2\sqrt{2}$, $\alpha = -\pi/4$.

2. a) $2e^{2x}\cos(e^{2x})$; b) $(2x)^x(1+\log(2x))$; c) $\log 2 - \dfrac{3}{x}$.

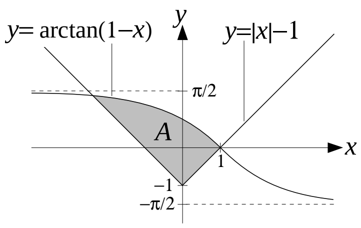
3. Il punto di minimo è $x = -1$, il punto di massimo non esiste.

4. Il polinomio è $P(x) = 3 - 7x^4 + 4x^8$.

5. L'ordine corretto è $d \ll a \ll c \ll b$.

6. Integrando per parti ottengo
$$\int x\,e^{-x}dx = x(-e^{-x}) - \int -e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + c = -(1+x)e^{-x} + c\,.$$

7. Mi riconduco alla serie geometrica: $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{4^n+3^n}{6^n} = \sum_{n=0}^{+\infty}(4/6)^n + \sum_{n=0}^{+\infty}(3/6)^n = \frac{1}{1-4/6} + \frac{1}{1-3/6} = 5.$

8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 5.

1. Poiché $r \sin(x + \alpha) = r \cos\alpha \sin x + r \sin\alpha \cos x$ devo trovare r e α in modo che $r\cos\alpha = 3$, $r \sin\alpha = 3$, e quindi $r = 3\sqrt{2}$, $\alpha = \pi/4$.

2. a) $e^{-x}\sin(e^{-x})$; b) $(3x)^x(1 + \log(3x))$; c) $\log 4 - \dfrac{2}{x}$.

3. Il punto di minimo è $x = -2$, il punto di massimo non esiste.

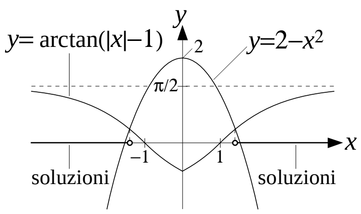
4. Il polinomio è $P(x) = 6x^3 - x^6 + x^9$.

5. L'ordine corretto è $a \ll d \ll b \ll c$.

6. Usando il cambio di variabile $y = x^2 + 1$ ottengo

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{(x^2+1)^{5/2}}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} y^{-5/2}\,dy = -\frac{1}{3}\Big|y^{-3/2}\Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{3}\,.$$

7. Mi riconduco alla serie di Taylor dell'esponenziale: $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n - 3^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3^n}{n!} = e^2 - e^3$.

8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 6.

1. Poiché $r \sin(x + \alpha) = r \cos\alpha \sin x + r \sin\alpha \cos x$ devo trovare r e α in modo che $r\cos\alpha = -3$, $r \sin\alpha = 3$, e quindi $r = 3\sqrt{2}$, $\alpha = 3\pi/4$.

2. a) $3e^{3x}\cos(e^{3x})$; b) $(4x)^x(1 + \log(4x))$; c) $\log 2 - \dfrac{2}{x}$.

3. Il punto di minimo è $x = -2$, il punto di massimo è $x = 1$.

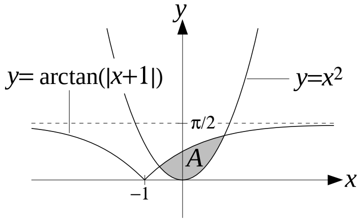
4. Il polinomio è $P(x) = 6x^2 - 5x^4 + 3x^6$.

5. L'ordine corretto è $b \ll c \ll d \ll a$.

6. Usando il cambio di variabile $y = -x^3$ ottengo

$$\int x^2 \exp(-x^3)\,dx = -\frac{1}{3}\int e^y\,dx = -\frac{e^y}{3} + c = -\frac{\exp(-x^3)}{3} + c\,.$$

7. Mi riconduco alla serie geometrica: $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{2^n} = \left[\sum_{n=0}^{+\infty}(1/2)^n\right] - 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{1-1/2} - 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

8. 

Seconda parte, gruppo 1.

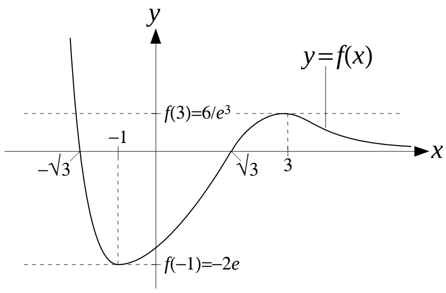
1. a) Riscrivo l'equazione nella forma

$$(x^2 - 3)e^{-x} = a \tag{*}$$

e studio quindi la funzione $f(x) = (x^2 - 3)e^{-x}$. Questa funzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, positiva per $x \geq \sqrt{3}$ e per $x \leq -\sqrt{3}$ e negativa altrimenti (in particolare $f(x) = 0$ per $x = \pm\sqrt{3}$), inoltre $f(x)$ tende a 0 per $x \to +\infty$ e tende a $+\infty$ per $x \to -\infty$. Infine, studiando il segno della derivata

$$f'(x) = (-x^2 + 2x + 3)e^{-x} ,$$

ottengo che $f(x)$ cresce nell'intervallo $-1 \leq x \leq 3$, e decresce nelle semirette $x \leq -1$ e $x \geq 3$. Utilizzando queste informazioni traccio il grafico sottostante.



Da questo grafico si vede subito che l'equazione (*) ha

- 1 soluzione per $a > 6/e^3 = f(3)$,
- 2 soluzioni per $a = 6/e^3$,
- 3 soluzioni per $6/e^3 > a > 0$,
- 2 soluzioni per $0 \geq a > -2e = f(-1)$,
- 1 soluzione per $a = -2e$,
- 0 soluzioni per $a < -2e$.

b) Le costanti c_0 e c_1 nello sviluppo di Taylor $x(a) = c_0 + c_1 a + o(a)$ sono date da

$$c_0 = x(0) = \sqrt{3}\,, \quad c_1 = \dot{x}(0) = \frac{1}{f'(\sqrt{3})} = \frac{\exp(\sqrt{3})}{2\sqrt{3}}\,.$$

(Per calcolare c_1 ho usato il fatto che $x(a)$ è la funzione inversa di $f(x)$ e la formula per la derivata della funzione inversa.)

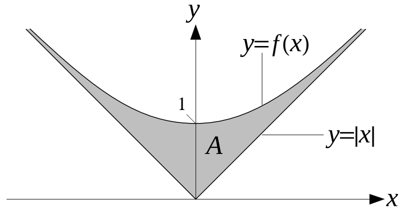
2. a) Come prima cosa studio la funzione $f(x) := \sqrt[3]{|x|^3 + 1}$. Osservo che questa funzione è pari, definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, strettamente positiva, e tende a $+\infty$ per $x \to \pm\infty$. Inoltre

$$f'(x) = 3x^2(x^3 + 1)^{-2/3} \quad \text{per } x \geq 0,$$

e dunque $f(x)$ è crescente per $x > 0$. Infine

$$f(x) = \sqrt[3]{|x|^3 + 1} > \sqrt[3]{|x|^3} = |x|$$

e $f(x) \sim |x|$ per $x \to \pm\infty$. Utilizzando queste informazioni traccio la figura sottostante.



b) L'area di A è data da

$$\text{area}(A) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) - |x|\, dx = 2\int_0^{+\infty} (x^3 + 1)^{1/3} - x\, dx\,. \tag{1}$$

Osservo che il secondo integrale è improprio (semplice) a $+\infty$, e per capirne il comportamento cerco la parte principale della funzione integranda per $x \to +\infty$:

$$(x^3+1)^{1/3} - x = x\left[\Big(1+\frac{1}{x^3}\Big)^{1/3} - 1\right] = x\left[1+\frac{1}{3x^3}+O\Big(\frac{1}{x^6}\Big)-1\right] \sim \frac{1}{3x^2}$$

(nel primo passaggio ho raccolto x dalla potenza, nel secondo passaggio ho usato lo sviluppo di Taylor $(1+t)^{1/3} = 1+\frac{1}{3}t+O(t^2)$.)
Pertanto il secondo integrale in (1) si comporta come $\int_1^{+\infty} dx/x^2$, e quindi è finito. Dunque l'area di A è finita.

c) Le sezioni di V con piani ortogonali all'asse delle x sono corone circolari con raggio esterno $f(x)$ e raggio interno $|x|$ e quindi hanno area $\pi(f^2(x)-|x|^2)$; in particolare il volume di V è dato da

$$\text{volume}(V) = \pi\int_{-\infty}^{+\infty} \big(f(x)\big)^2 - |x|^2 dx = 2\pi\int_0^{+\infty} (x^3+1)^{2/3} - x^2\, dx\,. \tag{2}$$

Osservo che il secondo integrale è improprio (semplice) a $+\infty$, e per capirne il comportamento cerco la parte principale della funzione integranda per $x \to +\infty$:

$$(x^3+1)^{2/3} - x^2 = x^2\left[\Big(1+\frac{1}{x^3}\Big)^{2/3} - 1\right] = x^2\left[1+\frac{2}{3x^3}+O\Big(\frac{1}{x^6}\Big)-1\right] \sim \frac{2}{3x}$$

(nel primo passaggio ho raccolto x^2 dalla potenza, nel secondo passaggio ho usato lo sviluppo di Taylor $(1+t)^{2/3} = 1+\frac{2}{3}t+O(t^2)$.)
Pertanto il secondo integrale in (2) si comporta come $\int_1^{+\infty} dx/x$, e quindi è infinito. Dunque il volume di V è infinito.

3. a) Usando il cambio di variabile $y = x^2$ ottengo

$$f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^n}{(2n)!} \tag{3}$$

e per la seconda serie di potenze posso calcolare il raggio di convergenza R usando il criterio del rapporto:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1/(2(n+1))!}{1/(2n)!} = \lim_{n\to+\infty}\frac{(2n)!}{(2n+2)!} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(2n+2)(2n+1)} = 0\,,$$

e quindi $R = +\infty$. Questo implica che la seconda serie di potenze in (3) converge per ogni $y \in \mathbb{R}$, e dunque la funzione $f(x)$ è definita (e finita) per ogni $x \in \mathbb{R}$.

b) Derivando la somma $f(x)$ termine a termine per due volte ottengo

$$\begin{aligned} f''(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(x^{2n})''}{(2n)!} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n(2n-1)\,x^{2n-2}}{(2n)!} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2(n-1)}}{(2(n-1))!} = \sum_{m=0}^{+\infty}\frac{x^m}{(2m)!} = f(x)\,, \end{aligned}$$

da cui segue che $f'' = f$. (Nel secondo passaggio ho utilizzato il fatto che la derivata seconda del primo addendo della serie è zero, nel penultimo ho usato il cambio di variabile $m = n-1$.)

c) La funzione f risolve l'equazione differenziale $f'' - f = 0$, che è del secondo ordine, lineare, omogenea e a coefficienti costanti, ed ha equazione caratteristica $\lambda^2 - 1 = 0$, con soluzioni $\lambda = \pm 1$. Ne segue che f è della forma

$$f(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$$

con c_1 e c_2 costanti opportune. Per determinare queste costanti osservo che $f(0) = 1$ e che essendo f una funzione pari, f' è dispari e quindi $f'(0) = 0$. Riscrivendo queste due condizioni in termini di c_1 e c_2 ottengo

$$0 = f(0) = c_1 + c_2\,, \quad 0 = f'(0) = c_1 - c_2\,,$$

da cui segue che $c_1 = c_2 = 1/2$ e quindi

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} .$$

SECONDA PARTE, GRUPPO 2.

1. Analogo al gruppo 1.
   a) Riscrivo l'equazione nella forma $(x^2 - 8)e^{-x} = a$ e studio la funzione $f(x) := (x^2 - 8)e^{-x}$. Questa funzione tende a 0 per $x \to +\infty$ e a $+\infty$ per $x \to -\infty$, ha un punto di minimo assoluto in $x = -2$ e un punto di massimo locale in $x = 4$. Infine il numero di soluzioni della (*) è
   - 1 soluzione per $a > 8/e^4 = f(4)$,
   - 2 soluzioni per $a = 8/e^4$,
   - 3 soluzioni per $8/e^4 > a > 0$,
   - 2 soluzioni per $0 \geq a > -4e^2 = f(-2)$,
   - 1 soluzione per $a = -4e^2$,
   - 0 soluzioni per $a < -4e^2$.

   b) Lo sviluppo di Taylor cercato è $x(a) = 2\sqrt{2} + \frac{\exp(2\sqrt{2})}{4\sqrt{2}} a + o(a)$.

2. Il disegno dell'insieme A è sostanzialmente lo stesso del gruppo 1. L'area di A è data da:
$$\text{area}(A) = 2\int_0^{+\infty} (x^5 + 1)^{1/5} - x\,dx \approx \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^4} < +\infty ,$$
   mentre il volume di V è dato da
$$\text{volume}(V) = 2\pi \int_0^{+\infty} (x^5 + 1)^{2/5} - x^2\,dx \approx \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3} < +\infty .$$

3. Uguale al gruppo 1.

SECONDA PARTE, GRUPPO 3.

1. Analogo al gruppo 1.
   a) Riscrivo l'equazione nella forma $(x^2 - 2)e^{-2x} = a$ e studio la funzione $f(x) := (x^2 - 2)e^{-2x}$. Questa funzione tende a 0 per $x \to +\infty$ e a $+\infty$ per $x \to -\infty$, ha un punto di minimo assoluto in $x = -1$ e un punto di massimo locale in $x = 2$. Infine il numero di soluzioni della (*) è
   - 1 soluzione per $a > 2/e^4 = f(2)$,
   - 2 soluzioni per $a = 2/e^4$,
   - 3 soluzioni per $2/e^4 > a > 0$,
   - 2 soluzioni per $0 \geq a > -e^2 = f(-1)$,
   - 1 soluzione per $a = -e^2$,
   - 0 soluzioni per $a < -e^2$.

   b) Lo sviluppo di Taylor cercato è $x(a) = \sqrt{2} + \frac{\exp(2\sqrt{2})}{2\sqrt{2}} a + o(a)$.

2. Il disegno dell'insieme A è sostanzialmente lo stesso del gruppo 1. L'area di A è data da:
$$\text{area}(A) = 2\int_0^{+\infty} (x^3 + 2)^{1/3} - x\,dx \approx \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} < +\infty ,$$
   mentre il volume di V è dato da
$$\text{volume}(V) = 2\pi \int_0^{+\infty} (x^3 + 2)^{2/3} - x^2\,dx \approx \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = +\infty .$$

3. Uguale al gruppo 1.

Seconda parte, gruppo 4.

1. Analogo al gruppo 1.
   a) Riscrivo l'equazione nella forma $(x^2-6)e^{-2x} = a$ e studio la funzione $f(x) := (x^2-6)e^{-2x}$. Questa funzione tende a 0 per $x \to +\infty$ e a $+\infty$ per $x \to -\infty$, ha un punto di minimo assoluto in $x = -2$ e un punto di massimo locale in $x = 3$. Infine il numero di soluzioni della (*) è
   - 1 soluzione per $a > 3/e^6 = f(3)$,
   - 2 soluzioni per $a = 3/e^6$,
   - 3 soluzioni per $3/e^6 > a > 0$,
   - 2 soluzioni per $0 \geq a > -2e^4 = f(-2)$,
   - 1 soluzione per $a = -2e^4$,
   - 0 soluzioni per $a < -2e^4$.

   b) Lo sviluppo di Taylor cercato è $x(a) = \sqrt{6} + \frac{\exp(2\sqrt{6})}{2\sqrt{6}} a + o(a)$.

