Versione: 4 settembre 2009

Università di Pisa
Corso di laurea in Matematica

Raccolta di esercizi per il corso di

Topologia e Analisi Complessa

a.a. 2008/09

Giovanni Alberti

GIOVANNI ALBERTI
Dipartimento di Matematica
Università di Pisa
largo Pontecorvo 5
56127 Pisa
www.dm.unipi.it/~alberti

Introduzione

Questa è una raccolta degli esercizi assegnati durante il corso di Topologia e Analisi Complessa per la laurea triennale in Matematica nell'a.a. 2008/09 (docente del corso: Fabrizio Broglia; esercitatore: Giovanni Alberti). Gli esercizi sono divisi in due gruppi corrispondenti alle due parti principali del corso.

Il pallino ° indica gli esercizi svolti a lezione il cui contenuto può essere dato per acquisito nello svolgimento di altri esercizi; il rombo ◇ indica gli esercizi svolti a lezione; infine l'asterisco * indica gli esercizi (presumibilmente) difficili. Per alcuni esercizi è stata fornita una traccia della soluzione.

Programma del corso.

OMOTOPIA E GRUPPO FONDAMENTALE.

Connessione per archi, cammini e operazioni fra cammini continui.
Omotopia tra funzioni continue, omotopia relativa, omotopia tra cammini.
Equivalenza omotopica; retratti e retratti di deformazione; spazi contraibili.
Il gruppo fondamentale di uno spazio topologico; ruolo del punto base.
Omomorfismi tra gruppi fondamentali indotti da applicazioni continue; invarianza per omotopia; il gruppo fondamentale di spazi omotopicamente equivalenti.
Il gruppo fondamentale di un prodotto.
Rivestimenti; sollevamento di cammini; rivestimento del quoziente di uno spazio rispetto all'azione di un gruppo; calcolo di alcuni gruppi fondamentali; lemma di monodromia.
Il teorema di van Kampen (con dimostrazione parziale).

FUNZIONI OLOMORFE DI UNA VARIABILE COMPLESSA

L'algebra delle serie formali.
Serie convergenti; calcolo del raggio di convergenza; operazioni sulle serie convergenti; derivata di una serie convergente.
La funzione esponenziale complessa come rivestimento da $\mathbb{C}$ in $\mathbb{C}^*$.
Funzioni analitiche; analiticità della somma di una serie convergente; prolungamento analitico; funzioni meromorfe.
Forme differenziali e loro integrazione; forme chiuse e forme esatte; primitive lungo un cammino o lungo un'omotopia; la forma dz/z; indice di un cammino chiuso.
Funzioni olomorfe; condizioni di Cauchy-Riemann; le funzioni olomorfe con derivata diversa da 0 come isomorfismi analitici locali.
Formula integrale di Cauchy; sviluppo in serie di una funzione olomorfa; formula e teorema di Cauchy per un compatto.
Il teorema della mappa aperta; principio del massimo; principio di simmetria.
Serie di Laurent; sviluppo di una funzione olomorfa in una corona; singolarità isolate; classificazione tramite limite e tramite serie; il teorema di Weirstrass per le singolarità essenziali;
La sfera di Riemann e il teorema dei residui. Calcolo degli integrali con il metodo dei residui.
Derivata logaritmica; comportamento attorno ad una radice multipla di una funzione olomorfa; teorema di Rouché.

1° a) Dato $x_0 \in \mathbb{R}^n$, scrivere una retrazione di $\mathbb{R}^n$ sul punto x_0.
b) Scrivere una deformazione di $\mathbb{R}^n$ sul punto x_0.

2° Sia X un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ stellato rispetto al punto x_0.
a) Scrivere una retrazione di X sul punto x_0.
b) Scrivere una deformazione di X sul punto x_0.

3° a) Scrivere una retrazione di $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ sulla sfera S^{n-1}.
b) Scrivere una deformazione di $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ su S^{n-1}.

4◇ Preso $x_0 \in \mathbb{R}^n$ con $|x_0| < 1$, scrivere *esplicitamente* una deformazione di $\mathbb{R}^n \setminus \{x_0\}$ su S^{n-1}.

5° Scrivere *esplicitamente* un omeomorfismo dal disco chiuso D^2, vale a dire l'insieme dei punti $x \in \mathbb{R}^2$ tali che $|x| \leq 1$, nel quadrato chiuso $Q := [-1,1]^2$.

6 Dimostrare che l'unione di due rette non parallele è un retratto di deformazione del piano.

7* Dato un insieme aperto A contenuto in $\mathbb{R}^n$ ed un punto $x_0 \in A$, per ogni $e \in S^{n-1}$ poniamo

$$h(e) := \sup \big\{ t \geq 0 : \ x_0 + te \in A \big\} ,$$
$$h^*(e) := \inf \big\{ t \geq 0 : \ x_0 + te \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{A} \big\} .$$

Dimostrare i seguenti fatti:
a) $h : S^{n-1} \to [0, +\infty]$ è una funzione semicontinua inferiormente;
b) $h^* : S^{n-1} \to [0, +\infty]$ è una funzione semicontinua superiormente;
c) se A è stellato rispetto a x_0 allora $h \leq h^*$;
d) se A è limitato allora h ed h^* assumono solo valori finiti;
e) se A è convesso allora $h = h^*$ ed quindi h è una funzione continua;
f) se A è convesso allora $A = \big\{ x_0 + t\, e : \ e \in S^{n-1},\, 0 \leq t < h(e) \big\}$.
g) se A è convesso e limitato allora $\partial A = \big\{ x_0 + h(e)\, e : \ e \in S^{n-1} \big\}$.

8 Sia A un aperto convesso di $\mathbb{R}^n$. Dimostrare che A è omeomorfo ad una palla aperta di $\mathbb{R}^n$. [*Utilizzare l'esercizio 7f), supponendo inizialmente che A sia limitato.*]

9 Sia A un aperto convesso e limitato in $\mathbb{R}^n$, e sia x_0 un punto di A. Dimostrare che ∂A è un retratto di deformazione sia di $\mathbb{R}^n \setminus \{x_0\}$ che di $\overline{A} \setminus \{x_0\}$. [*Utilizzare la funzione h data nell'esercizio 7.*]

10 Far vedere che quanto affermato nell'esercizio 9 non vale se A è un semispazio riconducendosi al fatto (non dimostrato) che la sfera S^{n-1} non è contraibile.

11° Si consideri una coppia di punti antipodali p e $-p$ sulla sfera S^n con $n \geq 1$. Verificare che la mappa

$$F : (x,t) := \frac{(1-t)x + tp}{|(1-t)x + tp|}$$

è una deformazione di S^n meno il punto $-p$ sul punto p. Dunque la sfera meno un punto è contraibile in qualunque dimensione.

12° Dato X uno spazio topologico, siano $f, g : X \to S^n$ due mappe tali che $f(x) \neq -g(x)$ per ogni $x \in X$. Dimostrare che f e g sono omotope.

13 ° Dimostrare che la palla aperta di $\mathbb{R}^n$ meno un punto è omotopicamente equivalente alla sfera S^{n-1}.

14 ° Dimostrare che la sfera S^n meno un punto è omeomorfa a $\mathbb{R}^n$. Dedurne che la sfera S^n meno un punto si deforma su un qualunque altro punto.

15 ° Dati T, X spazi topologici, indichiamo con $C(T;X)$ l'insieme delle mappe continue da T in X, e su questo insieme indichiamo con $\sim$ la relazione di equivalenza per omotopia. Data una mappa continua $f : X \to Y$, sia $f_* : C(T;X)/\!\sim \to C(T;Y)/\!\sim$ la mappa definita da

$$f_* : [\varphi] \mapsto [f \circ \varphi] \ .$$

Dimostrare che:
a) la definizione di f_* è ben posta;
b) se $f, f' : X \to Y$ sono mappe omotope allora $f_* = f'_*$;
c) date $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$, allora $g_* \circ f_* = (g \circ f)_*$;
d) date $f : X \to Y$ e $g : Y \to X$ tali che $g \circ f \sim \mathrm{Id}_X$, allora f_* è iniettiva e g_* è surgettiva;
e) se Y è un retratto di X ed $f : X \to Y$ è una retrazione allora f_* è surgettiva.
f) se $f : X \to Y$ è un'equivalenza omotopica allora f_* è bigettiva.

16 In riferimento all'enunciato d) dell'esercizio 15, esibire un esempio in cui f_* non è surgettiva e g_* non è iniettiva.

17 Nel contesto dell'esercizio 15, esibire un esempio in cui f è iniettiva (rispettivamente, surgettiva) ed f_* non è né iniettiva né surgettiva.

18 $^\diamond$ Sia T uno spazio topologico con un solo elemento. Dimostrare che l'insieme $C(T,X)/\!\sim$ (cfr. esercizio 15), è in corrispondenza biunivoca con l'insieme $\pi_0(X)$ delle componenti connesse per archi di X.

19 Data una mappa continua $f : X \to Y$, sia $f_* : \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$ la mappa che ad ogni componente connessa per archi C di X associa la componente connessa per archi di Y che contiene $f(C)$. Utilizzando quanto fatto negli esercizi 15 e 18, dimostrare che:
a) la mappa f_* è ben definita;
b) se Y è un retratto di X e $f : X \to Y$ una retrazione, allora f_* è surgettiva.
c) se $f : X \to Y$ è un'equivalenza omotopica allora f_* è surgettiva, e quindi $\pi_0(X)$ e $\pi_0(Y)$ hanno la stessa cardinalità.

20 Sia X uno spazio topologico, Y uno spazio topologico discreto, e $f, g : X \to Y$ mappe continue. Dimostrare che f è omotopa a g se e solo se $f = g$.

21 Dato uno spazio topologico X, sia $\sim$ la relazione di equivalenza le cui classi di equivalenza corrispondono alle componenti connesse di X. Data una mappa continua $f : X \to Y$, sia $f_* : X/\!\sim \to Y/\!\sim$ la mappa definita da

$$f_* : [x] \mapsto [f(x)] \ .$$

Dimostrare che:
a) la definizione di f_* è ben posta;
b) se $f, f' : X \to Y$ sono mappe omotope allora $f_* = f'_*$;
c) date $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$, allora $g_* \circ f_* = (g \circ f)_*$;

d) date $f : X \to Y$ e $g : Y \to X$ tali che $g \circ f \sim \mathrm{Id}_X$, allora f_* è iniettiva e g_* è surgettiva;
e) se $f : X \to Y$ è un'equivalenza omotopica allora f_* è bigettiva;
f) se Y è un retratto di X ed $f : X \to Y$ è una retrazione allora f_* è surgettiva.

22 ◦ Sia A un aperto connesso (per archi) di $\mathbb{R}^m$ con $m \geq 2$ e sia S un sottoinsieme numerabile di A. Dimostrare che $A \setminus S$ è connesso per archi.

23 Se C_1 e C_2 sono sottoinsiemi connessi per archi del quadrato $[0,1]^2$ tali che C_1 contiene i vertici $(0,1)$ e $(1,0)$ mentre C_2 contiene $(0,0)$ e $(1,1)$, allora l'intersezione di C_1 e C_2 non è vuota. Dimostrare questo enunciato supponendo che C_1 sia il grafico di una funzione continua $f_1 : [0,1] \to [0,1]$. [*La dimostrazione nel caso generale è più complicata, cfr. esercizio 64.*]

Traccia. Se per assurdo C_1 e C_2 non si intersecassero allora la funzione $g : C_2 \to \{\pm 1\}$ data da

$$g(x,y) := \begin{cases} +1 & \text{per } y > f_1(x) \\ -1 & \text{per } y < f_1(x) \end{cases}$$

sarebbe ben definita e continua, e porterebbe il connesso C_2 sullo sconnesso $\{\pm 1\}$.

