[versione: 22 dicembre 2009]

CORSO: **Analisi in più Variabili III**
LEZIONI: **Giovanni Alberti**
ESERCITAZIONI: **Maria Stella Gelli**
CORSO DI STUDIO: **Matematica (primo livello ex lege 270)**
ANNO DI CORSO: **terzo**
SEMESTRE: **primo**
ANNO ACCADEMICO: **2009/10**
NUMERO DI CREDITI: **6**
CODICE ESAME: **042AA**

Avvertenza per gli studenti della laurea specialistica e per quelli del terzo anno (o oltre) della laurea triennale - vale a dire gli iscritti secondo il precedente ordinamento (ex lege 509): questo corso sostituisce Analisi Funzionale, che a partire da quest'anno accademico non sarà più attivato; per questi studenti l'esame verrà quindi registrato con il titolo "Analisi Funzionale" con il corrispondente codice (AA112) e numero di crediti (7).

Obiettivi formativi. Alla fine del corso lo studente deve avere una buona conoscenza teorica ed operativa dei seguenti argomenti: serie e trasformata di Fourier (in ambito classico), integrazione di k-forme su superfici regolari in $\mathbb{R}^n$ e teorema di Stokes. Funzioni armoniche. Integrazione secondo Lebesgue.

Programma del corso. Sono riportati in corsivo gli argomenti non fondamentali.

1. SERIE DI FOURIER
   - 1.1 Rappresentazione di una funzione di periodo 2π come serie di Fourier reale e complessa su $\mathbb{R}$. La base di Fourier (complessa) come sistema ortonormale; teorema di approssimazione Weierstrass e massimalità di tale sistema. Convergenza totale della serie di Fourier per funzioni di classe $\mathscr{C}^1$.
   - 1.2 *Derivazione dell'equazione del calore e delle onde.* Soluzione dell'equazione del calore e delle onde tramite serie di Fourier. Ruolo dei dati iniziali e delle condizioni al bordo.
   - 1.3 Varianti della serie di Fourier: per funzioni su un intervallo e nulle al bordo; per funzioni sul quadrato.
   - 1.4 *La base di Fourier come sistema di autovettori di un operatore autoaggiunto. Disuguaglianza isoperimetrica nel piano.*
2. CONVOLUZIONE DI FUNZIONI E TRASFORMATA DI FOURIER
   - 2.1 Rappresentazione di una funzione su $\mathbb{R}$ come combinazione integrale delle funzioni trigonometriche complesse. *Derivazione euristica a partire dalla serie di Fourier.*
   - 2.2 Prodotto di convoluzione di due funzioni su $\mathbb{R}$. Proprietà elementari della trasformata di Fourier: trasformata del prodotto e del prodotto di convoluzione, della traslazione, della derivata. Dimostrazione della formula di inversione.
   - 2.3 Risoluzione dell'equazione del calore tramite trasformata di Fourier, e rappresentazione della soluzione tramite il nucleo del calore.
   - 2.4 *Convoluzione e distribuzione della somma di due variabili aleatorie indipendenti. Dimostrazione del teorema del limite centrale tramite trasformata di Fourier. Trasformata di Fourier per funzioni di più variabili.*
   - 2.5 Richiamo: compattezza e compattezza sequenziale; teorema di Ascoli-Arzelà, teorema di Tychonov (dimostrato solo per un prodotto numerabile di spazi metrici compatti). *Teorema di unicità di Peano per le equazioni differenziali ordinarie.*
3. INTEGRAZIONE SU SUPERFICI
   - 3.1 Richiamo: integrazione di campi di vettori su curve e superfici; teorema di Stokes, di Gauss-Green e della divergenza.
   - 3.2 Superfici regolari di dimensione k (sottovarietà) in $\mathbb{R}^n$ senza bordo; equivalenza delle diverse definizioni. Definizione di spazio tangente ad una superficie. Definizione di funzione (e di mappa) di classe $\mathscr{C}^h$ su una superficie, e del suo differenziale in un punto. Superfici con bordo.
   - 3.3 Determinante Jacobiano e formula dell'area. Integrale di una funzione scalare su una superfice (definito tramite parametrizzazioni).
   - 3.4 Orientazione di una superficie e orientazione del bordo. Applicazioni k-lineari alternanti e k-forme, rappresentazione di una k-forma in coordinate. Differenziale e pull-back di una k-forma. Teorema di Stokes. *Forme chiuse ed esatte.*

4. Funzioni armoniche

4.1 Le funzioni armoniche come soluzioni dell'equazione di Laplace. Proprietà della media e principio del massimo. Unicità della soluzione dell'equazione di Laplace.
4.2 Risoluzione dell'equazione di Laplace nel disco tramite la serie di Fourier e rappresentazione della soluzione tramite la funzione di Green. *Relazione con la teoria delle funzioni olomorfe.*

5. Integrazione secondo Lebesgue

5.1 Definizione di misura (σ-additiva) su una σ-algebra. Funzioni Boreliane e funzioni misurabili. Costruzione dell'integrale e sue proprietà fondamentali. Teorema di convergenza monotona, di convergenza dominata (di Lebesgue) e lemma di Fatou. *Teorema di Lusin. Prodotto di σ-algebre e di misure; teorema di Fubini.*
5.4 Disuguaglianze di Hölder e di Minkowski. Spazi L^p.

Prerequisiti. Il contenuto dei corsi di analisi e geometria dei primi due anni. Serviranno in particolare le nozioni fondamentali di algebra lineare e topologia in spazi metrici, derivate e integrali di funzioni in più variabili, formula di cambio di variabile negli integrali multipli e teorema di Fubini, convergenza uniforme e totale per serie di funzioni, teorema di Stokes e della divergenza nella forma classica, serie di potenze complesse, funzioni olomorfe e calcolo degli integrali con il metodo dei residui, potenziale di un campi di vettori (o primitiva di una 1-forma).

Mailing list e pagina web del corso. Le comunicazioni riguardanti corso ed esami vengono inviate per posta elettronica a chi si è iscritto alla mailing list del corso, e pubblicizzate sulla pagina web del docente: `http://www.dm.unipi.it/~alberti/`. Su tale pagina saranno disponibili liste di esercizi sugli argomenti svolti a lezione e i testi e le soluzioni delle varie prove d'esame.

Appelli ed esami. L'esame è suddiviso in una prova scritta ed una prova orale. Per l'ammissione alla prova orale è necessario aver superato la prova scritta; la prova orale va sostenuta nello stesso appello della prova scritta. Non è consentito l'uso di libri di testo o appunti durante le prove scritte. Durante il corso è previsto lo svolgimento di due prove in itinere (compitini) che sostituiscono la prova scritta del primo o del secondo appello. In tutto l'anno accademico sono previsti cinque appelli d'esame (indicativamente a gennaio, febbraio, giugno, luglio e settembre). Gli studenti interessati a sostenere l'esame in un dato appello sono pregati di utilizzare la procedura di iscrizione online.

Testi di riferimento. Il corso non segue esattamente alcun libro e si raccomanda quindi la frequenza. Per gli argomenti ai punti 3 e 5, un buon testo è quello di W.H. Fleming (Functions of several variables, second edition. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1977).