2. Il disegno dell'insieme A è sostanzialmente lo stesso del gruppo 1. L'area di A è data da:
$$\text{area}(A) = 2\int_0^{+\infty} (x^5+2)^{1/5} - x\, dx \approx \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^4} < +\infty\,,$$
   mentre il volume di V è dato da
$$\text{volume}(V) = 2\pi \int_0^{+\infty} (x^5+2)^{2/5} - x^2\, dx \approx \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3} < +\infty\,.$$

3. Uguale al gruppo 1.

Commenti

- Seconda parte, esercizio 1. Nessuno dei presenti ha svolto correttamente il punto b).

- Seconda parte, esercizio 2. Molti dei presenti hanno disegnato correttamente l'insieme A senza tuttavia giustificare in alcun modo il disegno. In particolare quasi nessuno ha controllato che effettivamente $f(x) > |x|$ per ogni x (faccio riferimento alla soluzione data sopra), cosa che è fondamentale per impostare il disegno e il calcolo dell'area di A.

- Seconda parte, esercizio 2. Molti dei presenti hanno scritto che
$$\text{area}(A) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx - \int_{-\infty}^{+\infty} |x|\, dx = +\infty - (+\infty)$$
  e ne hanno dedotto che l'area di A non esiste. Il punto è che è sbagliato scrivere l'area come differenza di due integrali impropri se questi vengono entrambi uguali a $+\infty$.

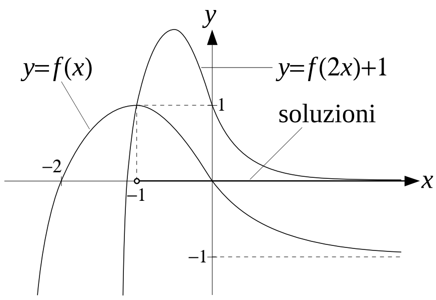
- Seconda parte, esercizio 2. Molti dei presenti hanno scritto che l'area di A è infinita semplicemente perché l'insieme A è illimitato.

- Seconda parte, esercizio 2. La maggior parte dei presenti ha scritto che il volume di V è dato da
$$\text{volume}(A) = \pi \int_{-\infty}^{+\infty} \big(f(x) - |x|\big)^2 dx\,,$$
  cosa che è semplicemente sbagliata.

- Seconda parte, esercizio 3. La serie presentata non è una serie di potenze nel senso solito, per via del fatto che nell'addendo generico appare x^{2n} invece di x^n. Per ricondursi ad una serie di potenze nel senso solito (di cui calcolare il raggio di convergenza) bisogna utilizzare il cambio di variabile $y = x^2$ come spiegato nella soluzione data sopra.

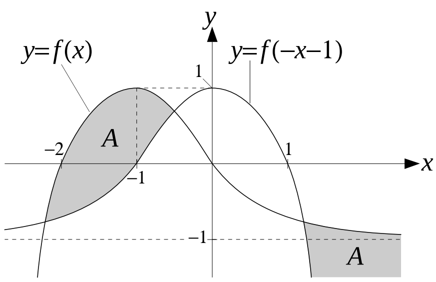
PRIMA PARTE, GRUPPO 1.

1. a) $r = 2$, $\alpha = -\dfrac{\pi}{2}$; b) $r = 2\sqrt{3}$, $\alpha = \dfrac{5\pi}{6}$; c) $x = 1$, $y = \sqrt{3}$.
2. I valori cercati di a sono: $a \geq 2$.
3. a) 0; b) non esiste; c) $-\dfrac{1}{2}$.
4. I valori cercati di a sono: $a \geq 3$.
5. $v(t) = \sqrt{20}\, e^{2t}$, $d = \sqrt{5}(e^4 - 1)$.
6. L'integrale è improprio in 1, e tramite il cambio di variabile $x = 1 - y$ si vede che si comporta come l'integrale improprio $\int_0^1 dy/y^a$ ed in particolare è finito per $0 < a < 1$.
7. La soluzione è $x(t) = t - \dfrac{4}{t^2}$.
8.



PRIMA PARTE, GRUPPO 2.

1. a) $r = 3$, $\alpha = \pi$; b) $r = 2\sqrt{2}$, $\alpha = \dfrac{3\pi}{4}$; c) $x = \sqrt{2}$, $y = -\sqrt{2}$.
2. I valori cercati di a sono: $a \leq -\dfrac{9}{2}$.
3. a) 0; b) $-\infty$; c) $-\dfrac{1}{2}$.
4. I valori cercati di a sono: $0 < a < \log 2$.
5. $v(t) = \sqrt{2}\, e^{-t}$, $d = \sqrt{2}(1 - e^{-2})$.
6. L'integrale è improprio in 2, e tramite il cambio di variabile $x = 2 - y$ si vede che si comporta come l'integrale improprio $\int_0^2 dy/y^a$ ed in particolare è finito per $0 < a < 1$.
7. La soluzione è $x(t) = t^2 - \dfrac{12}{t^2}$.
8.



PRIMA PARTE, GRUPPO 3.

1. a) $r = 3$, $\alpha = -\dfrac{\pi}{2}$; b) $r = 2$, $\alpha = \dfrac{5\pi}{6}$; c) $x = -\sqrt{3}$, $y = 3$.

2. I valori cercati di a sono: $a \leq -2$.

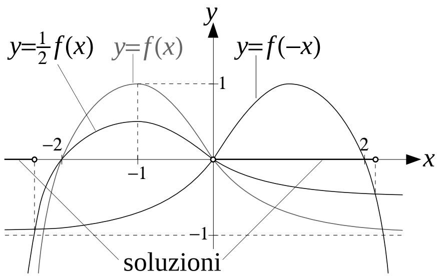
3. a) 0; b) non esiste; c) -6.

4. I valori cercati di a sono: $0 < a < 4$.

5. $v(t) = \sqrt{20}\, e^{2t}$, $d = \sqrt{5}(e^4 - 1)$.

6. L'integrale è improprio in 1, e tramite il cambio di variabile $x = 1 - y$ si vede che si comporta come l'integrale improprio $\int_0^1 dy/y^{2a}$ ed in particolare è finito per $0 < a < \frac{1}{2}$.

7. La soluzione è $x(t) = t - \dfrac{8}{t^3}$.

8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 4.

1. a) $r = 2$, $\alpha = \pi$; b) $r = 2\sqrt{3}$, $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$; c) $x = -2$, $y = 2$.

2. I valori cercati di a sono: $a \geq \dfrac{9}{2}$.

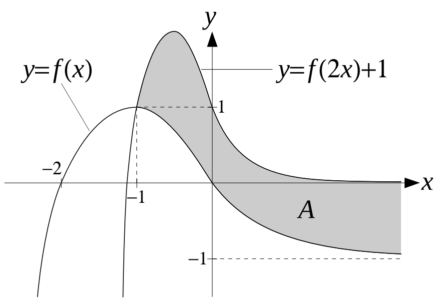
3. a) $+\infty$; b) $-\infty$; c) -2.

4. I valori cercati di a sono: $a > 1$.

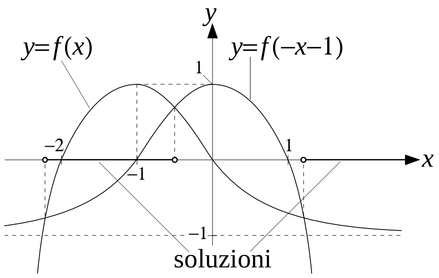
5. $v(t) = \sqrt{8}\, e^{-t}$, $d = \sqrt{8}(1 - e^{-2})$.

6. L'integrale è improprio in 2, e tramite il cambio di variabile $x = 2 - y$ si vede che si comporta come l'integrale improprio $\int_0^2 dy/y^{2a}$ ed in particolare è finito per $0 < a < \frac{1}{2}$.

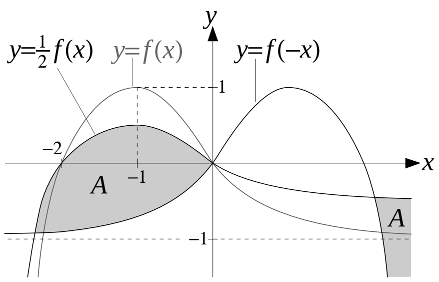
7. La soluzione è $x(t) = t^2 - \dfrac{24}{t^3}$.

8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 5.

1. a) $r = 2$, $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$; b) $r = \sqrt{2}$, $\alpha = -\dfrac{3\pi}{4}$; c) $x = -3$, $y = -\sqrt{3}$.
2. I valori cercati di a sono: $a \geq 2$.
3. a) $+\infty$; b) $-\infty$; c) -2.
4. I valori cercati di a sono: $a \geq 2$.
5. $v(t) = \sqrt{80}\, e^{2t}$, $d = \sqrt{20}(e^4 - 1)$.
6. L'integrale è improprio in 1, e tramite il cambio di variabile $x = 1 - y$ si vede che si comporta come l'integrale improprio $\int_0^1 dy/y^{3a}$ ed in particolare è finito per $0 < a < \frac{1}{3}$.
7. La soluzione è $x(t) = t - \dfrac{16}{t^4}$.
8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 6.

1. a) $r = 2$, $\alpha = \pi$; b) $r = 2\sqrt{2}$, $\alpha = -\dfrac{\pi}{4}$; c) $x = -1$, $y = -1$.
2. I valori cercati di a sono: $a \leq -\dfrac{9}{2}$.
3. a) $-\infty$; b) non esiste; c) $-\dfrac{1}{6}$.
4. I valori cercati di a sono: $a < 1$.
5. $v(t) = \sqrt{18}\, e^{-t}$, $d = \sqrt{18}(1 - e^{-2})$.
6. L'integrale è improprio in 2, e tramite il cambio di variabile $x = 2 - y$ si vede che si comporta come l'integrale improprio $\int_0^2 dy/y^{3a}$ ed in particolare è finito per $0 < a < \frac{1}{3}$.
7. La soluzione è $x(t) = t^2 - \dfrac{48}{t^4}$.
8. 

Seconda parte, gruppo 1.

1. a), b) La soluzione generale dell'equazione differenziale

$$\ddot{x} - 2a\dot{x} + (a+2)^2 x = e^{-t} \tag{*}$$

è data da $x = x_{\text{om}} + \tilde{x}$ dove x_{om} è la soluzione dell'equazione omogenea associata alla (*) e $\tilde{x}$ è una soluzione particolare di (*).
Per trovare x_{om} osservo che le soluzioni dell'equazione caratteristica sono

$$\lambda_{1,2} = a \pm \sqrt{-4a-4}\,;$$

considero dunque tre casi:

- se $a < -1$ allora le soluzioni $\lambda_{1,2}$ sono reali e distinte e quindi
$$x_{\text{om}}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R};$$
- se $a = -1$ allora $\lambda_1 = \lambda_2 = a$ e
$$x_{\text{om}}(t) = e^{at}(c_1 + c_2 t) \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R};$$
- se $a > -1$ allora le soluzioni $\lambda_{1,2}$ sono complesse e posto $\omega := \sqrt{4a+4}$,
$$x_{\text{om}}(t) = e^{at}\big(c_1\cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)\big) \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Cerco adesso la soluzione particolare $\tilde{x}$. Essendo il termine noto dell'equazione e^{-t} cerco una soluzione della forma $\tilde{x} = be^{-t}$, perlomeno quando $\lambda_{1,2} \neq -1$, vale a dire per $a \neq -1, -5$.
Sostituendo $\tilde{x} = be^{-t}$ nella (*) ottengo $be^{-t}(a^2+6a+5) = e^{-t}$, equazione che è verificata per ogni t se $b = 1/(a^2+6a+5)$. Dunque

$$\tilde{x}(t) = \frac{e^{-t}}{a^2+6a+5}\,.$$

Per $a = -1$ ho che $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, e quindi cerco una soluzione della forma $\tilde{x} = bt^2 e^{-t}$, ottenendo

$$\tilde{x}(t) = \frac{t^2 e^{-t}}{2}\,.$$

In conclusione la soluzione generale della (*) è data da

$$x(t) = \begin{cases} c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \frac{1}{a^2+6a+5} e^{-t} & \text{per } a < -1,\ a \neq -5, \\ e^{-t}\big(c_1 + c_2 t + \frac{1}{2}t^2\big) & \text{per } a = -1, \\ e^{at}\big(c_1\cos(\omega t) + c_2\sin(\omega t)\big) + \frac{1}{a^2+6a+5}e^{-t} & \text{per } a > -1. \end{cases}$$

c) Studio ora il limite delle soluzioni di (*) per $t \to +\infty$. Dalla formula precedente vedo che

- per $a = -1$ ogni soluzione converge a 0 e nessuna a 1;
- per $-1 < a < 0$ ogni soluzione converge a 0 e nessuna a 1;
- per $a \geq 0$ ogni soluzione di (*) non ha limite tranne che per $c_1 = c_2 = 0$, nel qual caso converge a 0; in ogni caso nessuna soluzione converge a 1.

Resta da esaminare il caso $a < -1$. Siccome $e^{\lambda t}$ converge a 0 o a $+\infty$ per $\lambda \neq 0$, quando $\lambda_{1,2} \neq 0$ le soluzioni di (*) convergono a $\pm\infty$ oppure a 0 a seconda del segno di $\lambda_{1,2}$ e dei coefficienti $c_{1,2}$; in ogni caso nessuna soluzione converge a 1.
Quindi l'unica possibilità di avere almeno una soluzione che converge a 1 è che $\lambda_1 = 0$ oppure $\lambda_2 = 0$, cioè che 0 risolva l'equazione caratteristica, vale a dire $a = -2$. In tal caso la soluzione generale della (*) è $x(t) = c_1 + c_2 e^{-4t} - \frac{1}{3}e^{-t}$, ed in particolare converge a c_1. Pertanto le soluzioni che convergono a 1 sono quelle della forma

$$x(t) = 1 + ce^{-4t} - \frac{e^{-t}}{3} \quad \text{con } c \in \mathbb{R}.$$

2. Se il ponte ha n campate la lunghezza di ogni campata è $\ell = 15/n$, e quindi il costo complessivo del ponte è

$$c(n) = (1+\ell^2)n + 3(n-1) = 4n - 3 + \frac{225}{n}\,.$$

Voglio dunque trovare il numero *intero positivo* n per cui $c(n)$ è minimo.
Per farlo studio la funzione

$$c(x) := 4x - 3 + \frac{225}{x} \quad \text{con } x > 0.$$

Guardando il segno della derivata

$$c'(x) = 4 - \frac{225}{x^2}$$

ottengo che $c(x)$ decresce per $x \le x_0$ con $x_0 := 7{,}5$ e cresce per $x \ge x_0$; in particolare $x_0 := 7{,}5$ è il punto di minimo assoluto.
Il problema è che 7,5 non è un numero intero e quindi non è la soluzione cercata.
Tuttavia sapendo che la funzione $c(x)$ decresce per $x \le 7{,}5$ ottengo che tra gli interi $n \le 7$ il minimo di $c(n)$ si ha per $n = 7$, mentre sapendo che $c(x)$ cresce per $x \ge 7{,}5$ ottengo che tra gli interi $n \ge 8$ il minimo di $c(n)$ si ha per $n = 8$. Per trovare il minimo tra tutti gli interi non mi resta quindi che confrontare $c(7)$ e $c(8)$: siccome

$$c(7) = 57{,}143 \pm 0{,}001 \quad \text{e} \quad c(8) = 57{,}125$$

concludo che $n = 8$ rende minimo il valore di $c(n)$ tra tutti gli interi positivi n.