24* Sia X l'insieme dei punti del piano dato dall'unione del segmento verticale $\{0\} \times [0,1]$ e dei segmenti orizzontali $[0,1] \times \{y\}$ con $y = 0$ oppure $y = 1/n$ e $n = 1, 2, \ldots$ Dimostrare che il segmento orizzontale $A := [0,1] \times \{0\}$ non è un retratto di deformazione di X.

Traccia. a) Ogni cammino con un estremo in $X \setminus A$ ed uno in A passa per il punto $\bar{x} := (0,0)$; b) data $F : X \times I \to X$ tale che $F(x,1) \in A$ per ogni $x \in X$, allora per ogni $x \in X \setminus A$ esiste $t \in I$ tale che $F(x,t) = \bar{x}$; c) per continuità lo stesso vale per ogni $x \in A$.

25 Sia X l'unione di una circonferenza e di un suo raggio. Dimostrare che X è omotopicamente equivalente ma non omeomorfo a S^1.

26 ⋄ Nel piano, sia A l'unione delle circonferenze di centri $(\pm 1, 0)$ e raggio 1, vale a dire un "otto". Dimostrare che A è un retratto di deformazione di $\mathbb{R}^2 \setminus \{(\pm 1, 0)\}$.

27 ⋄ Nel piano, sia B l'unione delle circonferenze di centri $(\pm 2, 0)$ e raggio 1 e del segmento di estremi $(\pm 1, 0)$. Dimostrare che B è un retratto di deformazione di $\mathbb{R}^2 \setminus \{(\pm 2, 0)\}$.

28 ⋄ Dimostrare che gli insiemi A e B definiti nei due esercizi precedenti sono spazi topologici omotopicamente equivalenti ma non omeomorfi.

Traccia. Per l'equivalenza omotopica si usi il fatto che A e B sono retratti di deformazione di due spazi omeomorfi. [*Si provi comunque a scrivere direttamente un'equivalenza omotopica $f : B \to A$.*]

29 Dimostrare che $\mathbb{R}^n$ meno una palla chiusa è omeomorfo a $\mathbb{R}^n$ meno un punto.

30 Siano $f, g : S^n \to \mathbb{R}$ funzioni continue tali che $f(x) \geq g(x) > 0$ per ogni $x \in S^n$, e sia X l'insieme dei punti $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ tali che $f(x/|x|) \geq |x| \geq g(x/|x|)$. Dimostrare che X è omotopicamente equivalente a S^n.

31 ⋄ Tracciare un disegno approssimativo dell'immagine del cammino

$$f(t) := \left(t^3 - t, \frac{1}{1+t^2}\right) \quad \text{con } t \in \mathbb{R}.$$

32 Tracciare un disegno approssimativo dell'immagine del cammino

$$f(t) := |\cos(n\pi t)|\,(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) \quad \text{con } t \in [0,1].$$

33$^\diamond$ Fissato un intero $n \geq 2$, dimostrare che gli spazi X_1, X_2, X_3 definiti di seguito sono omeomorfi.
i) X_1 è l'unione di n circonferenze aventi uno ed un solo punto in comune, vale a dire che $X_1 := (S^1 \times \{1, \dots, n\})/\!\sim$ dove $\sim$ è la relazione di equivalenza che identifica ad un punto l'insieme $\{e_0\} \times \{1, \dots, n\}$, dove $e_0 := (1, 0)$. [X_1 *viene talvolta chiamato bouquet di n circonferenze.*]
ii) $X_2 := ([0,1] \times \{1, \dots, n\})/\!\sim$ dove $\sim$ è la relazione di equivalenza che identifica ad un punto l'insieme $\{0,1\} \times \{1, \dots, n\}$.
iii) X_3 è l'insieme dei punti di $\mathbb{R}^2$ della forma $|\cos(n\pi t)|\,(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ con $t \in [0,1]$.

34$^\diamond$ Dato un intero $n \geq 2$, sia D l'insieme dei punti del piano della forma

$$\frac{1}{2}(\cos(2\pi kt/n), \sin(2\pi kt/n)) \quad \text{con } k = 0, \dots, n-1$$

e si prenda X_3 come nell'esercizio precedente. Dimostrare che X_3 è un retratto di deformazione di $\mathbb{R}^2 \setminus D$.

35 Dati $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^2$ ed $\varepsilon > 0$, costruire un omeomorfismo $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $g(\bar{x}) = \bar{y}$ e $g(x) = x$ per ogni x al di fuori di un ε-intorno del segmento chiuso di estremi $\bar{x}$ e $\bar{y}$.

36 Siano $x_1, \dots, x_n$ e $y_1, \dots, y_n$ due n-uple di punti in $\mathbb{R}^2$ tali che $x_i \neq x_j$ e $y_i \neq y_j$ per $i \neq j$. Costruire un omeomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $f(x_i) = y_i$ per $i = 1, 2, \dots, n$.

Traccia. Procedendo per induzione su n possiamo supporre che esista un omeomorfismo $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $h(x_i) = y_i$ per ogni $i < n$. Distinguiamo quindi due casi.
Primo caso: se il segmento chiuso di estremi $\bar{x} := h(x_n)$ e $\bar{y} := y_n$ non contiene y_i per nessun $i < n$, posiamo trovare un omeomorfismo $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $g(\bar{x}) = \bar{y}$ e $g(y_i) = y_i$ per ogni $i < n$ (cfr. esercizio 35); poniamo quindi $f := g \circ h$.
Secondo caso: se il segmento $[\bar{x}, \bar{y}]$ contiene y_i per qualche $i < n$, indichiamo con d la distanza minima tra $\bar{x}$ e y_i con $i \leq n$ e prendiamo x' tale che $|x' - \bar{x}| < d$ ed il segmento $[x', \bar{y}]$ non contiene y_i per alcun $i < n$. Possiamo allora trovare un omeomorfismo $g' : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $g'(\bar{x}) = x'$ e $g'(y_i) = y_i$ per ogni $i < n$; ponendo infine $h' := g' \circ h$ ci siamo ricondotti al caso precedente.

37 Dato un intero $n \geq 2$, dimostrare che il piano meno n punti è omotopicamente equivalente ad un bouquet di n circonferenze, cioè lo spazio X definito nell'esercizio 33. [*Utilizzare gli esercizi 34 e 36.*]

38 Dato un intero $n \geq 2$, dimostrare che la sfera S^2 meno $n+1$ punti è omotopicamente equivalente ad un bouquet di n circonferenze.

39 Dato un intero $n \geq 2$, dimostrare che lo spazio $\mathbb{R}^3$ meno l'unione di n rette distinte passanti per l'origine è omotopicamente equivalente ad un bouquet di $2n - 1$ circonferenze.

40 Sia X un sottospazio chiuso di $\mathbb{R}^n$ con la seguente proprietà: esiste un aperto U in $\mathbb{R}^n$ che contiene X ed una retrazione $\tau : U \to X$ di classe C^1. Dimostrare che allora ogni cammino $g : I \to X$ è omotopicamente equivalente (in X) ad un cammino $\tilde{g}$ di classe C^1.

Traccia. Un teorema dovuto a Weierstrass asserisce ogni funzione reale e continua sull'intervallo I è limite di una successione uniformemente convergente di polinomi. Utilizzando questo risultato, far vedere che esiste una mappa $f : I \to \mathbb{R}^n$ tale che: a) le componenti di f sono polinomi; b) $f(0) = g(0)$ e $f(1) = g(1)$; c) il segmento chiuso di estremi $f(s)$ e $g(s)$ è contenuto in U per ogni $s \in I$. Verificare che allora $\tilde{g} := \tau \circ f$ soddisfa quanto richiesto.

41 Sia E un sottoinsieme limitato di $\mathbb{R}^n$ e f una mappa da E in $\mathbb{R}^m$ con $m > n$. Dimostrare che se f è Lipschitziana, cioè esiste una costante finita L tale che $|f(x) - f(y)| \le L|x - y|$ per ogni $x, y \in E$, allora $f(E)$ ha parte interna vuota.

Traccia. Preso a tale che E è contenuto in un cubo n-dimensionale di lato a, per ogni intero positivo k si può ricoprire E con k^n cubi di lato a/k. Se ne deduce che $f(E)$ è ricoperto da k^n cubi di lato $2Ln^{1/2}a/k$ e pertanto il suo volume m-dimensionale soddisfa

$$\mathrm{vol}_m(f(E)) \le (2Lan^{1/2})^m k^{n-m} \ .$$

Prendendo il limite per $k \to +\infty$ si ottiene che $\mathrm{vol}_m(f(E)) = 0$, da cui segue che $f(E)$ non contiene alcuna palla. [*Per volume si può intendere tanto la misura di Peano-Jordan quanto quella di Lebesgue.*]

42$^\diamond$ Dimostrare che la sfera S^n è semplicemente connessa per $n \ge 2$ completando la seguente traccia di dimostrazione: a) Ogni cammino in S^n è omotopo ad un cammino di classe C^1 (esercizio 40); b) ogni cammino di classe C^1 in S^n non è surgettivo (esercizio 41); c) ogni cammino non surgettivo in S^n è omotopo ad una costante (cfr. esercizio 11).

43 Dato $n \ge 2$, dimostrare che ogni omeomorfismo f dalla sfera S^{n-1} in sé può essere esteso ad un omeomorfismo della palla chiusa D^n in sé. [*Si ricordi che D^n è l'insieme dei punti $x \in \mathbb{R}^n$ tali che $|x| \le 1$, e quindi la sfera S^{n-1} coincide con la frontiera di D^n in $\mathbb{R}^n$.*]

44* Sia $f : S^1 \to S^1$ un omeomorfismo. Dimostrare che esiste una funzione $\theta : [0, 2\pi] \to [0, 2\pi]$ continua, surgettiva e strettamente monotòna tale che

$$f(\cos t, \sin t) = (\cos\theta(t), \sin\theta(t)) \quad \text{per ogni } t \in [0, 2\pi].$$

[*Utilizzare, ed eventualmente dimostrare, che ogni funzione continua e iniettiva da un intervallo di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ è strettamente monotòna.*]

45 Sia X lo spazio ottenuto identificando i bordi di due copie distinte della palla chiusa D^n, vale a dire $X = (D^n \times 0, 1)/\!\sim$ dove $\sim$ è la relazione di equivalenza che identifica il punto $(x, 0)$ con $(x, 1)$ per ogni $x \in S^{n-1}$. Dimostrare che X è omeomorfo a S^n.

46 Far vedere che il risultato nell'esercizio precedente non dipende da come vengono identificati i bordi delle due palle, vale a dire che X è omeomorfo a S^n anche quando $\sim$ è la relazione di equivalenza che identifica $(x, 0)$ con $(f(x), 1)$ per ogni $x \in S^{n-1}$ ed f è un omeomorfismo di S^{n-1} assegnato. [*Utilizzare l'esercizio 43.*]

47° a) Verificare che S^1 – inteso come sottogruppo del gruppo moltiplicativo $\mathbb{C}^*$ – e $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ – inteso come quoziente del gruppo additivo $\mathbb{R}$ per il sottogruppo $\mathbb{Z}$ – sono gruppi topologici isomorfi, vale a dire che esiste un omeomorfismo che è anche un isomorfismo di gruppi.
b) Verificare che il toro $T^2 := S^1 \times S^1$ e il quoziente $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ sono gruppi topologici isomorfi.

48 $^\diamond$ Sia X lo spazio topologico ottenuto identificando gli estremi dell'intervallo $[0,1]$. Allora X è omeomorfo a S^1 e ad $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$: scrivere esplicitamente tali omeomorfismi.