3. Per dimostrare la convergenza della serie osservo che $n/4^{n^2} \ll n/4^n \ll 1/n^2$ e quindi applico il criterio del confronto asintotico (con la serie $\sum 1/n^2$, che com'è noto è finita).
   Siccome la serie è a termini positivi le somme parziali

   $$S_N := \sum_{n=1}^{N} \frac{n}{4^{n^2}}$$

   sono sempre inferiori al valore S della serie, e convergono ad S quando $N \to +\infty$; cerco quindi di trovare N in modo tale che

   $$S - S_N \le 10^{-10} \tag{1}$$

   e prendo come approssimazione di S il valore di S_N, che posso calcolare esplicitamente.
   Per ottenere la stima (1) uso la seguente stima integrale (vista a lezione):

   $$S - S_N \le \int_N^{+\infty} \frac{x}{4^{x^2}}\, dx\,.$$

   (Ricordo che questa stima richiede che la funzione integranda $x/4^{x^2}$ sia decrescente per $x \ge N$, cosa che verifico studiando il segno della derivata.)
   Utilizzando la formula $x/4^{x^2} = x \exp(-\log 4 \cdot x^2)$ e il cambio di variabile $y = -\log 4 \cdot x^2$ ottengo

   $$S - S_N \le \int_N^{+\infty} x \exp(-\log 4 \cdot x^2)\, dx = \frac{1}{2\log 4} \int_{-\infty}^{-\log 4 \cdot N^2} e^y\, dy = \frac{1}{2 \log 4 \cdot 4^{N^2}}$$

   Affinché valga la (1) basta dunque prendere N in modo tale che

   $$\frac{1}{2\log 4 \cdot 4^{N^2}} \le 10^{-10}$$

   e facendo i calcoli per $N = 1, 2, \dots$ si vede che il primo intero che va bene è $N = 4$. Pertanto

   $$S_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{3}{4^9} + \frac{1}{4^{15}} = 1{,}50001144502\dots$$

   approssima S con errore inferiore a 10^{-10}.

Seconda parte, gruppo 2.

1. Analogo al gruppo 1.
   a), b) La soluzione generale della (*) è data da

   $$x(t) = \begin{cases} c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \frac{1}{a^2+12\,a+20} e^{-2t} & \text{per } a < -2,\ a \ne -10, \\ e^{-2t}\big(c_1 + c_2 t + \frac{1}{2}t^2\big) & \text{per } a = -2, \\ e^{at}\big(c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)\big) + \frac{1}{a^2+12\,a+20} e^{-2t} & \text{per } a > -2. \end{cases}$$

con $\lambda_{1,2} := a \pm \sqrt{-8a-16}$, $\omega := \sqrt{8a+16}$, e $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
c) Per $a \neq -4$ non ci sono soluzioni di (*) che tendono a 1 per $t \to +\infty$. Per $a = -4$ le soluzioni che tendono a 1 sono

$$x(t) = 1 + ce^{-8t} - \frac{e^{-t}}{12} \quad \text{con } c \in \mathbb{R}.$$

2. Analogo al gruppo 1. Il costo complessivo di un ponte con n campate è

$$c(n) = (1+\ell^2)n + 2(n-1) = 3n - 2 + \frac{169}{n}\,,$$

e tra i numeri interi positivi n quello che rende minima questa funzione è $n = 8$.

3. Uguale al gruppo 1.

SECONDA PARTE, GRUPPO 3.

1. Analogo al gruppo 1.
a), b) La soluzione generale della (*) è data da

$$x(t) = x(t) = \begin{cases} c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} - \frac{1}{a^2+6a+5} e^{-t} & \text{per } a < -1,\ a \neq -5, \\ e^{-t}\big(c_1 + c_2 t - \frac{1}{2}t^2\big) & \text{per } a = -1, \\ e^{at}\big(c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)\big) - \frac{1}{a^2+6a+5} e^{-t} & \text{per } a > -1. \end{cases}$$

con $\lambda_{1,2} := a \pm \sqrt{-4a-4}$, $\omega := \sqrt{4a+4}$, e $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
c) Per $a \neq -2$ non ci sono soluzioni di (*) che tendono a 1 per $t \to +\infty$. Per $a = -2$ le soluzioni che tendono a 1 sono

$$x(t) = 1 + ce^{-4t} + \frac{e^{-t}}{3} \quad \text{con } c \in \mathbb{R}.$$

2. Analogo al gruppo 1. Il costo complessivo di un ponte con n campate è

$$c(n) = (1+\ell^2)n + 3(n-1) = 4n - 3 + \frac{625}{n}\,,$$

e tra i numeri interi positivi n quello che rende minima questa funzione è $n = 13$.

3. Uguale al gruppo 1.

SECONDA PARTE, GRUPPO 4.

1. Analogo al gruppo 1.
a), b) La soluzione generale della (*) è data da

$$x(t) = \begin{cases} c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} - \frac{1}{a^2+12a+20} e^{-2t} & \text{per } a < -2,\ a \neq -10, \\ e^{-2t}\big(c_1 + c_2 t - \frac{1}{2}t^2\big) & \text{per } a = -2, \\ e^{at}\big(c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)\big) - \frac{1}{a^2+12a+20} e^{-2t} & \text{per } a > -2. \end{cases}$$

con $\lambda_{1,2} := a \pm \sqrt{-8a-16}$, $\omega := \sqrt{8a+16}$, e $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
c) Per $a \neq -4$ non ci sono soluzioni di (*) che tendono a 1 per $t \to +\infty$. Per $a = -4$ le soluzioni che tendono a 1 sono

$$x(t) = 1 + ce^{-8t} + \frac{e^{-t}}{12} \quad \text{con } c \in \mathbb{R}.$$

2. Analogo al gruppo 1. Il costo complessivo di un ponte con n campate è

$$c(n) = (1+\ell^2)n + 2(n-1) = 3n - 2 + \frac{400}{n}\,,$$

e tra i numeri interi positivi n quello che rende minima questa funzione è $n = 12$.

3. Uguale al gruppo 1.

Commenti

- Seconda parte, esercizio 1. Nella soluzione dell'equazione omogenea molti dei presenti hanno scritto $\omega := \sqrt{-4a-4}$ invece di $\omega := \sqrt{4a+4}$ per i gruppi 1 e 3 (ed un analogo errore è stato fatto per i gruppi 2 e 4).

- Seconda parte, esercizio 1. Diversi dei presenti hanno deciso le soluzioni dell'equazione caratteristica sono sempre complesse.

- Seconda parte, esercizio 2. Pochi dei presenti hanno affrontato questo esercizio, e di questi quasi tutti hanno dato come risposta il numero *reale* che minimizza la funzione $c(n)$, a dispetto del fatto che questo numero non è intero.

- Seconda parte, esercizio 3. La convergenza della serie può essere dimostrata in molti altri modi, per esempio usando il criterio del rapporto o quello della radice.

Prima parte, gruppo 1.

1. Le soluzioni sono $0 \leq x \leq \frac{\pi}{12}$, $\frac{\pi}{6} < x \leq \frac{\pi}{3}$.

2. L'equazione è $y = 4ex + 3e$.

3. Il polinomio è $6x^2 - 7x^6$.

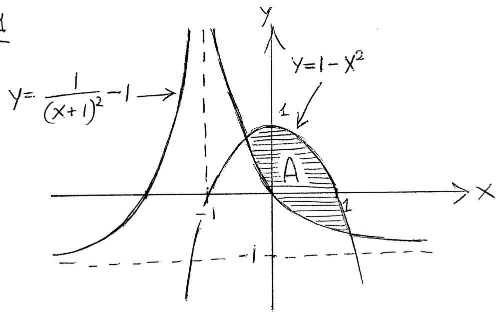
4. $c \ll b \ll a \ll d$.

5. Per ogni $a > \frac{1}{2}$.

6. La velocità è $\vec{v} = \big(t^2 - 4\,; 4t\big)$; la distanza è $d = \frac{13}{3}$.

7. L'equazione si riduce all'identità $2\lambda + (4\lambda^2 + 2\lambda + 12)t^2 = 0$ che è verificata per ogni t se e solo se $2\lambda = 0$ e $4\lambda^2 + 2\lambda + 12 = 0$. Questo sistema non ha soluzioni.

8. G1



Prima parte, gruppo 2.

1. Le soluzioni sono $0 \leq x < \frac{\pi}{6}$, $\frac{2\pi}{9} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$.

2. L'equazione è $y = \frac{1}{e}$.

3. Il polinomio è $2x^2 - x^4$.

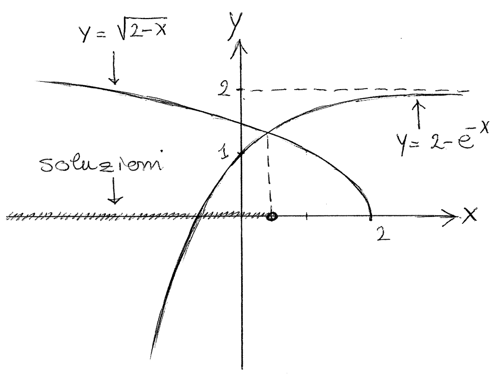
4. $c \ll b \ll a \ll d$.

5. Per ogni $a > 2$.

6. La velocità è $\vec{v} = \big(t^4 - 9\,; 6t^2\big)$; la distanza è $d = \frac{46}{5}$.

7. L'equazione si riduce all'identità $(2\lambda - 2) + (4\lambda^2 + 6\lambda - 10)t^2 = 0$ che è verificata per ogni t se e solo se $2\lambda - 2 = 0$ e $4\lambda^2 + 6\lambda - 10 = 0$. L'unica soluzione di questo sistema è $\lambda = 1$.

8. G2



PRIMA PARTE, GRUPPO 3.

1. Le soluzioni sono $0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4} < x \leq \frac{\pi}{2}$.

2. L'equazione è $y = 4ex - 3e$.

3. Il polinomio è $1 + 4x^3 + 9x^6$.

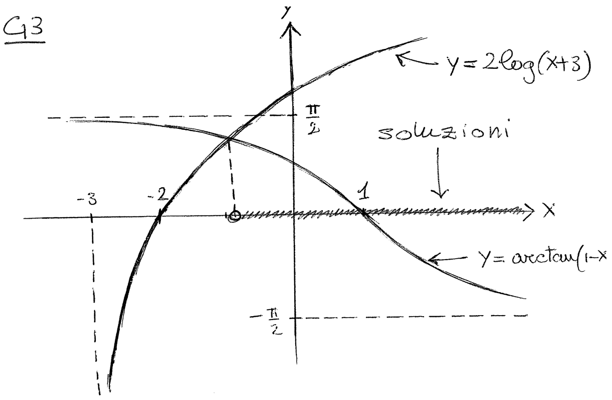
4. $a \ll c \ll b \ll d$.

5. Per ogni $a > 0$.

6. La velocità è $\vec{v} = \big(4t\,;\,t^2 - 4\big)$; la distanza è $d = \frac{13}{3}$.

7. L'equazione si riduce all'identità $(2\lambda - 2) + (4\lambda^2 + 2\lambda - 6)t^2 = 0$ che è verificata per ogni t se e solo se $2\lambda - 2 = 0$ e $4\lambda^2 + 2\lambda - 6 = 0$. L'unica soluzione di questo sistema è $\lambda = 1$.

8. G3



PRIMA PARTE, GRUPPO 4.

1. Le soluzioni sono $-\frac{\pi}{3} \leq x \leq -\frac{\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{6} < x \leq 0$.

2. L'equazione è $y = -\frac{2}{e}x + \frac{3}{e}$.

3. Il polinomio è $6x^2 - 11\,x^6$.

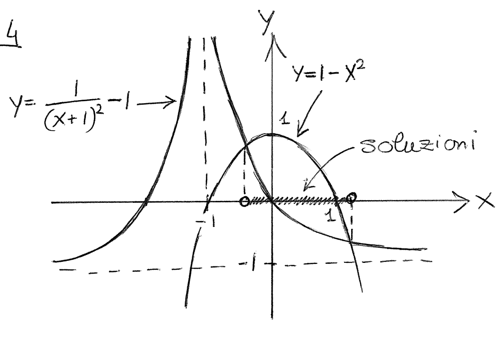
4. $d \ll b \ll a \ll c$.

5. Per ogni $a > \frac{1}{3}$.

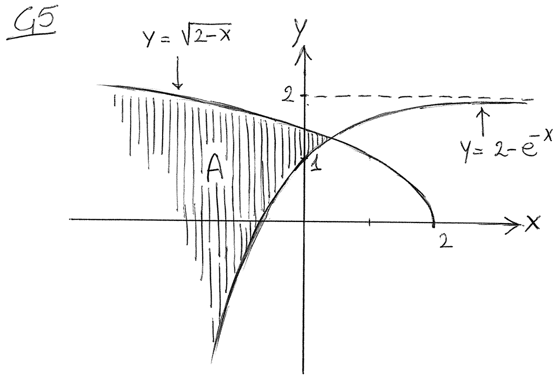
6. La velocità è $\vec{v} = \big(6t^2\,;\,t^4 - 9\big)$; la distanza è $d = \frac{46}{5}$.

7. L'equazione si riduce all'identità $(2\lambda + 4) + (4\lambda^2 + 2\lambda - 12)t^2 = 0$ che è verificata per ogni t se e solo se $2\lambda + 4 = 0$ e $4\lambda^2 + 2\lambda - 12 = 0$. L'unica soluzione di questo sistema è $\lambda = -2$.

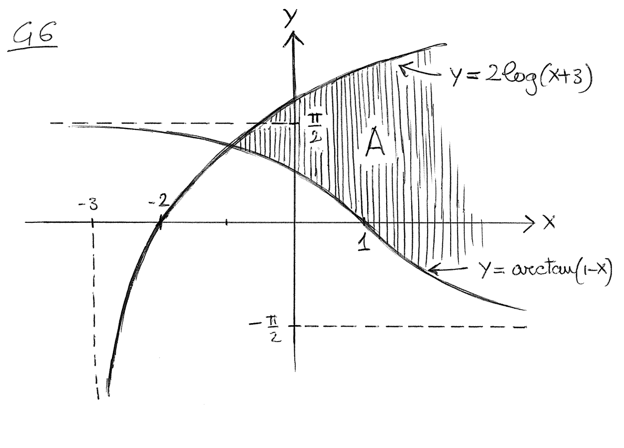
8. G4



PRIMA PARTE, GRUPPO 5.