49 $^\circ$ Sia X lo spazio ottenuto identificando ogni punto x della sfera S^n con il suo antipodale $-x$. Dimostrare che X è omeomorfo allo spazio proiettivo $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.

50 $^\circ$ Sia X lo spazio ottenuto identificando ogni punto della frontiera della palla chiusa D^n con il suo antipodale. Dimostrare che X è omeomorfo allo spazio proiettivo $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.

51 $^\diamond$ Dimostrare che il piano proiettivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ meno un punto si deforma su una retta proiettiva ed è quindi omotopicamente equivalente a S^1. [*È istruttivo risolvere quest'esercizio utilizzando tutte le varie rappresentazioni del piano proiettivo.*]

52 $^\diamond$ a) Sia E l'iperboloide di rotazione in $\mathbb{R}^3$ di equazione $x^2 + y^2 = 1 + z^2$. Dimostrare che E è omeomorfo al cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$.
b) Sia E_1 la chiusura di E nella compattificazione di Alexandrov $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ dello spazio. Dimostrare che E_1 è omeomorfo al quoziente $S^2/\!\sim$ dove $\sim$ è la relazione di equivalenza che identifica la coppia di punti antipodali $(0,0,\pm 1)$.
b) Identifichiamo $\mathbb{R}^3$ come il sottoinsieme dei punti dello spazio proiettivo $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ della forma $[x,y,z,1]$, ed indichiamo con E_2 la chiusura di E in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$. Dimostrare che E_2 è omeomorfo a $S^1 \times S^1$.

53 $^\diamond$ Sia X uno spazio topologico connesso per archi. Detto e_0 il punto di S^1 di coordinate $(1,0)$, per ogni mappa continua $g : S^1 \to X$ indichiamo con $\tilde{g}$ il cammino chiuso in X con punto base $a := g(e_0)$ definito da

$$\tilde{g}(s) := g(\cos(2\pi s), \sin(2\pi s)) \quad \text{per ogni } s \in I = [0,1].$$

Dimostrare che:
a) se il cammino $\tilde{g}$ è omotopicamente equivalente al cammino costante 1_a allora la mappa g è omotopa a una mappa costante;
b) se G è un omotopia da g ad una mappa con valore costante b, allora $\tilde{g}$ è omotopicamente equivalente a $f * 1_b * i(f)$, dove $f(t) := G(e_0, t)$ per ogni $t \in I$;
c) X è semplicemente connesso se e solo se ogni mappa continua $g : S^1 \to X$ è omotopa ad una costante.

54 Nel contesto dell'esercizio precedente, si considerino due mappe $g_0, g_1 : S^1 \to X$ tali che $g_0(e_0) = g_1(e_0)$. Dimostrare che:
a) se il cammino $\tilde{g}_0$ è omotopicamente equivalente a $\tilde{g}_1$ allora g_0 è omotopa a g_1;
b) se $G : S^1 \times I \to X$ è un omotopia da g_0 a g_1 allora il cammino $\tilde{g}_0$ è omotopicamente equivalente a $f * \tilde{g}_1 * i(f)$, dove $f(t) := G(e_0, t)$ per ogni $t \in I$;
c) se g_0 è omotopa a g_1 e il gruppo fondamentale di X è abeliano allora $\tilde{g}_0$ è omotopicamente equivalente a $\tilde{g}_1$;

55 * Far vedere con un esempio che l'ipotesi che $\pi_1(X)$ sia abeliano nel punto c) dell'esercizio precedente non può essere rimossa.

56 Per ogni $k \in \mathbb{Z}$, sia $\varphi_k : S^1 \to S^1$ la mappa definita da $\varphi_k(z) := z^k$ (stiamo identificando $\mathbb{R}^2$ con il campo complesso $\mathbb{C}$). Dimostrare che φ_k è omotopa a φ_h se e solo se $k = h$. [*Utilizzare quanto fatto nell'esercizio 54.*]

57 Sia g una mappa continua da S^1 in sé. Dimostrare g può essere estesa ad una mappa continua da D^2 in S^1 se e solo se il cammino chiuso $\tilde{g} : I \to S^1$ definito da

$$\tilde{g}(t) := g(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$$

è omotopicamente equivalente ad una costante.

58° Utilizzando il fatto che la sfera S^{n-1} non è contraibile (dimostrato solo per $n = 2$), far vedere che:
a) non esiste alcuna mappa $f : D^n \to S^{n-1}$ la cui restrizione $f_{|S^{n-1}}$ è uguale a Id;
b) non esiste alcuna mappa $f : D^n \to S^{n-1}$ tale che $f_{|S^{n-1}}$ è omotopa a Id;
c) ogni mappa $f : D^n \to D^n$ tale che $f_{|S^{n-1}}$ è omotopa a Id deve essere surgettiva;
d) ogni mappa $f : D^n \to D^n$ ammette un punto fisso, cioè esiste x tale che $f(x) = x$.
[*L'enunciato d) è noto come teorema del punto fisso di Brower.*]

59 Siano f, g due cammini in S^1 tali che $f(0) = g(0)$ e $f(1) = g(1)$. Dimostrare che se esiste un punto $y \in S^1$ tale che f ed g non passano per y, allora f è omotopicamente equivalente a g. [*Si usi il fatto che* $S^1 \setminus \{y\}$ *è omotopo ad un intervallo aperto.*]

60° Dimostrare che per ogni cammino chiuso $f : I \to S^1$ con punto base $e_0 := (1, 0)$ esiste uno ed un solo intero k tale che f è omotopo al cammino $g_k(t) := (\cos(2k\pi t), \sin(2k\pi t))$. Tale intero k vien chiamato *grado* del cammino f.
Dimostrare che l'applicazione $[f] \mapsto k$ definisce un isomorfismo di $\pi_1(S^1)$ in $\mathbb{Z}$.

61 Siano dati due cammini $f_1, f_2 : I \to S^1$ con punto iniziale e_0 e punto finale $-e_0$. Calcolare il grado del cammino chiuso $f := f_1 * i(f_2)$ nei seguenti casi:
a) sia f_1 che f_2 non passano per il punto $(0, 1)$;
b) f_1 non passa per $(0, 1)$ ed f_2 non passa per $(0, -1)$;
c) f_1 non passa per $(0, -1)$ ed f_2 non passa per $(0, 1)$.

Traccia. a) Posto $g(t) := (\cos(\pi t), \sin(\pi t))$ per ogni $t \in I$, utilizzare l'esercizio 59 per far vedere che f_1 ed f_2 sono omotopicamente equivalenti a g e $i(g)$ rispettivamente, e dunque in questo caso f ha grado 0.

62 Siano $p_0, \cdots, p_m$ punti di S^1 della forma $p_k := (\cos\alpha_k, \sin\alpha_k)$ con

$$0 = \alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \ldots \leq \alpha_{m-1} \leq \alpha_m = 2\pi \ ,$$

e per ogni $k = 1, \ldots, m$ sia $f_k : I \to S^1$ un cammino con punto iniziale p_{k-1} e punto finale p_k la cui immagine è contenuta nell'arco più breve che congiunge p_{k-1} a p_k. Dimostrare che il cammino $f := f_1 * f_2 * \cdots * f_m$ è omotopicamente equivalente al cammino $g(t) := (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$.

63* Siano f_1, f_2 due cammini nel quadrato $Q := I \times I$ tali che f_1 parte dal vertice $(1, 0)$ e arriva al vertice $(0, 1)$ mentre f_2 parte da $(0, 0)$ e arriva a $(1, 1)$. Dimostrare che i due cammini si intersecano, cioè che $f_1(I) \cap f_2(I) \neq \varnothing$.

Traccia. Supponiamo per assurdo $f_1(t_1) \neq f_2(t_2)$ per ogni $t_1, t_2 \in I$. Si consideri allora la mappa $F : Q \to S^1$ definita da

$$F(t_1, t_2) := \frac{f_1(t_1) - f_2(t_2)}{|f_1(t_1) - f_2(t_2)|} \ ,$$

e il cammino $f : I \to S^1$ dato da $f := F \circ h$, dove $h : I \to \partial Q$ è il cammino chiuso che percorre a velocità costante e in senso antiorario la frontiera del quadrato Q partendo dal vertice $(0,0)$ – vale a dire $h(t) := (4t, 0)$ per $0 \leq t \leq 1/4$, $h(t) := (1, 4t-1)$ per $1/4 \leq t \leq 1/2$, etc.
Utilizzare l'esercizio 57 per dimostrare che f deve essere omotopicamente equivalente ad un cammino costante, e l'esercizio 62 per dimostrare che f deve essere omotopicamente equivalente al cammino $g(t) := (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$.

64 Siano C_1 e C_2 due sottoinsiemi connessi per archi del quadrato $Q := I \times I$ tali che C_1 contiene i vertici $(1,0)$ e $(0,1)$, mentre C_2 contiene i vertici $(0,0)$ e $(1,1)$. Utilizzare quanto fatto nell'esercizio precedente per dimostrare che C^1 e C^2 hanno intersezione non vuota (cfr. esercizio 23).

65* Far vedere che l'enunciato dell'esercizio precedente vale anche se gli insiemi C_1 e C_2 sono chiusi e connessi, ma non vale se si suppone solamente che siano connessi.

66° Dimostrare che D^2 non è omeomorfo a D^n per $n \neq 2$. [*Si ha più in generale che D^n non è omeomorfo a D^m per $n \neq m$.*]

67° Sia A aperto connesso di $\mathbb{R}^2$ e p un punto di A. Dimostrare che $A \setminus \{p\}$ non è semplicemente connesso.

Traccia. Si prenda $r > 0$ tale che il disco chiuso di centro p e raggio r è contenuto in A, e si indichi con S la circonferenza di centro p e raggio r. Verificare che S è un retratto di $A \setminus \{p\}$ e ricordare che, detta r la retrazione, $r_* : \pi_1(A \setminus \{p\}) \to \pi_1(S)$ è un omomorfismo surgettivo.

68 Nel contesto dell'esercizio precedente, dimostrare che se A non è contraibile allora S non è un retratto di deformazione di $A \setminus \{p\}$.

Traccia. Avendo una deformazione di $A \setminus \{p\}$ su S sarebbe possibile costruire una deformazione di A sul disco chiuso di centro p e raggio uguale a quello di S.

69° Dimostrare che una varietà topologica di dimensione 2 non è una varietà topologica di dimensione n per $n \neq 2$. [*Si ha più in generale che una varietà topologica di dimensione n non è una varietà topologica di dimensione m per $m \neq n$.*]

Traccia. Se per assurdo X fosse una varietà topologica di dimensione sia 2 che n con $n \neq 2$, allora potremmo trovare un aperto A di $\mathbb{R}^2$ omeomorfo alla palla aperta B^n di $\mathbb{R}^n$. Ma allora A meno un punto – spazio connesso e non semplicemente connesso, cfr. esercizio 67 – sarebbe omeomorfo a B^n meno un punto, che invece è sconnesso per $n = 1$ e semplicemente connesso per $n > 2$, in quanto omotopicamente equivalente alla sfera S^{n-1}.

70° Utilizzando quanto dimostrato nell'esercizio 67 far vedere che un punto $x \in D^2$ soddisfa $|x| = 1$ se e solo ammette un intorno aperto (nel senso della topologia di D_2) e semplicemente connesso U tale che $U \setminus \{x\}$ è pure semplicemente connesso. Dedurne che ogni omeomorfismo di D_2 in sé porta S^1 in sé.