1. Le soluzioni sono $-\frac{\pi}{3} \leq x < -\frac{\pi}{6}$, $-\frac{\pi}{9} \leq x \leq 0$.
2. L'equazione è $y = \frac{1}{e}$.
3. Il polinomio è $2x^2 - 3x^4$.
4. $b \ll c \ll a \ll d$.
5. Per ogni $a > 3$.
6. La velocità è $\vec{v} = \big(4t\,;\, t^2 - 4\big)$; la distanza è $d = \frac{13}{3}$.
7. L'equazione si riduce all'identità $(2\lambda + 2) + (2\lambda^2 + 6\lambda)t^2 = 0$ che è verificata per ogni t se e solo se $2\lambda + 2 = 0$ e $2\lambda^2 + 6\lambda = 0$. Questo sistema non ha soluzioni.
8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 6.

1. Le soluzioni sono $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq -\frac{\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{4} < x \leq 0$.
2. L'equazione è $y = -4ex - 3e$.
3. Il polinomio è $1 + 4x^3 + 7x^6$.
4. $d \ll a \ll c \ll b$.
5. Per nessun a.
6. La velocità è $\vec{v} = \big(t^4 - 9\,;\, 6t^2\big)$; la distanza è $d = \frac{46}{5}$.
7. L'equazione si riduce all'identità $(2\lambda + 3) + (4\lambda^2 + 2\lambda - 6)t^2 = 0$ che è verificata per ogni t se e solo se $2\lambda + 3 = 0$ e $4\lambda^2 + 2\lambda - 6 = 0$. L'unica soluzione di questo sistema è $\lambda = -3/2$.
8. 

Seconda parte, gruppo 1.

1. Parto direttamente dal punto b), di cui il punto a) è un caso particolare. Ricordo che

$$f(x) := \log(1+2x^a) - 2\big(\log(1+x)\big)^a .$$

Osservo innanzitutto che usando lo sviluppo al primo ordine $\log(1+t) \sim t$ ottengo gli sviluppi

$$\log(1+2x^a) \sim 2x^a\,, \quad 2\big(\log(1+x)\big)^a \sim 2x^a\,,$$

che però non bastano a trovare la parte principale di $f(x)$.
Procedo dunque con lo sviluppo al secondo ordine $\log(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + O(t^3)$:

$$\begin{aligned}
\log(1+2x^a) &= 2x^a - 2x^{2a} + O(x^{3a})\,,\\
\big(\log(1+x)\big)^a &= \Big(x - \frac{x^2}{2} + O(x^3)\Big)^a\\
&= x^a\Big(1 - \frac{x}{2} + O(x^2)\Big)^a\\
&= x^a\Big(1 - \frac{ax}{2} + O(x^2)\Big) = x^a - \frac{a}{2}x^{a+1} + O(x^{a+2})\,,
\end{aligned}$$

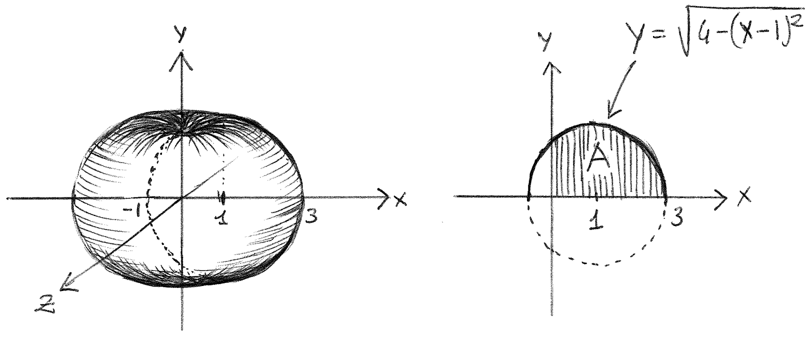
dove nel penultimo passaggio ho usato lo sviluppo $(1+t)^a = 1+at+O(t^2)$ con $t := -\frac{1}{2}x+O(x^2)$.
Mettendo insieme questi sviluppi ottengo infine

$$f(x) = -2x^{2a} + O(x^{3a}) + ax^{a+1} + O(x^{a+2})\,. \tag{1}$$

Distinguo ora tre casi, a seconda che $2a$ sia maggiore o minore di $a+1$:
- se $a < 1$ allora $2a < a+1$ e quindi p.p.$(f(x)) = -2x^{2a}$,
- se $a = 1$ allora $2a = a+1 = 2$ e quindi p.p.$(f(x)) = -x^2$,
- se $a > 1$ allora $2a > a+1$ e quindi p.p.$(f(x)) = ax^{a+1}$.

a) In particolare per $a = 2$ si ha p.p.$(f(x)) = 2x^3$.

2. a) Si può supporre che la retta sia l'asse delle y e che il centro del cerchio sia nel punto $(1,0)$. In tal caso il solido V è quello rappresentato a sinistra nella figura sotto.



b) Sia A la figura piana a destra nella figura sopra, vale a dire la di piano delimitata dagli assi e dalla semicirconferenza superiore di raggio 2 e centro $(1,0)$, vale a dire il grafico della funzione

$$f(x) := \sqrt{4-(x-1)^2}\,.$$

Indico ora con V' il solido ottenuto ruotando A attorno all'asse delle y. Chiaramente il volume di V è il doppio di quello di V', e quest'ultimo può essere calcolato usando una delle due formule per i volumi dei solidi di rotazione:

$$\text{volume}(V) = 2\,\text{volume}(V') = 4\pi\int_0^3 x\,f(x)\,dx = 4\pi\int_0^3 x\,\sqrt{4-(x-1)^2}\,dx\,. \tag{2}$$

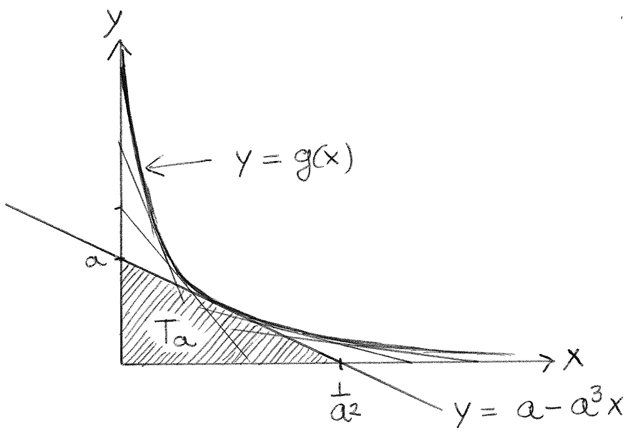
Il calcolo di questo integrale richiede un po' di passaggi:

$$\begin{aligned}\int_0^3 x\sqrt{4-(x-1)^2}\,dx &= \int_{-1}^2 (y+1)\sqrt{4-y^2}\,dy \\ &= \int_{-1}^2 y\sqrt{4-y^2}\,dy + 2\int_{-1}^2 \sqrt{1-(y/2)^2}\,dy \\ &= \int_0^3 \frac{\sqrt{t}}{2}dt + \int_{-\pi/6}^{\pi/2} 4\cos^2 u\,du \\ &= \int_0^3 \frac{t^{1/2}}{2}dt + \int_{-\pi/6}^{\pi/2} 2+2\cos(2u)\,du \\ &= \left|\frac{t^{3/2}}{3}\right|_0^3 + \Big|2u+\sin(2u)\Big|_{-\pi/6}^{\pi/2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{4\pi}{3}\,. \end{aligned} \tag{3}$$

(Nel primo passaggio ho usato il cambio di variabile $y = x - 1$, nel secondo passaggio ho spezzato l'integrale come somma di due integrali e ho raccolto 4 all'interno della radice nel secondo integrale, nel terzo ho usato il cambio di variabile $t = 4 - y^2$ per il primo integrale e $y/2 = \sin u$ per il secondo, nel quarto ho usato la formula $2\cos^2 u = \cos(2u) - 1$.)
Mettendo insieme la (2) e la (3) ottengo infine

$$\text{volume}(V) = 4\pi\int_0^3 x\sqrt{4-(x-1)^2}\,dx = 6\sqrt{3}\,\pi + \frac{16\,\pi^2}{3}\,.$$

3. a) L'insieme A è raffigurato nella figura sotto.



b) La retta che contiene l'ipotenusa del triangolo T_a ha equazione

$$y = a - a^3 x$$

e quindi, fissato $x > 0$, $g(x)$ corrisponde al più grande dei valori $a - a^3x$ al variare di a tra i numeri positivi, vale a dire

$$g(x) = \max_{a>0} f_x(a) \quad \text{dove} \quad f_x(a) := a - a^3 x\,.$$

Studiando il segno della derivata della funzione $f_x(a)$ (rispetto alla variabile a, ovviamente) si ottiene che il massimo relativamente alla semiretta $a > 0$ viene raggiunto per $a = \frac{1}{\sqrt{3x}}$, e quindi

$$g(x) = f_x\left(\frac{1}{\sqrt{3x}}\right) = \frac{2}{\sqrt{27\,x}}\,.$$

c) In questo caso

$$g(x) = \max_{a\geq 1} f_x(a)\,.$$

Studiando il segno della derivata di $f_x(a)$ si ottiene che il massimo relativamente alla semiretta $a \geq 1$ viene raggiunto per $a = 1/\sqrt{3x}$ se $0 < x < \frac{1}{3}$, e per $a = 1$ se $x \geq \frac{1}{3}$. Quindi

$$g(x) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{27\,x}} & \text{per } 0 < x < \frac{1}{3}, \\ 1 - x & \text{per } x \geq \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Seconda parte, gruppo 2.

1. Analogo al gruppo 1.

   b) Si ottiene come prima cosa lo sviluppo

   $$f(x) = -2x^{2a} + O(x^{3a}) - ax^{a+1} + O(x^{a+2})$$

   da cui si deduce che:
   - se $a < 1$ allora p.p.$(f(x)) = -2x^{2a}$,
   - se $a = 1$ allora p.p.$(f(x)) = -3x^2$,
   - se $a > 1$ allora p.p.$(f(x)) = -ax^{a+1}$.

   a) In particolare per $a = 2$ si ha p.p.$(f(x)) = -2x^3$.

2. Analogo al gruppo 1. In questo caso il cerchio ha centro $\big(\sqrt{2}, 0\big)$ e raggio 2, la semicirconferenza che delimita A è il grafico della funzione

   $$f(x) := \sqrt{4 - \big(x - \sqrt{2}\big)^2}\,,$$

   ed il calcolo del volume di V dà

   $$\text{volume}(V) = 4\pi \int_0^{2+\sqrt{2}} x\,\sqrt{4 - \big(x - \sqrt{2}\big)^2}\,dx = \frac{20\sqrt{2}\,\pi}{3} + 6\sqrt{2}\,\pi^2\,.$$

3. Analogo al gruppo 1.

   b) Fissato $x > 0$, $g(x)$ è il valore massimo della funzione $f_x(a) := a - a^2 x$ tra tutti gli $a > 0$. Tale valore massimo viene raggiunto per $a = \frac{1}{2x}$ e vale

   $$g(x) = \frac{1}{4x}\,.$$

   c) In questo caso $g(x)$ è il valore massimo della funzione $f_x(a)$ tra tutti gli $a \geq 1$, e vale

   $$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{4x} & \text{per } 0 < x < \frac{1}{2}, \\ 1 - x & \text{per } x \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Seconda parte, gruppo 3.

1. Analogo al gruppo 1.

   b) Si ottiene come prima cosa lo sviluppo

   $$f(x) = -8x^{2a} + O(x^{3a}) + 2ax^{a+1} + O(x^{a+2})$$

   da cui si deduce che:
   - se $a < 1$ allora p.p.$(f(x)) = -8x^{2a}$,
   - se $a = 1$ allora p.p.$(f(x)) = -6x^2$,
   - se $a > 1$ allora p.p.$(f(x)) = 2ax^{a+1}$.

   a) In particolare per $a = 2$ si ha p.p.$(f(x)) = 4x^3$.

2. Analogo al gruppo 1. In questo caso il cerchio ha centro $\big(2, 0\big)$ e raggio 4, la semicirconferenza che delimita A è il grafico della funzione

   $$f(x) := \sqrt{16 - (x - 2)^2}\,,$$

ed il calcolo del volume di V dà

$$\text{volume}(V) = 4\pi \int_0^6 x\sqrt{16-(x-2)^2}\,dx = 48\sqrt{3}\,\pi + \frac{128\,\pi^2}{3}\,.$$

3. Analogo al gruppo 1.

b) Fissato $x > 0$, $g(x)$ è il valore massimo della funzione $f_x(a) := a - \frac{a^2}{2}x$ tra tutti gli $a > 0$. Tale valore massimo viene raggiunto per $a = \frac{1}{x}$ e vale

$$g(x) = \frac{1}{2x}\,.$$

c) In questo caso $g(x)$ è il valore massimo della funzione $f_x(a)$ tra tutti gli $a \geq 1$, e vale

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x} & \text{per } 0 < x < 1, \\ 1 - \frac{x}{2} & \text{per } x \geq 1. \end{cases}$$

SECONDA PARTE, GRUPPO 4.

1. Analogo al gruppo 1.

b) Si ottiene come prima cosa lo sviluppo

$$f(x) = -8x^{2a} + O(x^{3a}) - 2ax^{a+1} + O(x^{a+2})$$

da cui si deduce che:

- se $a < 1$ allora p.p.$(f(x)) = -8x^{2a}$,
- se $a = 1$ allora p.p.$(f(x)) = -10\,x^2$,
- se $a > 1$ allora p.p.$(f(x)) = -2ax^{a+1}$.

a) In particolare per $a = 2$ si ha p.p.$(f(x)) = -4x^3$.

2. Analogo al gruppo 1. In questo caso il cerchio ha centro $\big(2\sqrt{2}, 0\big)$ e raggio 4, la semicirconferenza che delimita A è il grafico della funzione

$$f(x) := \sqrt{16 - \big(x - 2\sqrt{2}\big)^2}\,,$$

ed il calcolo del volume di V dà

$$\text{volume}(V) = 4\pi \int_0^{4+2\sqrt{2}} x\sqrt{16 - \big(x-2\sqrt{2}\big)^2}\,dx = \frac{160\sqrt{2}\,\pi}{3} + 48\sqrt{2}\,\pi^2\,.$$

3. Analogo al gruppo 1.

b) Fissato $x > 0$, $g(x)$ è il valore massimo della funzione $f_x(a) := a - \frac{a^3}{2}x$ tra tutti gli $a > 0$. Tale valore massimo viene raggiunto per $a = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3x}}$ e vale

$$g(x) = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{27\,x}}\,.$$

c) In questo caso $g(x)$ è il valore massimo della funzione $f_x(a)$ tra tutti gli $a \geq 1$, e vale

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{27\,x}} & \text{per } 0 < x < \frac{2}{3}, \\ 1 - \frac{x}{2} & \text{per } x \geq \frac{2}{3}. \end{cases}$$

COMMENTI

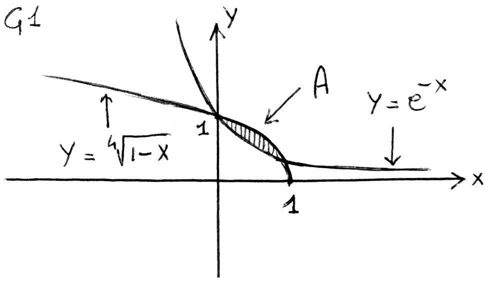
- Seconda parte, esercizio 1. Molti dei presenti hanno svolto i calcoli in modo sostanzialmente corretto arrivando alla formula (1), ma a questo punto quasi tutti hanno dato per scontato che l'esponente $a + 1$ è sempre minore di $2a$ (forse pensando che a è intero) e quindi non hanno distinto tre casi come sopra, ma hanno dato come unica parte principale di $f(x)$ quella corrispondente al caso $a > 1$.

- Seconda parte, esercizio 2. Nessuno dei presenti ha impostato correttamente questo esercizio, e molti hanno sbagliato persino il disegno! Questo è sorprendente, visto che si tratta di un esercizio standard (almeno a livello di impostazione—il calcolo dell'integrale è in realtà abbastanza complicato).

- Seconda parte, esercizio 3. Nessuno dei presenti ha impostato correttamente questo esercizio, che peraltro non era facile.

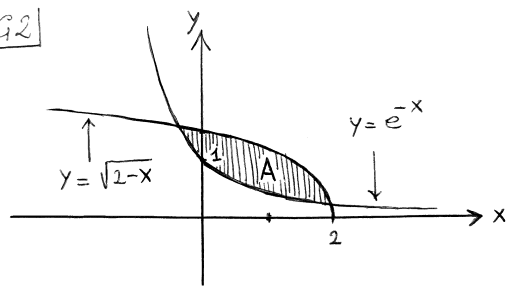
Prima parte, gruppo 1.

1. a) $r = 2\sqrt{2}$; $\alpha = 3\pi/4$; b) $r = 3$; $\alpha = -\pi/2$; c) $x = -\sqrt{3}$; $y = -3$.
2. Il punto di minimo è $x = 1/2$. Il punto di massimo non esiste.
3. a) $\dfrac{3^x \log 3}{1 + 3^{2x}}$; b) $(1 + 2x^2)\,(1 + x^2)^{-1/2}$; c) $2 \log x + 2$.
4. I valori cercati sono $a \geq 3$.
5. Il raggio di convergenza è $R = +\infty$.
6. L'integrale è improprio semplice in $\pi/2$ ed è finito per $0 < a < 1/2$.
7. La soluzione cercata è $x(t) = \tan\bigl(e^t(t-1) + \pi/4\bigr)$.
8. G1



Prima parte, gruppo 2.

1. a) $r = 2\sqrt{3}$; $\alpha = 2\pi/3$; b) $r = 2$; $\alpha = -\pi/2$; c) $x = -1$; $y = 1$.
2. Il punto di minimo è $x = 1/e^3$. Il punto di massimo non esiste.
3. a) $(2x + 3x^3)\,(1 + x^2)^{-1/2}$; b) $\dfrac{2^x \log 2}{1 + 2^{2x}}$; c) $-\dfrac{2}{\sin x \, \cos x}$.
4. I valori cercati sono $a \geq 2$.
5. Il raggio di convergenza è $R = 0$.
6. L'integrale è improprio semplice in $\pi/2$ ed è finito per $0 < a < 1$.
7. La soluzione cercata è $x(t) = \tan\bigl(e^t(t-1) + \pi/3\bigr)$.
8. G2



Prima parte, gruppo 3.

1. a) $r = \sqrt{2}$; $\alpha = 3\pi/4$; b) $r = 4$; $\alpha = \pi/2$; c) $x = -1$; $y = -\sqrt{3}$.
2. Il punto di minimo è $x = 1/e^2$. Il punto di massimo è $x = 1$.

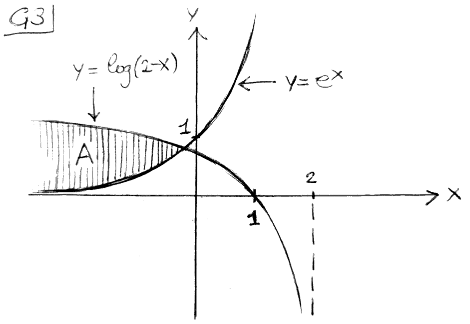
3. a) $\dfrac{2^x \log 2}{\sqrt{1-2^{2x}}}$; b) $(3x^2+4x^4)\,(1+x^2)^{-1/2}$; c) $\dfrac{1}{12\,(x+1)}$.

4. I valori cercati sono $a > 2$.

5. Il raggio di convergenza è $R = 2$.

6. L'integrale è improprio semplice in 1 ed è finito per $0 < a < 1/4$.

7. La soluzione cercata è $x(t) = \tan\big(e^t(t-1) - \pi/4\big)$.

8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 4.

1. a) $r = 2$; $\alpha = -2\pi/3$; b) $r = 2$; $\alpha = \pm\pi$; c) $x = -\sqrt{2}$; $y = \sqrt{2}$.

2. Il punto di minimo è $x = 1/2$. Il punto di massimo non esiste.

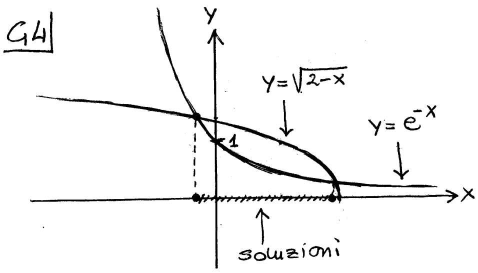
3. a) $(1+3x^4)\,(1+x^4)^{-1/2}$; b) $\dfrac{3^x \log 3}{\sqrt{1-3^{2x}}}$; c) $3\log x + 3$.

4. I valori cercati sono $a \leq 3$.

5. Il raggio di convergenza è $R = 1/2$.

6. L'integrale è improprio semplice in 1 ed è finito per $0 < a < 1$.

7. La soluzione cercata è $x(t) = \log\big(\log(1+t^2) + e^2\big)$.

8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 5.

1. a) $r = 2$; $\alpha = 3\pi/4$; b) $r = \sqrt{2}$; $\alpha = \pm\pi$; c) $x = -\sqrt{3}$; $y = 1$.

2. Il punto di minimo è $x = 1/e^2$. Il punto di massimo non esiste.

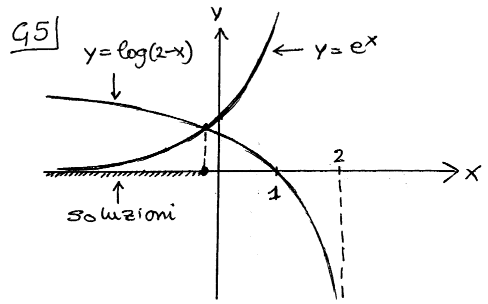
3. a) $-\dfrac{2^x \log 2}{\sqrt{1-2^{2x}}}$; b) $(2x+4x^5)\,(1+x^4)^{-1/2}$; c) $\dfrac{2}{\sin x\,\cos x}$.

4. I valori cercati sono $a \leq 2$.

5. Il raggio di convergenza è $R = 5/4$.

6. L'integrale è improprio semplice in 1 ed è finito per $0 < a < 1/3$.

7. La soluzione cercata è $x(t) = \log\big(\log(1+t^2) + e^3\big)$.

8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 6.

1. a) $r = 2$; $\alpha = 5\pi/6$; b) $r = 3$; $\alpha = \pm\pi$; c) $x = -2$; $y = 2$.

2. Il punto di minimo è $x = 1/e^3$. Il punto di massimo è $x = 1$.

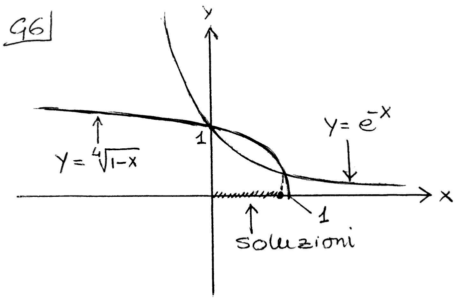
3. a) $(3x^2 + 5x^6)\,(1+x^4)^{-1/2}$; b) $-\dfrac{3^x \log 3}{\sqrt{1-3^{2x}}}$; c) $\dfrac{1}{20\,(x+1)}$.

4. I valori cercati sono $a < 2$.

5. Il raggio di convergenza è $R = 4/5$.

6. L'integrale è improprio semplice in 1 ed è finito per $0 < a < 1$.

7. La soluzione cercata è $x(t) = \log\big(\log(1+t^2) + e\big)$.

8. 

SECONDA PARTE, GRUPPO 1.

1. a) La funzione $\log\log x$ è definita per $x > 1$ e positiva per $x \geq e$, cresce su tutto il dominio, e infine converge a $+\infty$ per $x \to +\infty$ e a $-\infty$ per $x \to 1^+$. (Ometto il disegno del grafico.)

   Considero ora il punto c), visto che include il punto b) come caso particolare. Procedo al solito modo, ponendo

$$f(x) := \frac{\log\log x}{\sqrt{\log x}}$$

   e riscrivendo la disuguaglianza

$$\log\log x \leq a\sqrt{\log x} \quad \text{per ogni } x > 1 \tag{1}$$

   come

$$f(x) \leq a \quad \text{per ogni } x > 1,$$

che equivale a dire

$$M \leq a \quad \text{con } M := \max_{x>1} f(x)\,.$$

(Al solito, se il massimo non esiste va sostituito con l'estremo superiore.)
Per trovare M osservo che la derivata

$$f'(x) = \frac{2 - \log\log x}{2x(\log x)^{3/2}}$$

si annulla solo per $x = \exp(e^2)$, e confronto quindi il valore $f(x)$ per $x = \exp(e^2)$ con i limiti di $f(x)$ per $x \to 1^+$ e $x \to +\infty$:

$$f(\exp(e^2)) = 2/e\,, \quad f(1^+) = -\infty\,, \quad f(+\infty) = 0\,.$$

Dal confronto deduco che $x = \exp(e^2)$ è il punto di massimo assoluto di $f(x)$ e che $2/e$ è il valore massimo. In conclusione i valori di a per cui vale la (1) sono

$$a \geq 2/e\,.$$

b) In particolare la (1) vale per $a = 1$ perché $1 \geq 2/e$.

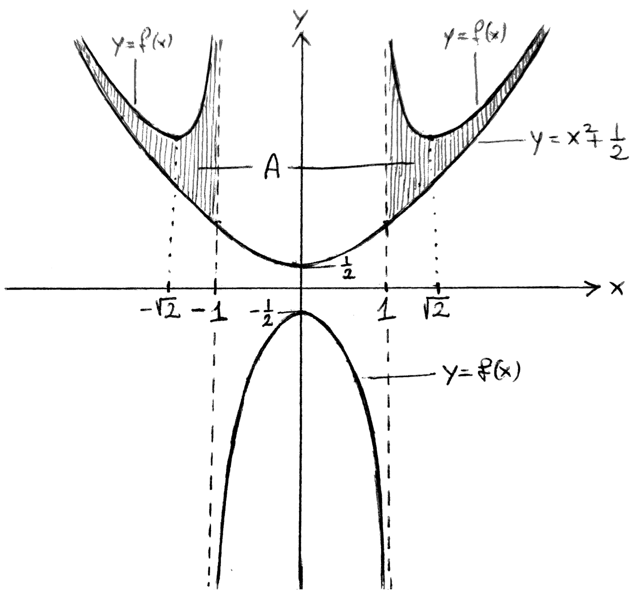
2. a) La funzione

$$f(x) := \frac{2x^4 - x^2 + 1}{2x^2 - 2}$$

è definita per $x \neq \pm 1$, positiva per $x > 1$ e $x < -1$ e negativa altrimenti (si vede infatti che il numeratore non si annulla mai e ha segno sempre positivo). Siccome la funzione è pari, per disegnarla posso limitarmi a studiarla per $x > 0$. In particolare noto che $f(x)$ tende a $+\infty$ per $x \to +\infty$ e per $x \to 1^+$, e tende a 0∞ per $x \to 1^-$, e studiando il segno della derivata

$$f'(x) = \frac{4x^3(x^2 - 2)}{2(x^2 - 1)^2}$$

vedo che la funzione decresce per $0 \leq x < 1$ e per $1 < x \leq \sqrt{2}$, e cresce per $x \geq \sqrt{2}$. Utilizzando queste informazioni traccio il grafico riportato nella figura sotto.



b) Per disegnare l'insieme A devo capire per quali x il grafico $y = f(x)$ sta sopra al grafico $y = x^2 + \frac{1}{2}$ (che è una parabola), e questo vuol dire risolvere la disequazione $f(x) \geq x^2 + \frac{1}{2}$, che si riduce fatte le dovute semplificazioni a $1/(x^2 - 1) \geq 0$. Chiaramente le soluzioni di questa disequazione sono $x > 1$ e $x < -1$. Utilizzando questa informazione ottengo l'insieme A riportato nella figura sopra.

c) Usando il fatto che sia $f(x)$ che $x^2 + \frac{1}{2}$ sono funzioni pari ottengo che l'insieme A è simmetrico rispetto all'asse delle y, e quindi la sua area è esattamente il doppio dell'area della parte di A

che sta a destra dell'asse y, che indico con A', e quindi

$$\text{area}(A) = 2\text{area}(A') = 2\int_1^{+\infty} f(x) - \big(x^2 + \tfrac{1}{2}\big)\, dx = 2\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1}\,.$$

L'integrale così ottenuto è improprio in 1 e in $+\infty$ e vale $+\infty$ oppure un numero finito perché la funzione integranda è sempre positiva. Per capire quale dei due casi si verifica lo spezzo come somma di due integrali impropri semplici. Il primo, improprio in $+\infty$, è finito per confronto asintotico:

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1} \approx \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \approx \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} < +\infty$$

Il secondo, improprio in 1, lo riconduco ad un integrale improprio in 0 usando il cambio di variabile $x = y + 1$:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x^2-1} = \int_0^1 \frac{dy}{y^2+2y} \approx \int_0^1 \frac{dy}{2y} \approx \int_0^1 \frac{dy}{y} = +\infty$$

Concludo che A ha area infinita.