71° Sia X uno spazio topologico, $\sim$ una relazione di equivalenza su X, ed Y un sottoinsieme di X dotato della topologia indotta. Chiaramente $\sim$ è anche una relazione di equivalenza su Y, e possiamo quindi considerare l'immersione naturale j dello spazio quoziente $Y/\sim$ nello spazio quoziente $X/\sim$. Dimostrare che:
a) j è una mappa continua e iniettiva da $Y/\sim$ in $X/\sim$;

b) j è surgettiva se e solo se Y interseca ogni classe di equivalenza di X;

c) se $X/\!\sim$ è di Hausdorff e Y è compatto ed interseca ogni classe di equivalenza di X allora j è un omeomorfismo.

72 Su $X := \mathbb{R}$ si pone $x \sim x'$ quando $x - x'$ è intero. Far vedere che, preso $Y := [0,1)$, l'applicazione j definita nell'esercizio 71 è una bigezione ma non un omeomorfismo, e dunque l'ipotesi che Y sia compatto nell'enunciato c) non può essere rimossa.

73 Su $X := [-1,1]$ si pone $x \sim x'$ quando $x = x'$ oppure $x = -x'$ e $|x| < 1$. Dimostrare che la topologia di $X/\!\sim$ non è separata. Far vedere che, preso $Y := [-1,0] \cup \{1\}$, l'applicazione j definita nell'esercizio 71 è una bigezione ma non un omeomorfismo, e dunque l'ipotesi che $X/\!\sim$ sia di Hausdorff nell'enunciato c) non può essere rimossa.

74° Dato $Q := [0,1]^2$, si consideri lo spazio $X := Q/\!\sim$ ottenuto identificando ogni punto di Q della forma $(0,y)$ con $(1,y)$, e sia A il sottoinsieme di X corrispondente ai punti di ordinata $1/2$.

a) Scrivere un omeomorfismo da X al cilindro $S^1 \times [0,1]$.

b) Scrivere una deformazione di X su A.

c) Dimostrare che il gruppo fondamentale di X è isomorfo a $\mathbb{Z}$ e darne esplicitamente un generatore.

75° Dato $Q := [0,1]^2$, si chiama *nastro di Moebius* lo spazio $X := Q/\!\sim$ ottenuto identificando ogni punto di Q della forma $(0,y)$ con $(1,1-y)$. Sia A il sottoinsieme di X corrispondente ai punti di ordinata $1/2$.

a) Scrivere una deformazione di X su A.

b) Dimostrare che il gruppo fondamentale di X è isomorfo a $\mathbb{Z}$ e scriverne esplicitamente un generatore.

76 Per ogni $t \in [0,1]$, sia $e_1(t) := (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), 0)$ e $e_2(t) := \cos(\pi t)\, e_1(t) + (0,0,\sin(\pi t))$. Presi Q e $\sim$ come nell'esercizio precedente, far vedere che la mappa $f : Q \to \mathbb{R}^3$ data da

$$f(x,y) := e_1(x) + \Big(y - \frac{1}{2}\Big)\, e_2(x)$$

definisce (passando al quoziente $Q/\!\sim$) un omeomorfismo tra il nastro di Moebius ed $f(Q)$.

77$^\diamond$ Dimostrare che il cilindro $S^1 \times [0,1]$ ed il nastro di Moebius sono omotopicamente equivalenti.

78$^\diamond$ Sia X lo spazio topologico definito nell'esercizio 74 oppure nell'esercizio 75. Chiamiamo *bordo* il sottoinsieme di X corrispondente ai punti di ordinata 0 o 1. Dimostrare che:

a) un punto $p \in X$ appartiene al bordo di X se e solo se ammette un'intorno U semplicemente connesso tale che $U \setminus \{p\}$ è pure semplicemente connesso;

b) ogni omeomorfismo di X in sé porta il bordo nel bordo. [*Utilizzare l'esercizio 67.*]

79$^\diamond$ Dimostrare che il bordo del nastro di Moebius (inteso nel senso dell'esercizio 78) è omeomorfo a S^1 ed in particolare è connesso, mentre il bordo del cilindro $S^1 \times [0,1]$ non è connesso. Dedurne che il nastro di Moebius e il cilindro non sono omeomorfi.

80* Sia X il nastro di Moebius e sia f un omeomorfismo del bordo di X. Dimostrare che f può essere esteso ad un omeomorfismo di X.

81* Far vedere che l'enunciato dell'esercizio precedente non vale se X è il cilindro $S^1 \times [0,1]$.

82° Sia X il cilindro $S^1 \times [0,1]$ e sia $X/\sim$ lo spazio ottenuto identificando $S^1 \times \{0\}$ ad un punto. Dimostrare che $X/\sim$ è omeomorfo al disco D^2.

83° Sia X il cilindro $S^1 \times [0,1]$ e sia $X/\sim$ lo spazio ottenuto identificando $S^1 \times \{0\}$ ad un punto e $S^1 \times \{1\}$ ad un altro punto. Dimostrare che $X/\sim$ è omeomorfo alla sfera S^2.

84 Sia X il nastro di Moebius e sia $X/\sim$ lo spazio ottenuto identificando a un punto il bordo di X. Dimostrare che $X/\sim$ è omeomorfo al piano proiettivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

85° Dato $Q := [0,1]^2$, si consideri lo spazio $X = Q/\sim$ ottenuto identificando ogni punto di Q del tipo $(0,y)$ con $(1,y)$ ed ogni punto del tipo $(x,0)$ con $(x,1)$. Fissati $R > r > 0$, indichiamo con S la superficie in $\mathbb{R}^3$ ottenuta facendo ruotare attorno all'asse z la circonferenza sul piano xz di centro $(R,0)$ e raggio r.
a) Scrivere S come luogo di zeri di un polinomio.
b) Scrivere un omeomorfismo da X in S.
c) Scrivere un omeomorfismo da X nel toro $T^2 := S^1 \times S^1$.
d) Scrivere un rivestimento di $\mathbb{R}^2$ su X.
e) Dimostrare che il gruppo fondamentale di X è isomorfo a $\mathbb{Z}^2$ e scriverne esplicitamente un insieme di generatori.

86° Presi Q, X e $\sim$ come nell'esercizio precedente e detta ∂Q la frontiera del quadrato Q (in $\mathbb{R}^2$), si indichi con E il quoziente di $\partial Q/\sim$, ovvero la proiezione di ∂Q su $X := Q/\sim$. Sia infine p un punto in $X \setminus E$. Dimostrare i seguenti enunciati:
a) E è omeomorfo al bouquet di due circonferenze (cfr. esercizio 33);
b) E è un retratto di deformazione di $X \setminus \{p\}$;
c) il toro T^2 meno un punto è omotopicamente equivalente al bouquet di due circonferenze.
[*Per a) può essere utile osservare che E è uguale al quoziente secondo $\sim$ dell'insieme $Y := \{0\} \times [0,1] \cup [0,1] \times \{0\}$, cfr. esercizio 71.*]

87 Posto $Q := [0,1]^2$, si chiama *bottiglia di Klein* lo spazio $X := Q/\sim$ ottenuto identificando ogni punto di Q del tipo $(0,y)$ con $(1,1-y)$ ed ogni punto del tipo $(x,0)$ con $(x,1)$.
a) Scrivere una rivestimento doppio dal toro T^2 su X.
b) Scrivere una rivestimento da $\mathbb{R}^2$ su X.

88 Dimostrare che la bottiglia di Klein meno un punto è omotopicamente equivalente al bouquet di due circonferenze.

89 Detta X la bottiglia di Klein, consideriamo il sottospazio X_1 corrispondente ai punti con ascissa y tale che $1/3 \le y \le 2/3$, e il sottospazio X_2 corrispondente ai punti tali che $0 \le y \le 1/3$ oppure $2/3 \le y \le 1$. Far vedere che X_1 e X_2 sono omeomorfi al nastro di Moebius.

90 Dato $Q := [0,1]^2$, si consideri lo spazio X ottenuto identificando ogni punto di Q del tipo $(0,y)$ con $(1,1-y)$ ed ogni punto del tipo $(x,0)$ con $(1-x,1)$. Consideriamo quindi il sottospazio X_1 corrispondente ai punti con ascissa y tale che $1/3 \le y \le 2/3$ e il sottospazio X_2 corrispondente ai punti tali che $0 \le y \le 1/3$ oppure $2/3 \le y \le 1$. Dimostrare che:
a) X è omeomorfo al piano proiettivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$;
b) X_1 è omeomorfo al nastro di Moebius;

c) X_2 è omeomorfo al disco D^2.

91 Sia S la superficie in $\mathbb{R}^3$ ottenuta facendo ruotare attorno all'asse z la circonferenza nel piano xz di centro $(1,0)$ e raggio 1 (notare che questa circonferenza è tangente all'asse z). Sia inoltre C la circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio 1 nel piano xy. Dimostrare che
a) S è un retratto di deformazione di $\mathbb{R}^3 \setminus C$;
b) S è omeomorfo allo spazio ottenuto identificando i poli $(0,0,\pm 1)$ della sfera S^2.

92° Sia E un sottoinsieme finito di $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$. Dimostrare che lo spazio $X := \mathbb{R}^n \setminus E$ è semplicemente connesso.

Traccia. Procediamo per induzione sul numero m di punti di E. Supponendo che le prime coordinate dei punti di E non sia tutte uguali (altrimenti. . .) possiamo scrivere E come unione disgiunta di due sottoinsiemi propri E_1 ed E_2 in modo tale che

$$t_1 := \max\{x_1 : x \in E_1\} < t_2 := \min\{x_1 : x \in E_2\} .$$

Pertanto $X_1 := \mathbb{R}^n \setminus E_1$ e $X_2 := \mathbb{R}^n \setminus E_2$ sono semplicemente connessi per l'ipotesi induttiva. Si dimostra che X è semplicemente connesso applicando la versione semplice del teorema di van Kampen alla scomposizione di X come unione degli insiemi aperti

$$U_1 := \{x \in X : x_1 < t_2\} \quad \text{e} \quad U_2 := \{x \in X : t_1 < x_1\} .$$

Si ha infatti che a) $U_1 \cap U_2 = (t_1, t_2) \times \mathbb{R}^{n-1}$ è connesso per archi; b) preso t tale che $t_1 < t < t_2$, l'insieme $V_1 := \{x \in U_1 : x_1 \leq t\}$ è un retratto di deformazione di sia di U_1 che di X_1, e siccome quest'ultimo è semplicemente connesso lo stesso vale per V_1 ed U_1; c) analogamente anche U_2 è semplicemente connesso.

93$^\diamond$ Sia X il semipiano $(0, +\infty) \times \mathbb{R}$ meno il punto $p := (1, 0)$, e sia S la circonferenza di centro p e raggio $1/2$.
a) Dimostrare che S è un retratto di deformazione di X.
b) Dimostrare che X è connesso per archi.
c) Calcolare il gruppo fondamentale di X, dando esplicitamente un insieme di generatori.

94$^\diamond$ Fissato $n \geq 2$, sia X lo spazio $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ privato della retta $\{0\} \times \mathbb{R}$ e della sfera $S^{n-1} \times \{0\}$. Sia inoltre S l'insieme dei punti $(x.y) \in X$ tali che $(|x| - 1)^2 + y^2 = 1/4$.
a) Dimostrare che S è un retratto di deformazione di X.
b) Dimostrare che S è omeomorfo a $S^{n-1} \times S^1$.
c) Dimostrare che X è connesso per archi.
d) Calcolare il gruppo fondamentale di X, dando esplicitamente un insieme di generatori.

95 Sia G il gruppo degli omeomorfismi di $\mathbb{R}^2$ generato dalla mappa $g : (x, y) \mapsto (-y, x)$. Dimostrare i seguenti fatti:
a) G è isomorfo a $\mathbb{Z}_4$;
b) l'azione di G su $\mathbb{R}^2$ non è libera;
c) ogni $g \in G$ è un omeomorfismo di $X := \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$;
d) l'azione di G su X è libera e quindi propriamente discontinua.
d) A quale superfice "nota" è omeomorfo lo spazio quoziente X/G?