3. La serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \big[(1+n)^{n^a} - 1\big] \tag{2}$$

è a termini positivi (osservo infatti che $(1+n)^{n^a} > 1$ per ogni n e per ogni a) e quindi ammette solo due comportamenti: o converge a un numero finito e positivo, oppure diverge a $+\infty$.
Studio il comportamento dell'addendo della serie

$$(1+n)^{n^a} - 1 = \exp\big(n^a \log(1+n)\big) - 1$$

e in particolare osservo che

$$\lim_{n\to+\infty} n^a \log(1+n) = \lim_{n\to+\infty} n^a \log n = \begin{cases} +\infty & \text{se } a \geq 0, \\ 0 & \text{se } a < 0, \end{cases}$$

da cui segue che

$$\lim_{n\to+\infty} \big((1+n)^{n^a} - 1\big) = \begin{cases} +\infty & \text{se } a \geq 0, \\ 0 & \text{se } a < 0, \end{cases}$$

Dunque per $a \geq 0$ la serie (2) diverge a $+\infty$.
Invece per $a < 0$ il fatto che l'addendo della serie tende a 0 non è sufficiente a stabilire il comportamento della serie. Usando però lo sviluppo $e^x - 1 \sim x$ con $x := n^a \log(1+n)$, e posso farlo perché $x \to 0$, ottengo che

$$(1+n)^{n^a} - 1 = \exp\big(n^a \log(1+n)\big) - 1 \sim n^a \log(1+n) \sim n^a \log n\,,$$

e quindi la serie (2) si comporta come

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^a \log n \tag{3}$$

Ora, per $-1 \leq a < 0$ questa serie diverge a $+\infty$ per confronto asintotico con la serie $\sum n^a$ (osservo infatti che $n^a \log n \gg n^a$ e che $\sum n^a = +\infty$).
Invece per $a < -1$ la serie in (3) converge per confronto asintotico con la serie $\sum n^b$ dove $b := \frac{1}{2}(-1+a)$ (osservo infatti che $n^a \log n \ll n^b$ e che $\sum n^b < +\infty$).
Riassumendo: le serie in (2) converge per $a < -1$ e diverge a $+\infty$ per $a \geq 1$.

SECONDA PARTE, GRUPPO 2.

1. a) Uguale al gruppo 1.

   c) Simile al gruppo 1. La disuguaglianza $\log\log x \leq a\sqrt[3]{\log x}$ è soddisfatta per ogni $x > 1$ se e solo se $a \geq M$ dove M è il valore massimo tra tutti gli $x > 1$ di

$$f(x) := \frac{\log\log x}{\sqrt[3]{\log x}}\,.$$

Si vede che il punto di massimo assoluto di $f(x)$ è $x = \exp(e^3)$ e quindi $M = f(\exp(e^3)) = 3/e$. Pertanto i valori di a cercati sono $a \geq 3/e$.

b) Siccome $1 < 3/e$, la disuguaglianza $\log \log x \leq \sqrt[3]{\log x}$ non è soddisfatta per ogni $x > 1$.

2. Molto simile al gruppo 1. Le principali differenze nel grafico di $f(x)$ sono che la funzione è definita per $x \neq \pm 1/2$, (e quindi i due asintoti verticali hanno equazione $x = \pm 1/2$) e i punti di minimo locale sono $x = \pm\sqrt{5}/2$. Inoltre
$$\text{area}(A) = 2 \int_{1/2}^{+\infty} f(x) - \big(x^2 + 1\big)\, dx = 2 \int_{1/2}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - \frac{1}{4}}$$
e questo integrale improprio diverge a $+\infty$.

3. Uguale al gruppo 1.

Commenti

- Seconda parte, esercizio 1. Sorprendentemente, molti dei presenti hanno sbagliato a disegnare il grafico $y = \log \log x$.

- Seconda parte, esercizio 1. Alcuni dei presenti hanno svolto correttamente i calcoli necessari a rispondere al punto c), senza però riportare le conclusioni corrette, o addirittura riportando delle conclusioni nettamente sbagliate, ed infatti hanno poi sbagliato a rispondere al punto b). Sembra quasi che queste persone hanno applicato una procedura risolutiva che non hanno del tutto capito.

- Seconda parte, esercizio 2 (faccio riferimento al gruppo 1 ma lo stesso discorso si applica al gruppo 2). Molti dei presenti hanno disegnato l'insieme A senza risolvere la disequazione $f(x) \geq x^2 + \frac{1}{2}$, ed infatti hanno ottenuto un disegno sbagliato.
  In particolare molti hanno considerato i punti (x, y) con $-1 < x < 1$ e $y \geq x^2 + \frac{1}{2}$ come parte dell'insieme A, mentre non lo sono.

- Seconda parte, esercizio 2. Pochissimi dei presenti hanno disegnato correttamente l'insieme A, e di questi nessuno ha impostato e discusso correttamente l'integrale improprio che ne determina l'area. Eppure si tratta di un esercizio abbastanza di routine.

- Seconda parte, esercizio 3. Nessuno dei presenti ha risolto anche parzialmente questo esercizio, ma d'altronde si tratta di un esercizio relativamente complicato.

Prima parte, gruppo 1.

1. Il valore cercato è $\alpha = 7\pi/6$.

2. Il polinomio di Taylor cercato è $f(x) = 2 + 2x^2 - 2x^4$.

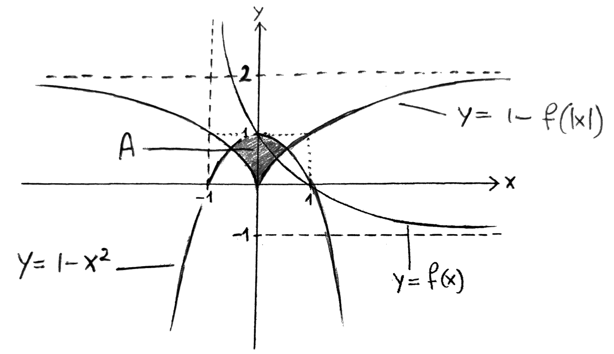
3. L'ordine corretto è: $c \ll b \ll a \ll d$.

4. La velocità di P è $\big(e^{-2t}(-\sin t - 2\cos t),\, e^{-2t}(2\sin t - \cos t)\big)$. La distanza è $d = \sqrt{5}/2$.

5. $f'(x) = \dfrac{x^4}{\sqrt{1-x^2}}$.

6. L'integrale non è improprio solo se l'intervallo di integrazione $[1, a]$ non contiene nessuno dei punti in cui si annulla il denominatore della funzione integranda, vale i punti della forma $\pi/2 + k\pi$ con k intero. Questa condizione si verifica per $-\pi/2 < a < \pi/2$.

7. La serie converge per $a > 1/3$.

8. 

Prima parte, gruppo 2.

1. Il valore cercato è $\alpha = 5\pi/4$.

2. Il polinomio di Taylor cercato è $f(x) = 6x^2 - 6x^4 + 10\,x^6$.

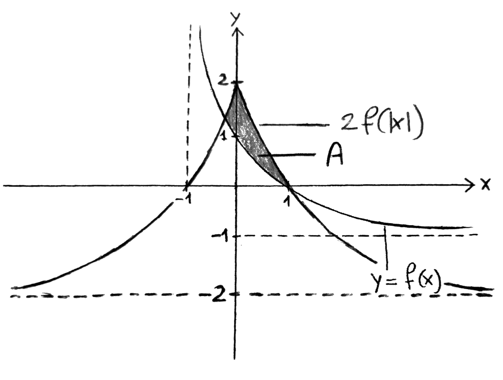
3. L'ordine corretto è: $d \ll b \ll a \ll c$.

4. La velocità di P è $\big(e^{-3t}(-\sin t - 3\cos t),\, e^{-3t}(-3\sin t + \cos t)\big)$. La distanza è $d = \sqrt{10}/3$.

5. $f'(x) = \dfrac{x^4}{1+x^2}$.

6. L'integrale non è improprio solo se l'intervallo di integrazione $[2, a]$ non contiene nessuno dei punti in cui si annulla il denominatore della funzione integranda, vale i punti della forma $\pi/2 + k\pi$ con k intero. Questa condizione si verifica per $\pi/2 < a < 3\pi/2$.

7. La serie converge per ogni $a > 0$.

8. 

Prima parte, gruppo 3.

1. Il valore cercato è $\alpha = 11\pi/6$.

2. Il polinomio di Taylor cercato è $f(x) = 2 + 2x^2 - 3x^4$.

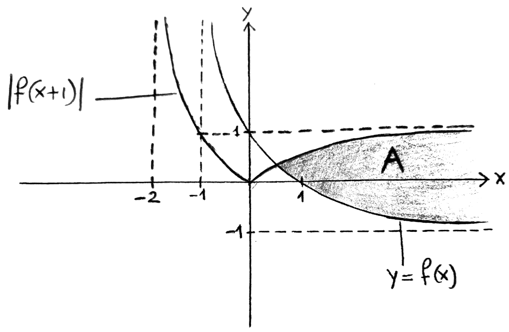
3. L'ordine corretto è: $d \ll a \ll c \ll b$.

4. La velocità di P è $\big(e^{-2t}(2\sin t + 4\cos t),\, e^{-2t}(-4\sin t + 2\cos t)\big)$. La distanza è $d = \sqrt{5}$.

5. $f'(x) = -\dfrac{x^4}{\sqrt{1-x^2}}$.

6. L'integrale non è improprio solo se l'intervallo di integrazione $[-2, a]$ non contiene nessuno dei punti in cui si annulla il denominatore della funzione integranda, vale i punti della forma $\pi/2 + k\pi$ con k intero. Questa condizione si verifica per $-3\pi/2 < a < -\pi/2$.

7. La serie non converge per alcun $a > 0$.

8. 

Prima parte, gruppo 4.

1. Il valore cercato è $\alpha = 5\pi/6$.

2. Il polinomio di Taylor cercato è $f(x) = 2 + 2x^3 - 4x^6$.

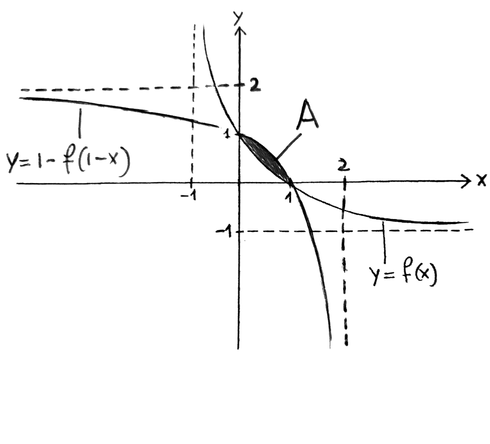
3. L'ordine corretto è: $c \ll a \ll d \ll b$.

4. La velocità di P è $\big(e^{-3t}(-3\sin t - 9\cos t),\, e^{-3t}(9\sin t - 3\cos t)\big)$. La distanza è $d = \sqrt{10}$.

5. $f'(x) = \dfrac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}$.

6. L'integrale non è improprio solo se l'intervallo di integrazione $[1, a]$ non contiene nessuno dei punti in cui si annulla il denominatore della funzione integranda, vale i punti della forma $k\pi$ con k intero. Questa condizione si verifica per $0 < a < \pi$.

7. La serie converge per $a > 3/2$.

8. 

Prima parte, gruppo 5.

1. Il valore cercato è $\alpha = 3\pi/4$.

2. Il polinomio di Taylor cercato è $f(x) = 6x^3 - 6x^6 + 6x^9$.

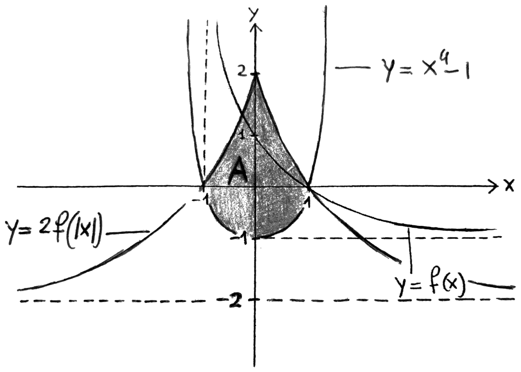
3. L'ordine corretto è: $d \ll a \ll b \ll c$.

4. La velocità di P è $\big(e^{-2t}(2\sin t - \cos t),\, e^{-2t}(\sin t + 2\cos t)\big)$. La distanza è $d = \sqrt{5}/2$.

5. $f'(x) = \dfrac{x^5}{1+x^2}$.

6. L'integrale non è improprio solo se l'intervallo di integrazione $[4, a]$ non contiene nessuno dei punti in cui si annulla il denominatore della funzione integranda, vale i punti della forma $k\pi$ con k intero. Questa condizione si verifica per $\pi < a < 2\pi$.

7. La serie converge per $a > 1/6$.

8. 

Prima parte, gruppo 6.

1. Il valore cercato è $\alpha = \pi/4$.

2. Il polinomio di Taylor cercato è $f(x) = 2 + 2x^3 - x^6$.

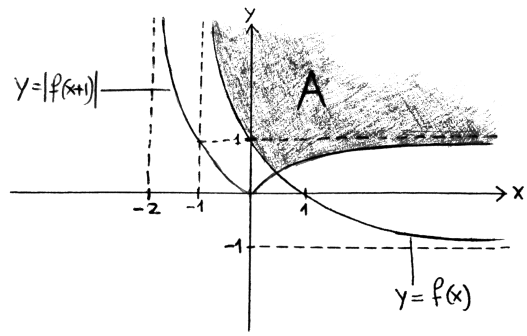
3. L'ordine corretto è: $b \ll c \ll a \ll d$.

4. La velocità di P è $\big(e^{-3t}(3\sin t - \cos t),\, e^{-3t}(\sin t + 3\cos t)\big)$. La distanza è $d = \sqrt{10}/3$.

5. $f'(x) = -\dfrac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}$.

6. L'integrale non è improprio solo se l'intervallo di integrazione $[-2, a]$ non contiene nessuno dei punti in cui si annulla il denominatore della funzione integranda, vale i punti della forma $k\pi$ con k intero. Questa condizione si verifica per $-\pi < a < 0$.

7. La serie converge per ogni $a > 0$.

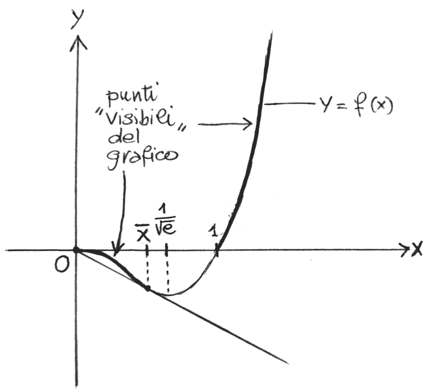
8. 

SECONDA PARTE, GRUPPO 1.