96 Sia G il gruppo degli omeomorfismi di $X := \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ generato dalla mappa $[x] \mapsto [x + a]$ dove a è un numero *razionale* non intero. Dimostrare che:

a) G è isomorfo a $\mathbb{Z}_n$ per un opportuno intero positivo n;
b) G agisce su X in modo libero e quindi propriamente discontinuo.
c) A quale spazio "noto" è omeomorfo il quoziente X/G?

97* Si prendano X e G come nell'esercizio precedente con a numero *irrazionale*. Dimostrare che:
a) G è isomorfo a $\mathbb{Z}$;
b) G agisce su X in modo libero;
c) ogni orbita (classe di equivalenza di X/G) è densa in X;
d) la topologia quoziente di X/G è quella banale (o indiscreta);
e) G non agisce su X in modo propriamente discontinuo.
[*Usare, ed eventualmente dimostrare, che un sottogruppo di* $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ *è denso o finito.*]

98° Dimostrare che se G agisce su X in modo propriamente discontinuo ed X è T_1, allora lo spazio delle orbite X/G è T_1.

Traccia. Dati $x_0, x_1 \in X$ tali che $[x_0] \neq [x_1]$, basta trovare un intorno aperto V di x_0 tale che $g(V) \cap [x_1] = \varnothing$ per ogni $g \in G$. Preso U intorno aperto di x_0 tale che $g(U) \cap U = \varnothing$ per ogni $g \in G$ con $g \neq \mathrm{Id}_X$, se U non soddisfa quanto richiesto allora esiste $g \in G$ tale che $g(x_1) \in U$. Basta quindi prendere V intorno aperto di x_0 contenuto in U tale che $g(x_1) \notin V$.

99* Sia $X := \mathbb{R} \times [0,1]$ e sia G il sottogruppo degli omeomorfismi di X generato dalla mappa

$$g : (x, y) \mapsto (x - 1 + 2y, y^2) \ .$$

Scrivere una formula esplicita per g^n con n intero positivo e dimostrare i seguenti enunciati:
a) G è isomorfo a $\mathbb{Z}$;
b) G agisce su X in modo libero;
c) G agisce su X in modo propriamente discontinuo;
d) lo spazio X/G non è di Hausdorff; per la precisione, per ogni $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$, le orbite dei punti $(x_0, 0)$ e $(x_1, 1)$ sono distinte ma non è possibile separarle con due aperti disgiunti della topologia quoziente.

Traccia. Per c), far vedere che ci si può ricondurre al seguente enunciato: data una successione di punti p_k che converge a p in X e una successione di interi n_k che tende a $+\infty$, allora $g^{n_k}(p_k)$ non converge a p. Per d), far vedere che per n sufficientemente grande esiste uno ed un solo numero $y_n \in [1/2, 1]$ tale che la prima coordinata di $g^n(x_0, y_n)$ è x_1; in particolare $g^n(x_0, y_n) = (x_1, t_n)$ con $t_n := y_n^{2^n}$. Inoltre y_n converge a 1 mentre t_n converge a 0, e quindi l'orbita di (x_0, y_n) converge sia all'orbita di $(x_0, 1)$ che a quella di $(x_1, 0)$.

100° Sia X uno spazio topologico compatto. Dimostrare che ogni suo sottoinsieme infinito S ammette almeno un punto di accumulazione, vale a dire un punto $x \in X$ tale che $S \cap U$ è infinito per ogni U intorno di x. [*Limitarsi eventualmente al caso di* X *spazio metrico.*]

101 Sia X uno spazio topologico compatto, e sia G un gruppo di omeomorfismi di X che agisce in modo propriamente discontinuo. Dimostrare che G è finito.

Traccia. Se per assurdo G fosse infinito, preso $x_0 \in X$ la sua orbita $A := \{g(x_0) : g \in G\}$ deve essere infinita. Allora esiste $x \in X$ tale che $A \cap U$ è infinito per tutti gli intorni U di x (cfr. esercizio 100), ma questo contraddice l'ipotesi che esista un intorno U di x tale che $g(U) \cap U = \varnothing$ per ogni $g \in G$ con $g \neq \mathrm{Id}_X$.

102 Usare l'esercizio 101 per dare un'altra dimostrazione dell'enunciato e) dell'esercizio 97.

103 Sia G il gruppo degli omeomorfismi di $X := \mathbb{R} \times [0,1]$ generato dalla mappa

$$g : (x,y) \mapsto (x+1, y) \ .$$

a) Dimostrare che G è isomorfo a $\mathbb{Z}$ ed agisce su X in modo propriamente discontinuo.
b) Dimostrare che $\pi_1(X/G)$ è isomorfo a $\mathbb{Z}$.
c) Scrivere esplicitamente un generatore di $\pi_1(X/G)$.
d) Dimostrare che X/G è omeomorfo al cilindro $S^1 \times [0,1]$.

104 Sia G il gruppo degli omeomorfismi di $X := \mathbb{R} \times [0,1]$ generato dalla mappa

$$g : (x,y) \mapsto (x+1, 1-y) \ .$$

a) Dimostrare che G è isomorfo a $\mathbb{Z}$ ed agisce su X in modo propriamente discontinuo.
b) Dimostrare che $\pi_1(X/G)$ è isomorfo a $\mathbb{Z}$.
c) Scrivere esplicitamente un generatore di $\pi_1(X/G)$;
d) Dimostrare che X/G è omeomorfo al nastro di Moebius.

105° Detta $\sim$ la relazione di equivalenza su S^n che identifica ogni punto x con $-x$, è noto che lo spazio quoziente $S^n/{\sim}$ è omeomorfo allo spazio proiettivo $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.
a) Far vedere che la relazione di equivalenza $\sim$ è indotta dall'azione di un opportuno sottogruppo di omeomorfismi di S^n.
b) Dimostrare che la proiezione $p : S^n \to S^n/{\sim}$ è un rivestimento doppio.
c) Dimostrare che $\pi_1(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}))$ è isomorfo a $\mathbb{Z}_2$ per $n \geq 2$.
c) Scrivere esplicitamente un generatore di $\pi_1(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}))$ per $n \geq 2$.

106$^\diamond$ Sia G il sottogruppo degli omeomorfismi di $\mathbb{R}^2$ generato dalle mappe

$$g_1 : (x,y) \mapsto (x, y+1) \quad \text{e} \quad g_2 : (x,y) \mapsto (x+1, y) \ .$$

a) Trovare le formule esplicite per g_1^m e g_2^n per ogni $m, n \in \mathbb{Z}$.
b) Dimostrare che $g_2 g_1 = g_1 g_2$.
c) Dimostrare che gli elementi di G sono tutti della forma $g_1^m g_2^n$ con $m, n \in \mathbb{Z}$.
d) Dimostrare che $g_1^m g_2^n = \mathrm{Id}$ se e solo se $m = n = 0$;
e) Dimostrare che la mappa $\Psi : (m,n) \mapsto g_1^m g_2^n$ è un isomorfismo di $\mathbb{Z}^2$ in G.

107$^\diamond$ Si prenda G come nell'esercizio 106. Dimostrare i seguenti enunciati:
a) G agisce su $\mathbb{R}^2$ in modo libero.
b) G agisce su $\mathbb{R}^2$ in modo propriamente discontinuo e $\mathbb{R}^2/G$ è di Hausdorff.
c) $\pi_1(\mathbb{R}^2/G)$ è isomorfo a $\mathbb{Z}^2$.
d) $\mathbb{R}^2/G$ è omeomorfo al toro T^2.

108$^\diamond$ Sia G il sottogruppo degli omeomorfismi di $\mathbb{R}^2$ generato dalle mappe

$$g_1 : (x,y) \mapsto (x, y+1) \quad \text{e} \quad g_2 : (x,y) \mapsto (x+1, 1-y) \ .$$

a) Trovare le formule esplicite per g_1^m e g_2^n per ogni $m, n \in \mathbb{Z}$.
b) Dimostrare che $g_2^n g_1^m = g_1^{\sigma(n)\, m} g_2^n$ per ogni $m, n \in \mathbb{Z}$, dove $\sigma(n) := (-1)^n$.

c) Dimostrare che gli elementi di G sono tutti della forma $g_1^m g_2^n$ con $m, n \in \mathbb{Z}$.
d) Dimostrare che $(g_1^m g_2^n)(g_1^{m'} g_2^{n'}) = g_1^{m+\sigma(n)\,m'} g_2^{n+n'}$ per ogni $m, m', n, n' \in \mathbb{Z}$.
e) Dimostrare che $g_1^m g_2^n = \mathrm{Id}$ se e solo se $m = n = 0$;
f) Sia H il prodotto semidiretto (non diretto) di $\mathbb{Z}$ per $\mathbb{Z}$, vale a dire l'insieme delle coppie (m, n) con $m, n \in \mathbb{Z}$ dotato del prodotto $(m, n) \cdot (m', n') := (m + \sigma(n)\, m', n + n')$. Dimostrare che la mappa $\Psi : (m, n) \mapsto g_1^m g_2^n$ è un isomorfismo di H in G.

109$^\diamond$ Si prenda G come nell'esercizio 108. Dimostrare i seguenti enunciati:
a) G agisce su $\mathbb{R}^2$ in modo libero;
b) G agisce su $\mathbb{R}^2$ in modo propriamente discontinuo e $\mathbb{R}^2/G$ è di Hausdorff;
c) $\pi_1(\mathbb{R}^2/G)$ è isomorfo a G.
d) Scrivere esplicitamente un insieme di generatori di $\pi_1(\mathbb{R}^2/G)$.

110$^\diamond$ Preso G come nell'esercizio 108, si indichi con $\sim$ la restrizione al quadrato $Q := [0, 1] \times [0, 1]$ della relazione di equivalenza su $\mathbb{R}^2$ indotta dall'azione di G.
a) Usando l'enunciato d) dell'esercizio 71, dimostrare che $Q/\!\sim$ è omeomorfo a $\mathbb{R}^2/G$.
b) Verificare che la relazione di equivalenza $\sim$ su Q coincide con quella usata nella definizione della bottiglia di Klein (cfr. esercizio 87). Dedurne che il gruppo fondamentale della bottiglia di Klein è isomorfo al prodotto semidiretto di $\mathbb{Z}$ per $\mathbb{Z}$ descritto nell'esercizio 108.

111 Sia G il sottogruppo degli omeomorfismi di $\mathbb{R}^2$ generato dalle mappe

$$g_1 : (x, y) \mapsto (x + 1, 1 - y) \quad \text{e} \quad g_2 : (x, y) \mapsto (1 - x, y + 1)\ ,$$

e sia H il gruppo dato dall'insieme delle coppie (m, n) con $m, n \in \mathbb{Z}$ dotato del prodotto $(m, n) \cdot (m', n') := (m + \sigma(n)\, m', \sigma(m')\, n + n')$. Procedendo come nell'esercizio 108, dimostrare che l'applicazione $\Psi : (m, n) \mapsto g_1^m g_2^n$ è un isomorfismo di H in G.

112 Preso G come nell'esercizio 111, si indichi con $\sim$ la restrizione al quadrato $Q := [0, 1] \times [0, 1]$ della relazione di equivalenza su $\mathbb{R}^2$ indotta dall'azione di G. Dimostrare che $\mathbb{R}^2/G$ è omeomorfo a $Q/\!\sim$ e che quest'ultimo spazio è omeomorfo al piano proiettivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.
Si sarebbe quindi tentati di dedurre che il gruppo fondamentale di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ è isomorfo a G, in contraddizione con il fatto che $\pi_1(\mathbb{P}^2(\mathbb{R}))$ è isomorfo a $\mathbb{Z}_2$. Dov'è il problema?