1. Svolgo i punti a) e b) insieme. Siccome l'equazione (*) è lineare, la soluzione generale si scrive come
$$x(t) = x_{\rm om}(t) + x_1(t) + x_2(t) \tag{1}$$
dove $x_{\rm om}(t)$ è la soluzione dell'equazione omogenea associata alla (*), $x_1(t)$ è una particolare soluzione dell'equazione
$$\ddot{x} - 2a\dot{x} + (a^2 - a + 1)x = \sin t\,, \tag{2}$$
mentre $x_2(t)$ è una particolare soluzione dell'equazione
$$\ddot{x} - 2a\dot{x} + (a^2 - a + 1)x = 2\,. \tag{3}$$
Per prima cosa trovo $x_{\rm om}$: partendo dal fatto che le soluzioni dell'equazione caratteristica sono
$$\lambda_{1,2} = a \pm \sqrt{a-1}$$
ottengo che
$$x_{\rm om}(t) = \begin{cases} c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} & \text{per } a > 1, \\ e^t(c_1 + c_2 t) & \text{per } a = 1, \\ e^{at}\big(c_1\cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)\big) & \text{per } a < 1, \end{cases} \tag{4}$$
dove c_1, c_2 sono coefficienti arbitrari e $\omega := \sqrt{1-a}$ (definita per $a < 1$).
Cerco ora x_1, soluzione particolare dell'equazione (2). Per $a \neq 0$ il termine noto di questa equazione, $\sin t$, non è soluzione dell'equazione omogenea, e quindi so di dover cercare x_1 tra le funzioni della forma
$$x_1 = b_1 \cos t + b_2 \sin t\,.$$
Calcolo quindi $\dot{x}_1$ e $\ddot{x}_1$, sostituisco queste espressioni nell'equazione (1), ed ottengo un sistema di due equazioni nelle incognite b_1 e b_2, cosa che mi permette di determinarle. Alla fine:
$$x_1(t) = \frac{2}{a(a^2-2a+5)}\cos t + \frac{a-1}{a(a^2-2a+5)}\sin t \quad \text{per } a \neq 0. \tag{5}$$
Per $a = 0$ il termine noto $\sin t$ dell'equazione (2) è soluzione dell'equazione omogenea. So quindi di dover cercare x_1 della forma
$$x_1 = b_1 t\cos t + b_2 t \sin t\,.$$
Fatti i dovuti conti trovo $b_1 = -1/2$ e $b_2 = 0$, ovvero
$$x_1(t) = -\tfrac{1}{2} t\cos t \quad \text{per } a = 0. \tag{5'}$$
Cerco infine x_2 soluzione particolare di (3) tra le funzioni costanti e trovo
$$x_2(t) = \frac{2}{a^2 - a + 1}\,. \tag{6}$$
Mettendo insieme le formule (1), (4), (5), (5') e (6) ottengo la soluzione generale di (*).
c) Le formule (5), (5') e (6) mostrano che $x_1(t) \ll e^{3t}$) e $x_2(t) \ll e^{3t}$) per $t \to +\infty$, e quindi la soluzione $x(t)$ di (*) soddisfa $x(t) \sim e^{3t}$ se e solo se $x_{\rm om}(t) \sim e^{3t}$.
La formula (4) mostra poi che per $a \leq 1$ si ha $x_{\rm om}(t) \ll e^{3t}$ per ogni possibile scelta di c_1 e c_2, e quindi per questi a nessuna soluzione di (*) soddisfa $x(t) \sim e^{3t}$.
Resta il caso $a > 1$. Indico con λ_1 la più piccola delle due soluzioni dell'equazione caratteristica. Dalla formula (4) si vede subito che $x_{\rm om}(t) \sim e^{3t}$ solo se si verifica uno dei seguenti casi
   - $\lambda_2 = 3$, $c_2 = 1$, c_1 qualunque (infinite soluzioni).
   - $\lambda_1 = 3$, $c_1 = 1$, $c_2 = 0$ (una sola soluzione);

Facendo i conti si vede che il primo caso si verifica per $a = 2$, il secondo per $a = 5$.
In conclusione, $a = 2$ e $a = 5$ sono gli unici valori di a per cui esiste almeno una soluzione della (*) che soddisfa $x(t) \sim e^{3t}$, nel primo caso le soluzioni in questione sono infinite, nel secondo ce n'è una sola.

2. a) La funzione $f(x) = x^2 \log x$ è definita per ogni $x > 0$, è positiva per $x \geq 1$ e negativa altrimenti.
Inoltre la funzione tende a $+\infty$ per $x \to +\infty$, e tende a 0 per $x \to 0^+$, e siccome la derivata tende a 0 per $x \to 0^+$, il grafico parte dall'origine con retta tangente orizzontale.
Studiando infine il segno della derivata $f'(x) = x(2\log x + 1)$ ottengo che la funzione cresce per $\geq 1/\sqrt{e}$ e decresce altrimenti, mentre studiando il segno della derivata seconda $f''(x) = 2\log x + 3$ ottengo che la funzione è convessa per $x \geq 1/e^{3/2}$ e concava altrimenti.
Usando queste informazioni traccio il disegno qui sotto. (Attenzione: il disegno non rispetta le proporzioni.)



b) Il disegno suggerisce che i punti P_x direttamente visibili dall'origine O sono quelli per con $x \geq 1$ e quelli con $x \leq \bar{x}$, dove $\bar{x}$ è caratterizzato dal fatto che la retta R che passa per 0 e per $P_{\bar{x}}$ è tangente al grafico in quest'ultimo punto. Siccome la pendenza di R è $f(\bar{x})/\bar{x}$ abbiamo che $\bar{x}$ risolve l'equazione

$$\frac{f(\bar{x})}{\bar{x}} = f'(\bar{x})$$

ovvero $\bar{x}\log\bar{x} = \bar{x}(2\log\bar{x} + 1)$, da cui ricavo $\bar{x} = 1/e$.
In conclusione il punto P_x è direttamente visibile da O per $0 < x \leq 1/e$ e per $x \geq 1$.

3. a) La funzione

$$f(x) := \log\left(x^4 - 1 + \frac{16}{x^2}\right)$$

è pari ed è definita per ogni $x \neq 0$. Attenzione: che la funzione non sia definita per $x = 0$ è evidente, ma che sia definita per ogni altro valore di x non lo è per niente: si tratta infatti di dimostrare che l'argomento del logaritmo nella formula sopra è sempre positivo (tranne che per $x = 0$, dove non è definito). Moltiplicando tale argomento per x^2 mi riduco a far vedere che

$$x^6 - x^2 + 16 > 0 \quad \text{per ogni } x,$$

che con il cambio di variabile $t = x^2$ si traduce in

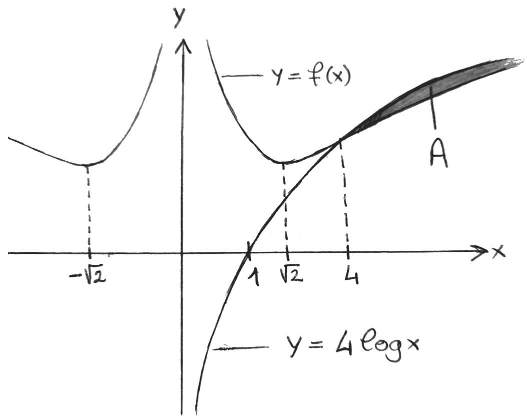
$$t^3 - t + 16 > 0 \quad \text{per ogni } t \geq 0.$$

Dimostro questa disuguaglianza trovando il valore minimo di $t^3 - 3 + 16$ relativamente alla semiretta $t \geq 0$: un semplice calcolo mostra che il punto di minimo è quello dove si annulla la derivata, vale a dire $t = 1/\sqrt{3}$, e quindi il valore minimo di $t^3 - t + 16$ è $16 - \frac{2}{3\sqrt{3}} \simeq 15{,}6 > 0$.
Procedendo oltre, è facile verificare che $f(x)$ tende a $+\infty$ per $x \to 0$ e per $x \to \pm\infty$, e anzi per $x \to +\infty$ la funzione è asintoticamente equivalente a $\log(x^4) = 4\log x$.
Studiando inoltre il segno della derivata

$$f'(x) = \frac{4x^6 - 32}{x(x^6 - x^2 + 16)}$$

ottengo che $f(x)$ decresce per $0 < x \leq \sqrt{2}$ e cresce per $x \geq \sqrt{2}$ (e similmente per $x \leq 0$).
Sulla base delle informazioni raccolte fin qui traccio il grafico di f riportato nella figura sotto. (Attenzione, anche questa figura non rispetta le proporzioni.)

b) Risolvendo la disequazione $f(x) \le 4\log x$ ottengo $x \ge 4$. Grazie a questa informazione posso disegnare il grafico $y = f(x)$ in relazione al grafico $y = \log x$ come nella figura sotto, e questo mi permette di disegnare l'insieme A. In particolare questo insieme risulta illimitato.



c) Sulla base di quanto visto l'area di A è data da

$$\begin{aligned}\text{area}(A) &= \int_4^{+\infty} 4\log x - f(x)\,dx \\ &= \int_4^{+\infty} \log(x^4) - \log\left(x^4 - 1 + 16/x^2\right) dx \\ &= \int_4^{+\infty} -\log\left(\frac{x^4 - 1 + 16/x^2}{x^4}\right) dx = \int_4^{+\infty} -\log\left(1 - \frac{1}{x^4} + \frac{16}{x^6}\right) dx\,.\end{aligned}$$

Osservo infine che l'ultimo integrale è improprio semplice in $+\infty$, e per via dello sviluppo

$$\log\left(1 - \frac{1}{x^4} + \frac{16}{x^6}\right) \sim -\frac{1}{x^4} + \frac{16}{x^6} \sim -\frac{1}{x^4} \quad \text{per } x \to +\infty,$$

si comporta come l'integrale improprio $\int_1^\infty \frac{1}{x^4} dx$, che converge ad un numero finito. Pertanto l'area di di A è finita.

SECONDA PARTE, GRUPPO 2.

1. Simile al gruppo 1.
   a) e b). In questo caso le soluzioni dell'equazione caratteristica sono $\lambda_{1,2} = 2a \pm \sqrt{a-1}$ e la soluzione generale dell'equazione omogenea è

$$x_{\text{om}}(t) = \begin{cases} c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} & \text{per } a > 1, \\ e^{2t}(c_1 + c_2 t) & \text{per } a = 1, \\ e^{2at}\big(c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)\big) & \text{per } a < 1, \end{cases}$$

   con $\omega := \sqrt{1-a}$. La soluzione particolare dell'equazione $\ddot{x} - 2a\dot{x} + (a^2 - a + 1)x = \cos t$ è

$$x_1(t) = \begin{cases} \frac{4a-1}{a(16\,a^2-8a+17)} \cos t - \frac{4}{a(16\,a^2-8a+17)} \sin t & \text{per } a \ne 0, \\ \frac{1}{2} t \sin t & \text{per } a = 0. \end{cases}$$

   Infine la soluzione particolare dell'equazione $\ddot{x} - 2a\dot{x} + (a^2 - a + 1)x = 1$ è

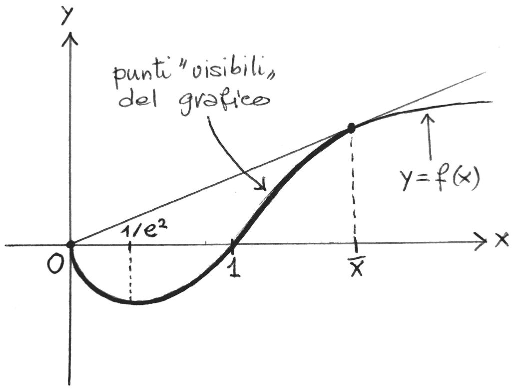
$$x_2(t) = \frac{1}{4a^2 - a + 1}\,,$$

   e la soluzione generale della (*) è $x(t) = x_{\text{om}}(t) + x_1(t) + x_2(t)$.

   c) L'equazione (*) ha infinite soluzioni asintoticamente equivalente a e^{3t} per $a = 5/4$, ne ha una per $a = 2$, nessuna in tutti gli altri casi.

2. Simile al gruppo 1. Il grafico di $f(x)$ è riportato nel disegno sotto. Come si vede dal disegno, i punti P_x direttamente visibili da O sono quelli con $0 < x \le \bar{x}$ dove $\bar{x}$ risolve l'equazione

$f(\bar{x})/\bar{x} = f'(\bar{x})$, vale a dire $\bar{x} = e^2$.



3. Uguale al gruppo 1.

Commenti

- Prima parte, esercizio 5. Molti dei presenti non si sono ricordati dell'identità $\sin(\arcsin x) = x$ (mi riferisco qui al gruppo 1, ma un discorso analogo vale per gli altri gruppi). Questo l'ho considerato un'errore.

- Prima parte, esercizio 6. Quasi nessuno dei presenti ha svolto correttamente questo esercizio. Il problema sembra essere la convinzione (errata) che un integrale è improprio solo quando la funzione non è definita in uno degli estremi, mentre è improprio anche se non è definita in uno o più punti interni all'intervallo di integrazione.

- Seconda parte, esercizio 1, punto c). Diversi dei presenti hanno trovato i valori di a per cui esiste almeno una soluzione dell'equazione asintoticamente equivalente a e^{3t} per $t \to +\infty$. Tuttavia il procedimento seguito non è mai stato spiegato bene, e anzi sembra poco chiaro agli autori stessi, tant'è che nessuno (tranne forse una persona) ha risposto correttamente alla seconda parte della domanda, in cui si chiedeva quante fossero le soluzioni in questione.

- Seconda parte, esercizio 2. Questo è uno dei pochi casi in cui per risolvere l'esercizio servono informazioni molto precise sul grafico, al di là di quelle che uno può ottenere studiando solo il segno della derivata. In particolare servono le informazioni su concavità e convessità.

- Seconda parte, esercizio 2. Quasi tutti i presenti che hanno affrontato questo esercizio hanno sbagliato il disegno del grafico di $f(x)$. In particolare hanno scritto che questa funzione tende a $-\infty$ per $x \to 0^+$, mentre invece tende a 0 (si tratta di una forma indeterminata che chi ha seguito questo corso dovrebbe conoscere a memoria).

- Seconda parte, esercizio 3. Molti dei presenti hanno trovato che la derivata di f si annulla per $x = \pm\sqrt[6]{8}$, ma solo uno dei presenti si è accorto che $\sqrt[6]{8} = \sqrt{2}$ (!)

PRIMA PARTE, GRUPPO 1.

1. Il punto di massimo è $x = 3$. Il punto di minimo è $x = 0$.

2. a) L'equazione della retta T è $y = \dfrac{5+2x}{e^2}$. b) L'area del triangolo è $\dfrac{25}{4e^2}$.

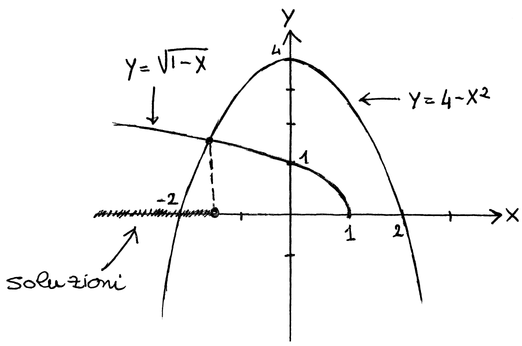
3. I valori cercati di a sono: $a > \log 2$.

4. $f(x) = (3x^2-2)\Big(\dfrac{2}{x} - \dfrac{4}{3x^3} + O\Big(\dfrac{1}{x^5}\Big)\Big) - 6x = -\dfrac{8}{x} + O\Big(\dfrac{1}{x^3}\Big) \sim -\dfrac{8}{x}$.

5. Usando il cambio di variabile $t = x^3$ ottengo
$$\int_1^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^6}\,dx = \frac{1}{3}\int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{3}\Big|\arctan t\Big|_1^{+\infty} = \frac{\pi}{12}\,.$$

6. Il raggio di convergenza della serie è $R = 2$; la serie converge per $-2 < x < 2$.

7. Le soluzioni cercate sono $x(t) = e^{-2t}\big(-\cos t + c\sin t\big)$ con $c \in \mathbb{R}$.

8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 2.

1. Il punto di massimo è $x = -3$. Il punto di minimo è $x = -2$.

2. a) L'equazione della retta T è $y = \dfrac{17+4x}{e^8}$. b) L'area del triangolo è $\dfrac{289}{8e^8}$.