113° Sia X uno spazio di Hausdorff, $\tilde{X}$ uno spazio connesso, e $p : \tilde{X} \to X$ un rivestimento di ordine superiore a 1. Dimostrare che allora p non ammette inversa destra, vale a dire che non esiste alcuna mappa continua $f : X \to \tilde{X}$ tale che $p \circ f = \mathrm{Id}_X$.

114$^\diamond$ Fissato un intero $n > 1$, sia X lo spazio dei polinomi monici di grado n a coefficienti complessi, dotato della topologia indotta dall'ovvia identificazione con $\mathbb{C}^n$ (ad ogni polinomio si associa il vettore dei suoi coefficienti). Dimostrare che non esiste alcuna mappa continua $f : X \to \mathbb{C}^n$ tale che le coordinate del vettore $f(q)$ sono le radici del polinomio q per ogni $q \in X$.

Traccia. Sia $p : \mathbb{C}^n \to X$ la mappa che ad ogni vettore $(z_1, \ldots, z_n)$ associa il polinomio monico q con radici $z_1, \ldots, z_n$. Utilizzare il fatto che la restrizione di p al sottoinsieme dei vettori di C^n con coordinate distinte è un ricoprimento di grado n del sottospazio dei polinomi di X con radici distinte.

115* Fissato un intero $n > 1$, sia X lo spazio dei polinomi monici di grado n a coefficienti reali con radici tutte reali. Dimostrare che esiste una mappa continua $f : X \to \mathbb{R}^n$ tale che le coordinate del vettore $f(q)$ sono le radici del polinomio q per ogni $q \in X$.

Perché non si può applicare il ragionamento usato per risolvere l'esercizio precedente?

116* Dato uno spazio metrico X, per ogni $r > 0$ ed ogni insieme E contenuto in X indichiamo con E_r l'r-intorno di E, vale a dire l'unione delle palle aperte di raggio r con centro $x \in E$. Indichiamo inoltre con $\mathscr{F}(X)$ la famiglia dei sottoinsiemi chiusi e non vuoti di X, e su $\mathscr{F}(X)$ consideriamo la distanza di Hausdorff

$$d_H(E,F) := \inf\{r : \ E \subset F_r, \ F \subset E_r\} \ .$$

Dimostrare che:
a) E_r è l'insieme degli $x \in X$ tali che $\inf\{d_X(x,x') : x' \in E\} < r$;
b) d_H è effettivamente una distanza su $\mathscr{F}(X)$;
c) la mappa $f : \mathscr{F}(X) \times \mathscr{F}(X) \to \mathscr{F}(X)$ data da $f : (E,F) \mapsto E \cup F$ è continua;
d) la mappa $g : \mathscr{F}(X) \times \mathscr{F}(X) \to \mathscr{F}(X)$ data da $g : (E,F) \mapsto E \cap F$ è continua.

117 Dato uno spazio metrico X contenente almeno due punti distinti, prendiamo $\mathscr{F}(X)$ come nell'esercizio 116. Fissato $n \geq 2$ intero, sia G il gruppo degli omeomorfismi di X^n della forma

$$g : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$$

con σ permutazione dell'insieme degli indici $\{1, 2, \dots, n\}$. Indichiamo inoltre con $\mathscr{F}_n(X)$ la famiglia dei sottoinsiemi di X con n elementi, e con X^n_* l'insieme delle n-uple di punti distinti, vale a dire le $(x_1, \dots, x_n) \in X^n$ tali che $x_i \neq x_j$ per $i \neq j$. Dimostrare che:
a) la mappa $p : X^n \to \mathscr{F}(X)$ data da $p : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \{x_1, \dots, x_n\}$ è continua;
b) la mappa $\tilde{p} : X^n/G \to \mathscr{F}(X)$ data da $\tilde{p} : [(x_1, \dots, x_n)] \mapsto \{x_1, \dots, x_n\}$ è ben definita e continua;
c) $\tilde{p}$ è iniettiva se e solo se $n = 2$;
d) G è isomorfo a al gruppo S_n delle permutazioni di n elementi;
e) l'azione di G su X^n non è mai libera;
f) ogni $g \in G$ mappa X^n_* in sé e quindi G agisce anche su X^n_*;
g) la restrizione di $\tilde{p}$ a X^n_*/G è un omeomorfismo tra X^n_*/G e $\mathscr{F}_n(X)$;
h) l'azione di G su X^n_* è libera, e quindi propriamente discontinua.

118* Dato X spazio metrico connesso e localmente connesso per archi ed $n \geq 2$ intero, prendiamo $\mathscr{F}(X)$ e $\mathscr{F}_n(X)$ come negli esercizi 116 e 117. Dato uno spazio topologico Y connesso per archi ed una mappa $F : Y \to \mathscr{F}_n(X)$, diciamo che F è trivializzabile se esistono delle mappe continue $f_1, \dots, f_n : Y \to X$ tali che

$$F(y) = \{f_1(y), \dots, f_n(y)\} \quad \text{per ogni } y \in Y.$$

Posto al solito $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$, dimostrare che:
a) se $X = \mathbb{R}$ allora F è sempre trivializzabile;
b) se Y è semplicemente connesso allora F è sempre trivializzabile;
c) se $n = 2$ e $\pi_1(Y)$ è un gruppo finito di ordine dispari allora F è sempre trivializzabile;
d) la mappa $F : \mathbb{C}^* \to \mathscr{F}_n(\mathbb{C}^*)$ data da $F : z \mapsto \{w : w^n = z\}$ non è trivializzabile;
e) se X^n_* è connesso per archi esiste una mappa $F : S^1 \to \mathscr{F}_n(X)$ non trivializzabile.

119* Nel contesto dell'esercizio 118, far vedere che preso $n \geq 3$, esiste una mappa continua $F : I \to \mathscr{F}(\mathbb{R})$ tale che $F(y)$ ha *al più* n elementi per ogni $y \in I$ ed F non è trivializzabile.

120 Sia $p : \tilde{X} \to X$ un rivestimento con $\tilde{X}$ compatto. Dimostrare che $p^{-1}(x_0)$ è finito per ogni $x_0 \in X$.

Traccia. Se per assurdo $p^{-1}(x_0)$ fosse infinito, conterrebbe almeno un punto di accumulazione y (cfr. esercizio 100). Si prenda un intorno aperto U di x_0 tale che $p^{-1}(U)$ è un unione disgiunta di aperti U_j omeomorfi ad U tramite p, si prenda j tale che y appartiene ad U_j, e si deduca un assurdo dal fatto che l'intersezione di U_j e $p^{-1}(x_0)$ deve essere infinita.

121 Sia X uno spazio topologico con rivestimento universale compatto. Dimostrare che il gruppo fondamentale di X è finito.

122 Si consideri la mappa $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ data da $f : z \mapsto e^z$.
a) Dimostrare che f è un rivestimento;
b) Determinare il gruppo delle trasformazioni di rivestimento associato ad f.

123 Per ogni $n \in \mathbb{Z}$ con $n > 1$, si consideri la mappa $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ data da $f : z \mapsto z^n$. Dimostrare che f non è un rivestimento.

124 Per ogni $n \in \mathbb{Z}$ con $n \neq 0$, si consideri la mappa $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ data da $f : z \mapsto z^n$.
a) Dimostrare che f è un rivestimento;
b) Determinare il gruppo delle trasformazioni di rivestimento associato ad f.

125$^\diamond$ Dato X spazio di Hausdorff e x_0, x_1 punti distinti di X, si consideri lo spazio quoziente Y ottenuto identificando x_0 con x_1. Sia inoltre $\tilde{Y}$ lo spazio quoziente ottenuto da $X \times \mathbb{Z}$ identificando ogni punto della forma (x_1, n) con $(x_0, n+1)$, e sia $p : \tilde{Y} \to Y$ la mappa definita da $f : [(x, n)] \mapsto [x]$. Dimostrare che:
a) la definizione della mappa p è ben posta;
b) p è un rivestimento.

126$^\diamond$ Presi Y e $\tilde{Y}$ come nell'esercizio 125, per ogni $m \in \mathbb{Z}$ si consideri la mappa $g_m : \tilde{Y} \to \tilde{Y}$ data da $g_m : [(x, n)] \mapsto [(x, n+m)]$. Dimostrare che:
a) la definizione di g_m è ben posta;
b) $G := \{g_m : m \in \mathbb{Z}\}$ è un gruppo di omeomorfismi di $\tilde{Y}$ isomorfo a $\mathbb{Z}$;
c) l'azione di G su $\tilde{Y}$ è libera;
d) l'azione di G su $\tilde{Y}$ è propriamente discontinua;
e) l'azione di G su $\tilde{Y}$ induce la stessa relazione di equivalenza della mappa p, e dunque $\tilde{Y}/G$ è omeomorfo a Y.

127° Sia X uno spazio topologico e sia V_n una successione *crescente* di aperti connessi per archi la cui unione coincide con X. Dimostrare che se ogni V_n è semplicemente connesso allora X è semplicemente connesso.

Traccia. È facile verificare che X è connesso per archi. Dato un cammino γ in X, l'immagine di γ è compatta e quindi deve essere contenuta in V_n per qualche n. Quindi γ è omotopicamente equivalente al cammino costante in V_n, e a maggior ragione lo è in X.

128° Nel contesto dell'esercizio precedente, far vedere con un esempio che l'ipotesi che gli insiemi V_n siano aperti è necessaria.

129° L'esercizio 127 può essere generalizzato come segue. Sia X uno spazio topologico e sia V_n una successione *crescente* di aperti connessi per archi la cui unione coincide con X; indichiamo con i_n la mappa di inclusione di V_n in V_{n+1}, con j_n la mappa di inclusione di

V_n in X, e con $i_{n*}: \pi_1(V_n) \to \pi_1(V_{n+1})$ e $j_{n*}: \pi_1(V_n) \to \pi_1(X)$ gli omomorfismi associati. Dimostrare che:

a) se i_{n*} è iniettivo per ogni n, allora anche j_{n*} è iniettivo per ogni n;

b) se i_{n*} è surgettivo per ogni n, allora anche j_{n*} è surgettivo per ogni n.

Traccia. a) Se $[\gamma] \in \pi_1(V_n)$ appartiene a $\ker(j_{n*})$ allora γ è un cammino chiuso in V_n omotopicamente equivalente al cammino costante in X. Siccome l'immagine dell'omotopia è compatta, deve essere contenuta in V_m per qualche $m > n$, e dunque γ è omotopicamente equivalente al cammino costante anche in V_m. Ne consegue che $[\gamma]$ appartiene al nucleo di $i_{m-1*} \circ i_{m-2*} \circ \dots i_{n*}$, ed essendo questi omomorfismi tutti iniettivi, $[\gamma] = 0$ (come elemento di $\pi_1(V_n)$).

b) Dato $[\gamma] \in \pi_1(X)$, l'immagine di γ è compatta e quindi è contenuta in V_m per qualche $m > n$. Per la surgettività dell'omomorfismo $i_{m-1*} \circ i_{m-2*} \circ \dots i_{n*}$, deve esistere γ è omotopicamente equivalente in V_m ad un qualche cammino γ' contenuto in V_n. Questa equivalenza omotopica vale a maggior ragione in X, il che significa che $[\gamma] = j_{n*}([\gamma'])$.

130 $^\circ$ Sia X uno spazio topologico e sia U_n una successione di aperti che soddisfa le seguenti proprietà: i) l'unione dei V_n coincide con X; ii) V_n è semplicemente connesso per ogni n; iii) $V_n \cap V_{n+1}$ è connesso per archi per ogni n; iv) $V_n \cap V_{n+k}$ è vuoto per ogni n e per ogni $k \geq 2$. Dimostrare che allora X è semplicemente connesso.

Traccia. Utilizzare la versione semplice del teorema di van Kampen per dimostrare, per induzione su n, che l'unione U_n degli aperti V_m con $m \leq n$ è semplicemente connessa. Applicare quindi l'esercizio 127.

131 $^\diamond$ Si prendano $X, x_0, x_1, Y, \tilde{Y}$ come nell'esercizio 125. Si supponga inoltre che X sia semplicemente connesso, e che x_0 e x_1 ammettono due intorni aperti disgiunti U_0 ed U_1 che si deformano su x_0 e x_1 rispettivamente. Dimostrare che allora X è semplicemente connesso.

Traccia. Per ogni $n \in \mathbb{Z}$, sia $V_n := q(U_1 \times \{n-1\} \cup X \times \{n\} \cup U_0 \times \{n+1\})$, dove q è la proiezione di $X \times \mathbb{Z}$ sullo spazio quoziente $\tilde{Y}$. Dimostrare che V_n è aperto e $q(X \times \{n\})$ è un retratto di deformazione di V_n, e quindi V_n è semplicemente connesso. Applicare un'opportuna variante dell'esercizio precedente concludere.

132 $^\diamond$ Sia X uno spazio di Hausdorff connesso per archi e semplicemente connesso tale che ogni punto $x \in X$ ammette una base di intorni aperti U che si deformano su x. Si prenda quindi Y come nell'esercizio 125. Utilizzando quanto fatto negli esercizi 126 e 131 dimostrare che Y è connesso per archi e che il gruppo fondamentale di Y è isomorfo a $\mathbb{Z}$, scrivendone esplicitamente un generatore.

133 * Sia X lo spazio quoziente ottenuto a partire dall'intervallo $[-1, 1]$ identificando tra loro i punti $-1, 0, 1$. Detto G il gruppo libero con due generatori a e b, indichiamo con $\tilde{X}$ lo spazio quoziente ottenuto da $[-1, 1] \times G$ identificando ogni punto della forma $(-1, z)$ con $(0, za)$ ed ogni punto della forma $(1, z)$ con $(0, zb)$. Sia infine $p : \tilde{X} \to X$ la mappa data da $p : [(x, z)] \mapsto [x]$. Dimostrare che:

a) lo spazio X è omeomorfo al bouquet di due circonferenze, cioè ad un "otto";

b) la definizione di p è ben posta e p è un rivestimento;

c) $\tilde{X}$ è semplicemente connesso;

d) il gruppo fondamentale di X è isomorfo a G.

134 Dati i rivestimenti $p : \tilde{X} \to X$ e $q : \tilde{Y} \to Y$, con $\tilde{X}$ e $\tilde{Y}$ spazi connessi e localmente connessi per archi, si consideri la seguente proprietà (P): ogni mappa continua $g : X \to Y$ ammette un sollevamento $\tilde{g} : \tilde{X} \to \tilde{Y}$, vale a dire una mappa continua tale che $q\tilde{g} = gp$.

a) Dimostrare che se $\tilde{X}$ è semplicemente connesso allora vale la (P).
b) Dimostrare che se $g_*(\pi_1(X))$ è il sottogruppo banale di $\pi_1(Y)$ allora vale la (P).
c) Far vedere con un esempio che la proprietà (P) non vale sempre.

135 Sia $p : \tilde{X} \to X$ un rivestimento con $\tilde{X}$ spazio connesso e localmente connesso per archi. Dato un gruppo G di omeomorfismi di X, sia $\tilde{G}$ l'insieme degli omeomorfismi $\tilde{g}$ di $\tilde{X}$ per cui esiste $g \in G$ tale che

$$p\tilde{g} = gp \ . \tag{1}$$

Dimostrare che:
a) $\tilde{G}$ è un gruppo;
b) per ogni $\tilde{g} \in \tilde{G}$ esiste un unico $g \in G$ per cui vale la (1);
c) la mappa $\varphi : \tilde{g} \mapsto g$ dove g è data al punto b) è un omomorfismo di $\tilde{G}$ in G;
d) il nucleo di φ è il gruppo delle trasformazioni di rivestimento;
e) in generale non esiste un sottogruppo H di $\tilde{G}$ tale che $\varphi_{|H}$ è un isomorfismo di H in G.

136 ° Sia $X = U_1 \cup U_2$ dove $U_1, U_2, U_1 \cap U_2$ sono aperti connessi per archi di X e $U_2, U_1 \cap U_2$ sono semplicemente connessi. Detta $i : U_1 \to X$ la mappa di inclusione, dimostrare tramite il teorema di van Kampen che $i_* : \pi_1(U_1) \to \pi_1(X)$ è un isomorfismo.

137 ° Sia X il bouquet di n circonferenze. Dimostrare che il gruppo fondamentale di X è isomorfo al gruppo libero con n generatori. Indicare esplicitamente un insieme di generatori.

Traccia. Procedendo per induzione su n, supponiamo che l'enunciato sia vero per $n-1$ e dimostriamolo per n tramite il teorema di van Kampen. Ricordo che X è ottenuto a partire $S^1 \times \{1, \dots, n\}$ identificando a un punto l'insieme $\{e_0\} \times \{1, \dots, n\}$ con $e_0 := (1, 0)$, cfr. esercizio 33; indichiamo con p la proiezione canonica di $S^1 \times \{1, \dots, n\}$ su X. Detto V l'insieme dei punti $z \in S^1$ tali che $|z - 1| < 1$, poniamo

$$\begin{aligned} U_1 &:= p\big(S^1 \times \{1, \dots, n-1\} \cup V \times \{n\}\big) \ , \\ U_2 &:= p\big(V \times \{1, \dots, n-1\} \cup S^1 \times \{n\}\big) \ . \end{aligned}$$

Applichiamo quindi il teorema di van Kampen a $X = U_1 \cup U_2$ tenendo conto che: a) $U_1, U_2, U_1 \cap U_2$ sono aperti di X connessi per archi; b) $p(S^1 \times \{1, \dots, n-1\})$ è un retratto di deformazione di U_1 e quindi il gruppo fondamentale di U_1 è il gruppo libero con $n-1$ generatori; c) $p(S^1 \times \{n\})$ è un retratto di deformazione di U_2 e quindi il gruppo fondamentale di U_2 è il gruppo libero con un generatore; d) $U_1 \cap U_2 = p(V \times \{1, \dots, n\})$ è contraibile e pertanto è semplicemente connesso.

138 $^\diamond$ Sia X lo spazio quoziente ottenuto a partire dal disco D^2 identificando ogni punto x tale che $|x| = 1$ con $-x$. [X *è omeomorfo al piano proiettivo* $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, *cfr. esercizio 49.*]
Detta p la proiezione canonica di D^2 su X, poniamo $U_1 := p(\{x \in D^2 : |x| < 1\})$ e $U_2 := p(\{x \in D^2 : |x| > 0\})$. Dimostrare che:
a) $U_1, U_2, U_1 \cap U_2$ sono aperti connessi per archi;
b) U_1 è contraibile e quindi è semplicemente connesso;
c) $p(\{x : |x| = 1\})$ è un retratto di deformazione di U_2;
d) $\pi_1(U_2)$ è il gruppo libero generato da $[g]$ dove $g(s) := p(\cos(\pi t), \sin(\pi t))$ per $t \in I$;
e) $p(\{x : |x| = 1/2\})$ è un retratto di deformazione di $U_1 \cap U_2$;
f) $\pi_1(U_1 \cap U_2)$ è il gruppo libero generato da $[h]$ dove $h(t) := p(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ per $t \in I$;
g) h è omotopo a $g * g$ in U_2.

h) Applicando il teorema di van Kampen a $X = U_1 \cup U_2$ si ottiene che $\pi_1(X)$ è isomorfo al gruppo generato da $[g]$ con la relazione $[g]^2 = 1$, cioè è isomorfo a $\mathbb{Z}/2$.

139 $^\diamond$ Sia X lo spazio quoziente ottenuto a partire dal quadrato $Q := [0,1]^2$ identificando ogni punto della forma $(x,0)$ con $(x,1)$ ed ogni punto della forma $(0,y)$ con $(1,y)$. [*X è omeomorfo al toro T^2, cfr. esercizio 85.*]

Detta p la proiezione canonica di Q sullo spazio quoziente X, poniamo $U_1 := p((0,1)^2)$ e $U_2 := p(Q \setminus \{(1/2,1/2)\})$. Siano inoltre $g_1, g_2 : I \to X$ i cammini chiusi dati da

$$g_1(t) := p(t,0) \quad \text{e} \quad g_2(t) := p(0,t) \ .$$

Dimostrare che:

a) $U_1, U_2, U_1 \cap U_2$ sono aperti connessi per archi;

b) U_1 è contraibile e quindi è semplicemente connesso;

c) $p(\partial Q)$ è un retratto di deformazione di U_2

d) $p(\partial Q)$ è omeomorfo al bouquet di due circonferenze;

e) $\pi_1(U_2)$ è il gruppo libero generato da $[g_1]$ e $[g_2]$;

f) detta C la circonferenza di centro $(1/2,1/2)$ e raggio $1/4$, $p(C)$ è un retratto di deformazione di $U_1 \cap U_2$;

g) $\pi_1(U_1 \cap U_2)$ è il gruppo libero generato da $[h]$ dove

$$h(t) := p\big(1/2 + \cos(2\pi t)/4, 1/2 + \sin(2\pi t)/4\big) \quad \text{per } t \in I;$$

h) h è omotopo a $g_1 * g_2 * i(g_1) * i(g_2)$ in U_2.

i) Applicando il teorema di van Kampen a $X = U_1 \cup U_2$ si ottiene che $\pi_1(X)$ è isomorfo al gruppo generato da $[g_1]$ e $[g_2]$ con la relazione $[g_2][g_1] = [g_1][g_2]$, cioè è isomorfo a $\mathbb{Z}^2$.

140 $^\diamond$ Sia X la bottiglia di Klein, vale a dire lo spazio ottenuto a partire dal quadrato $Q := [0,1]^2$ identificando ogni punto della forma $(0,y)$ con $(1,1-y)$ ed ogni punto della forma $(x,0)$ con $(x,1)$ (cfr. esercizio 87).

Si prendano U_1, U_2, g_1 e g_2 come nell'esercizio 139. Applicando il teorema di van Kampen a $X = U_1 \cup U_2$, si dimostri che $\pi_1(X)$ è isomorfo al gruppo generato da $[g_1]$, $[g_2]$ con la relazione $[g_2][g_1] = [g_1][g_2]^{-1}$, ed è quindi isomorfo al prodotto semidiretto di $\mathbb{Z}$ per $\mathbb{Z}$ (cfr. esercizio 108).

141 $*$ Presi Q, X come nell'esercizio precedente e detta p la proiezione di Q sul quoziente X, si considerino i cammini chiusi $h_1, h_2, h : I \to X$ dati da

$$h_1(s) := p(t, 1/2) \ , \quad h_2(s) := p(t,0) \ ,$$

e

$$h(t) := \begin{cases} p(2t, 1/3) & \text{per } 0 \le t \le 1/2 \\ p(2t-1, 2/3) & \text{per } 1/2 \le t \le 1 \end{cases} .$$

Posto $U_1 := X \setminus h_2(I)$ e $U_2 := X \setminus h_1(I)$, dimostrare che:

a) $U_1, U_2, U_1 \cap U_2$ sono connessi per archi;

b) $[h_1]$ è un generatore di $\pi_1(U_1)$;

c) $[h_2]$ è un generatore di $\pi_1(U_2)$;

d) $[h]$ è un generatore di $\pi_1(U_1 \cap U_2)$.

e) Applicando il teorema di van Kampen a $X = U_1 \cup U_2$, si dimostri che $\pi_1(X)$ è isomorfo al gruppo generato da $[h_1]$ e $[h_2]$ con la relazione $[h_1]^2 = [h_2]^2$.