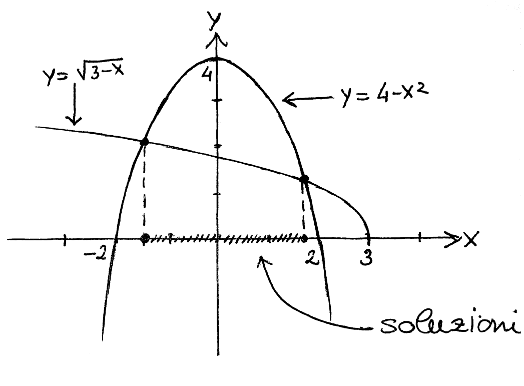
3. I valori cercati di a sono: $a \geq 1$.

4. $f(x) = (x+2)\left(\dfrac{2}{x} - \dfrac{2}{x^2} + O\Big(\dfrac{1}{x^3}\Big)\right) - 2 = \dfrac{2}{x} + O\Big(\dfrac{1}{x^2}\Big) \sim \dfrac{2}{x}$.

5. Usando il cambio di variabile $t = -x^2$ ottengo
$$\int_2^{+\infty} xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int_{-4}^{-\infty} e^t dt = \frac{1}{2}\Big|\; e^t \;\Big|_{-\infty}^{-4} = \frac{1}{2e^4}\,.$$

6. Il raggio di convergenza della serie è $R = +\infty$; la serie converge per ogni $x \in \mathbb{R}$.

7. Le soluzioni cercate sono $x(t) = e^t\big(-\cos(2t) + c\sin(2t)\big)$ con $c \in \mathbb{R}$.

8. 

Prima parte, gruppo 3.

1. Il punto di massimo non esiste. Il punto di minimo è $x = -1$.

2. a) L'equazione della retta T è $y = \dfrac{5-2x}{e^2}$. b) L'area del triangolo è $\dfrac{25}{4e^2}$.

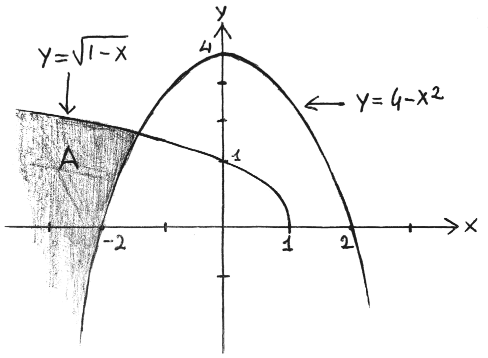
3. I valori cercati di a sono: $0 < a < 2$.

4. $f(x) = (3x^2-1)\Big(\dfrac{2}{x} - \dfrac{4}{3x^3} + O\Big(\dfrac{1}{x^5}\Big)\Big) - 6x = -\dfrac{6}{x} + O\Big(\dfrac{1}{x^3}\Big) \sim -\dfrac{6}{x}$.

5. Integrando per parti ottengo
$$\int_1^{+\infty} xe^{-x}dx = \Big| -e^{-x}x \Big|_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} -e^{-x}dx = \frac{1}{e} - \Big|e^{-x}\Big|_1^{+\infty} = \frac{2}{e}\,.$$

6. Il raggio di convergenza della serie è $R = +\infty$; la serie converge per ogni $x \in \mathbb{R}$.

7. Le soluzioni cercate sono $x(t) = e^{2t}\big(\cos t + c\sin t\big)$ con $c \in \mathbb{R}$.

8. 

Prima parte, gruppo 4.

1. Il punto di massimo non esiste. Il punto di minimo è $x = -2$.

2. a) L'equazione della retta T è $y = \dfrac{17-4x}{e^8}$. b) L'area del triangolo è $\dfrac{289}{8e^8}$.

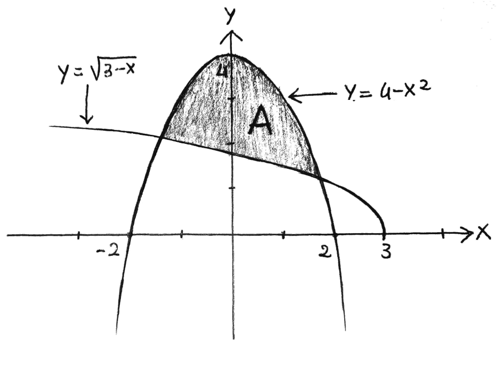
3. I valori cercati di a sono: nessuno.

4. $f(x) = (x-1)\left(\dfrac{2}{x} - \dfrac{2}{x^2} + O\Big(\dfrac{1}{x^3}\Big)\right) - 2 = -\dfrac{4}{x} + O\Big(\dfrac{1}{x^2}\Big) \sim -\dfrac{4}{x}$.

5. Usando il cambio di variabile $t = -x^2$ ottengo
$$\int_{-\infty}^{2} xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{-4} e^t dt = -\frac{1}{2}\Big|\, e^t \,\Big|_{-\infty}^{-4} = -\frac{1}{2e^4}\,.$$

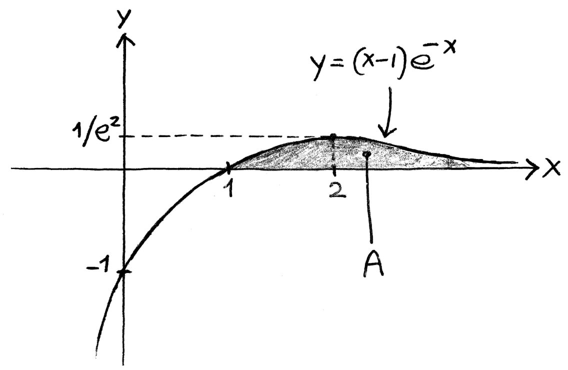
6. Il raggio di convergenza della serie è $R = 1/2$; la serie converge per $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$.

7. Le soluzioni cercate sono $x(t) = e^{-t}\big(\cos(2t) + c\sin(2t)\big)$ con $c \in \mathbb{R}$.

8. 

Seconda parte.

1. a) La funzione $f(x) := (x-1)\,e^{-x}$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, è positiva per $x \geq 1$ e negativa altrimenti, tende a 0 per $x \to +\infty$ e tende a $-\infty$ per $x \to -\infty$.
Studiando inoltre il segno della derivata $f'(x) := (2-x)\,e^{-x}$ ottengo che la funzione cresce per $x < 2$ e decresce per $x > 2$; in particolare $x = 2$ è il punto di massimo assoluto.
Utilizzando queste informazioni traccio il disegno sottostante (che non rispetta le giuste proporzioni).



b) Il volume del solido V è dato dalla solita formula:

$$\text{volume}(V) = \pi \int_1^{+\infty} \big(f(x)\big)^2 dx = \pi \int_1^{+\infty} (x-1)^2\, e^{-2x} dx\,.$$

Per calcolare il valore di questo integrale improprio uso il cambio di variabile $y = x - 1$ (questo passaggio non è strettamente necessario, ma semplifica un po' i calcoli) e applico per due volte la formula di integrazione per parti:

$$\begin{aligned}
\text{volume}(V) &= \frac{\pi}{e^2} \int_0^{+\infty} y^2 e^{-2y} dy \\
&= \frac{\pi}{e^2} \left[\left| y^2 \,\frac{e^{-2y}}{-2} \right|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} y e^{-2y} dy \right] \\
&= \frac{\pi}{e^2} \left[\left| y^2 \,\frac{e^{-2y}}{-2} \right|_0^{+\infty} + \left| y \,\frac{e^{-2y}}{-2} \right|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2y}}{2}\, dy \right] \\
&= \frac{\pi}{e^2} \left| \frac{e^{-2y}}{-4} \right|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4e^2}\,.
\end{aligned}$$

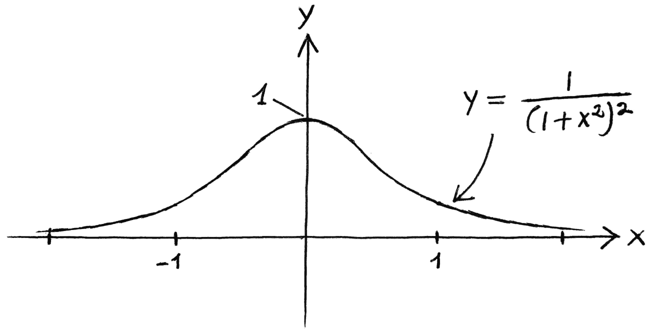
c) Per calcolare il volume del solido V' procedo così: indico con A'' la traslazione di A verso sinistra di 1, e con V'' il solido ottenuto ruotando A'' attorno all'asse delle y. Chiaramente i volumi di V' e V'' sono uguali, ed il secondo può essere calcolato usando la formula vista a lezione. Per la precisione la figura piana A'' è delimitata superiormente dalla traslazione verso sinistra di 1 del grafico $y = f(x)$, vale a dire il grafico $y = f(x+1)$, e quindi

$$\text{volume}(V') = \text{volume}(V'') = 2\pi \int_0^{+\infty} x\, f(x+1)\, dx = \frac{2\pi}{e} \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx\,.$$

Per calcolare il valore di questo integrale improprio applico per due volte la formula di integrazione per parti e ottengo

$$\text{volume}(V') = \frac{2\pi}{e} \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx = \frac{4\pi}{e}\,.$$

2. a) La funzione $f(x) := (1+x^2)^{-2}$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, è pari e positiva, e tende a 0 per $x \to \pm\infty$. Studiando il segno della derivata $f'(x) := -4x\,(1+x^2)^{-3}$ ottengo che la funzione cresce per $x < 0$ e decresce per $x > 0$ e in particolare $x = 0$ è il punto di massimo assoluto. Utilizzando queste informazioni traccio il disegno sottostante.



b) La distanza dell'origine dal punto di ascissa x del grafico di f, vale a dire il punto $(x, f(x))$, è data da

$$g(x) := \left[x^2 + (f(x))^2\right]^{1/2} = \left[x^2 + (1+x^2)^{-4}\right]^{1/2}.$$

Cercare i punti del grafico di f più vicini all'origine significa quindi cercare i punti di minimo *assoluto* di g. Per farlo, cerco innanzitutto gli x in cui si annulla la derivata

$$g'(x) = x\left(1 - 4(1+x^2)^{-5}\right)\left[x^2 + (1+x^2)^{-4}\right]^{-1/2}.$$

Da questa formula risulta chiaro che $g'(x) = 0$ se $x = 0$ e se $1 - 4(1+x^2)^{-5} = 0$, vale a dire

$$x = \pm x_0 \text{ con } x_0 := \sqrt{\sqrt[5]{4} - 1}\,.$$

Confrontando i valori $g(x)$ per $x = 0$, $x = \pm x_0$ e per $x \to \pm\infty$ ottengo che i punti di minimo assoluto sono $x = \pm x_0$.

c) Procedo come nel punto precedente: fissato un generico $a > 0$ la distanza del punto $(x, f(x))$ dall'origine è

$$g(x) := \left[x^2 + (a+x^2)^{-4}\right]^{1/2},$$

la derivata di $g(x)$ è

$$g'(x) = x\left(1 - 4(a+x^2)^{-5}\right)\left[x^2 + (a+x^2)^{-4}\right]^{-1/2}$$

e si annulla per $x = 0$ e, se $a < \sqrt[5]{4}$, anche per

$$x = \pm x_0 \text{ con } x_0 := \sqrt{\sqrt[5]{4} - a}\,.$$

Confrontando i valori di $g(x)$ in questi punti e per $x \to \pm\infty$ ottengo che

- se $a \geq \sqrt[5]{4}$ l'unico punti di minimo assoluto è $x = 0$,
- se $a < \sqrt[5]{4}$ i due punti di minimo assoluto sono $x = \pm x_0$.

3. La funzione

$$f(x) := \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}} - e^2 \tag{1}$$

è definita e continua per $x > 0$, e quindi l'integrale in esame è improprio sia in 0 che in $+\infty$. Lo spezzo dunque come

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \underbrace{\int_0^1 f(x)\,dx}_{(I)} + \underbrace{\int_1^{+\infty} f(x)\,dx}_{(II)}.$$

Per determinare il comportamento dell'integrale (I), che è improprio (semplice) in 0, studio il comportamento asintotico della funzione $f(x)$ per $x \to 0$. A questo scopo osservo che per $x \to 0$ l'esponente $x + 1/2$ nella formula (1) tende a $1/2$ mentre la base $1 + 2/x$ è asintoticamente equivalente a $2/x$; quindi

$$\left(1 + \frac{2}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}} \sim \left(\frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}$$

e dunque

$$f(x) \sim \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}.$$

Usando il principio del confronto asintotico concludo che

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \text{numero finito}\,. \tag{2}$$

Per determinare il comportamento dell'integrale (*II*), che è improprio (semplice) in $+\infty$, studio il comportamento asintotico di $f(x)$ per $x \to +\infty$. A questo scopo scrivo $f(x)$ come

$$f(x) = \exp\Big(\Big(x + \frac{1}{2}\Big)\log\Big(1 + \frac{2}{x}\Big)\Big) - e^2$$

e osservo che, per $x \to +\infty$,

$$\Big(x + \frac{1}{2}\Big)\log\Big(1 + \frac{2}{x}\Big) = \Big(x + \frac{1}{2}\Big)\Big[\frac{2}{x} - \frac{2}{x^2} + O\Big(\frac{1}{x^3}\Big)\Big] = 2 - \frac{1}{x} + O\Big(\frac{1}{x^2}\Big)$$

(nel primo passaggio ho usato lo sviluppo $\log(1+t) = t - t^2/2 + O(t^3)$ con $t = 2/x$). A partire da questa formula ottengo

$$\begin{aligned} f(x) &= \exp\Big(2 - \frac{1}{x} + O\Big(\frac{1}{x^2}\Big)\Big) - e^2 \\ &= e^2\Big[\exp\Big(-\frac{1}{x} + O\Big(\frac{1}{x^2}\Big)\Big) - 1\Big] = e^2\Big[-\frac{1}{x} + O\Big(\frac{1}{x^2}\Big)\Big] \sim -\frac{e^2}{x} \end{aligned}$$

(nel secondo passaggio ho usato lo sviluppo $e^t = 1 + t = O(t^2)$ con $t = -1/2 + O(1/x^2)$). Quindi, per il principio del confronto asintotico,

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx \approx -\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = -\infty\,. \tag{3}$$

Dalle formule (2) e (3) segue che l'integrale improprio di partenza diverge a $-\infty$.

Commenti

- Seconda parte, esercizio 1. La maggior parte dei presenti ha disegnato correttamente l'insieme A (punto a)) e risolto correttamente il punto b), ma quasi nessuno ha impostato correttamente il punto c).

- Seconda parte, esercizio 2. Quasi nessuno dei presenti ha impostato correttamente il punto b). Nessuno ha affrontato il punto c).

- Seconda parte, esercizio 3. Per studiare il comportamento asintotico della funzione $f(x)$ per $x \to 0$ ho dato per scontato il seguente fatto generale: se $g(x)$ è asintoticamente equivalente a $\tilde{g}(x)$ per $x \to x_0$ e $h(x)$ tende ad un limite finito $L \neq 0$, allora

$$\big(g(x)\big)^{h(x)} \sim \big(\tilde{g}(x)\big)^L\,.$$

Questa affermazione è corretta, ma richiederebbe una dimostrazione.