142* Si considerino i gruppi G ed H definiti in termini di generatori e relazioni da

$$G := \langle a_1, a_2 \,|\, a_2 a_1 = a_1 a_2^{-1} \rangle \quad \text{e} \quad H := \langle b_1, b_2 \,|\, b_1^2 = b_2^2 \rangle .$$

Per quanto visto negli esercizi 140 e 141 questi due gruppi devono essere isomorfi. Scrivere esplicitamente un isomorfismo.

143 Sia X il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ dato dall'unione di una sfera S e di un suo diametro D. Dimostrare che il gruppo fondamentale di X è isomorfo a $\mathbb{Z}$.

Traccia. Sia C è una semicirconferenza contenuta in S con estremi coincidenti con gli estremi di D (per cui $D \cup C$ è omeomorfo ad una circonferenza). Scomporre X come $X = U_1 \cup U_2$ dove U_1 ed U_2 sono opportuni intorni aperti di S e di $D \cup C$ rispettivamente, ed applicare il teorema di van Kampen.

144 Dare una dimostrazione alternativa dell'esercizio precedente utilizzando l'esercizio 132.

145 In $\mathbb{R}^3$ consideriamo la circonferenza $C := \{x_1^2 + x_2^2 = 1,\, x_3 = 0\}$, il semispazio chiuso $D := \{x_1 \geq 0\}$ ed il piano $P := \{x_2 = 0\}$. Si ponga quindi $X := D \setminus C$.
a) Dimostrare che $X \cap P$ è un retratto di deformazione di X.
b) Dimostrare che il gruppo fondamentale di X è isomorfo a $\mathbb{Z}$ e scriverne un generatore.

146* In $\mathbb{R}^3$ consideriamo la circonferenza $C := \{x_1^2 + x_2^2 = 1,\, x_3 = 0\}$ e l'insieme $X := \mathbb{R}^3 \setminus C$. Calcolare il gruppo fondamentale di X.

Traccia. Scomponiamo X come $X = U_1 \cup U_2$ dove

$$U_1 := X \cap \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 > -1/2\} \quad \text{e} \quad U_2 := X \cap \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 < 1/2\} .$$

I gruppi fondamentali $\pi_1(U_1)$ e $\pi_1(U_2)$ sono isomorfi a $\mathbb{Z}$ (cfr. esercizio 145) e indichiamo con a_1 ed a_2 i rispettivi generatori. Detto P il piano $\{x_1 = 0\}$, $U_1 \cap U_2$ si deforma su $X \cap P$, vale a dire un piano meno due punti, e quindi $\pi_1(U_1 \cap U_2)$ è il gruppo libero con due generatori, che indichiamo con b_1, b_2. Si verifichi che, a patto di scegliere opportunamente i generatori dei vari gruppi, l'immersione canonica di $\pi_1(U_1 \cap U_2)$ in $\pi_1(U_1)$ porta b_1 e b_2 in a_1 mentre l'immersione di $\pi_1(U_1 \cap U_2)$ in $\pi_1(U_2)$ porta b_1 e b_2 in a_2. Pertanto $\pi_1(X)$ è isomorfo al gruppo dato dai generatori a_1, a_2 e dalla relazione $a_1 = a_2$, ed è quindi isomorfo al gruppo libero con un generatore, cioè $\mathbb{Z}$.

147 Calcolare il gruppo fondamentale di $X := \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : z_1 \neq 0\}$.

148 Calcolare il gruppo fondamentale di $X := \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : z_1 \neq 0, 1\}$.

Traccia. Applicare il teorema di van Kampen a $X = U_1 \cup U_2$ dove $U_1 := X \cap \{\operatorname{Re} z_1 > 0\}$ e $U_2 := X \cap \{\operatorname{Re} z_1 < 1\}$.

149 Sia R una semiretta chiusa in $\mathbb{R}^2$ e δ un numero reale positivo. Esibire un isomorfismo $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \setminus R$ tale che $\varphi(x) = x$ per ogni x tale che $\operatorname{dist}(x, R) \geq \delta$.

150* Sia $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$ un sottoinsieme finito di $\mathbb{R}^2$. Completando la seguente traccia di dimostrazione, far vedere che $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus S)$ è isomorfo al gruppo libero con n generatori.

Traccia. Procedendo per induzione su n, supponiamo l'enunciato vero per $n - 1$ e dimostriamolo per n. Sia $S' := S \setminus \{x_n\}$ e si prenda una semiretta chiusa R con estremo x_n che non interseca S'. Preso quindi $\delta > 0$ tale che $\delta \leq \operatorname{dist}(x_i, R)$ per $i < n$, si indichi con

U il δ-intorno aperto di R, vale a dire l'insieme degli $x \in \mathbb{R}^2$ tale che $\operatorname{dist}(x, R) < \delta$. Si applichi quindi il teorema di van Kampen a $X = U_1 \cup U_2$ dove $X := \mathbb{R}^2 \setminus S$, $U_1 := X \setminus R$, $U_2 := U \setminus \{x_n\}$ osservando che: a) U_1 è omeomorfo a $\mathbb{R}^2 \setminus S'$ (cfr. esercizio 149) e quindi $\pi_1(U_1)$ è un gruppo libero con $n-1$ generatori; b) $\pi_1(U_2)$ è isomorfo a $\mathbb{Z}$; c) $U_1 \cap U_2 = U \setminus R$ è contraibile e quindi semplicemente connesso.

151 Nel contesto dell'esercizio 150, prendiamo $r > 0$ tale che $r < |x_j - x_k|$ per ogni $j \neq k$, e per ogni j consideriamo il cammino $f_j : I \to \mathbb{R}^2 \setminus S$ dato da

$$f_j(s) := x_j + r(\cos(2\pi s), \sin(2\pi s)) \ .$$

Dimostrare che $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus S)$ è generato da $[f_j]$ con $j = 1, \dots, n$.
[*Una versione formalmente più precisa dell'enunciato è la seguente: preso $x_0 \in \mathbb{R}^2 \setminus S$ e detto $g_j : I \to \mathbb{R}^2 \setminus S$ un qualunque cammino che va da x_0 ad $x_j + (r, 0)$, il gruppo $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus S; x_0)$ è generato dagli elementi $[g_j * f_j * i(g_j)]$ con $j = 1, \dots, n$.*]

152$^\diamond$ Sia A un aperto connesso di $\mathbb{R}^2$, p un punto di A, e i la mappa di inclusione di $A \setminus \{p\}$ in A. Dimostrare che $i_* : \pi_1(A \setminus \{p\}) \to \pi_1(A)$ è un omomorfismo surgettivo e non iniettivo.

Traccia. Per far vedere che i_* è surgettivo, applicare il teorema di van Kampen alla scomposizione $A = U_1 \cup U_2$ dove $U_1 := A \setminus \{p\}$ e U_2 è un disco aperto con centro p e contenuto in A. Per far vedere che i_* è iniettivo, si consideri una circonferenza S con centro in p e contenuta in U_2 e si indichi con j la mappa di inclusione di S in $A \setminus \{p\}$: siccome S è una retratto di $A \setminus \{p\}$, $j_* : \pi_1(S) \to \pi_1(A \setminus \{p\})$ è un omomorfismo iniettivo. D'altra parte $i_* \circ j_* : \pi_1(S) \to \pi_1(A)$ è un omomorfismo banale, e quindi i_* non può essere iniettivo.

153* Sia A un aperto connesso di $\mathbb{R}^2$ e p un punto di A. Dimostrare che $\pi_1(A \setminus \{p\})$ è isomorfo al prodotto libero di $\pi_1(A)$ e $\mathbb{Z}$.

154 Sia A un aperto connesso di $\mathbb{R}^m$ con $m \geq 3$, S un sottoinsieme finito di A, ed $i : A \setminus S \to A$ la mappa di inclusione. Dimostrare che $A \setminus S$ è connesso per archi e $i_* : \pi_1(A \setminus S) \to \pi_1(A)$ è un isomorfismo. In altre parole, rimuovere un numero finito di punti da un aperto di $\mathbb{R}^m$ con $m \geq 3$ non altera il gruppo fondamentale.

Traccia. Procedendo per induzione sul numero n di elementi di S, dimostriamo l'enunciato per n supponendo che valga per $n-1$. Scelto $x \in S$, si ponga $S' := S \setminus \{x\}$ e si prenda $r > 0$ tale che, detta U_1 la palla aperta di centro x e raggio r in $\mathbb{R}^m$, si ha $U_1 \subset A$ e $U_1 \cap S = \{x\}$. Si applichi quindi il teorema di van Kampen a $X = U_1 \cup U_2$ dove $X := A \setminus S'$, U_1 è dato sopra e $U_2 := A \setminus S$ utilizzando il fatto che U_1 ed $U_1 \cap U_2 = U_1 \setminus \{x\}$ sono semplicemente connessi.
[*È bene osservare che la dimostrazione standard di questo enunciato – come pure degli enunciati contenuti negli esercizi 155, 158, 159 e 161 – è completamente diversa e nettamente più "naturale", ma richiede concetti fuori dalla portata di questo corso.*]

155 Come l'esercizio precedente, supponendo però che S sia un sottoinsieme discreto in A, vale a dire che ogni punto di A ammette un intorno U tale che $S \cap U$ è finito.

Traccia. Presa una successione crescente di compatti K_n con $K_0 = \varnothing$ e la cui unione è A, si ponga $S_n := S \setminus K_n$ e $V_n := A \setminus S_n$. Allora V_n è uguale a V_{n+1} meno un numero finito di punti, e detta i_n la mappa di inclusione di V_n in V_{n+1}, per quanto visto nell'esercizio precedente $i_{n\,*} : \pi_1(V_n) \to \pi_1(V_{n+1})$ è un isomorfismo. Per concludere basta applicare l'esercizio 129.

156 Dato A aperto in uno spazio metrico X, per ogni $x \in A$ si indichi con $r(x)$ l'estremo superiore dei numeri positivi r tali che la palla aperta di centro x e raggio r è contenuta in A. Dimostrare che:
a) $r(x)$ è un massimo;
b) $r(x) = \mathrm{dist}(x, X \setminus A) := \min\{d(x,y) : y \in X \setminus A\}$
c) $r : A \to (0, +\infty)$ è una funzione continua, e per la precisione $|r(x_1) - r(x_2)| \le d(x_1, x_2)$ per ogni $x_1, x_2 \in A$.

157* Dato un segmento I contenuto in $\mathbb{R}^m$, indichiamo con ∂I l'insieme costituito dagli estremi di I. Sia A un aperto connesso di $\mathbb{R}^m$ con $m \ge 4$ ed I un segmento chiuso contenuto in A eccetto al più gli estremi. Indichiamo con i e j le mappe di inclusione di $A \setminus I$ in $A \setminus \partial I$ e in A, rispettivamente. Dimostrare quanto segue:
a) $A \setminus \partial I$ e $A \setminus I$ sono connessi;
b) $i_* : \pi_1(A \setminus I) \to \pi_1(A \setminus \partial I)$ è un isomorfismo;
c) $j_* : \pi_1(A \setminus I) \to \pi_1(A)$ è un isomorfismo;

Traccia. b) A patto di scegliere opportunamente gli assi, si può supporre che il segmento I sia della forma $I = [\alpha_1, \alpha_2] \times \{0\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m-1} = \mathbb{R}^m$. Si ponga

$$U_1 := \big\{(t,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m-1} : \ t \in (\alpha_1, \alpha_2), \ |y| < r(t,0)\big\}$$

dove $r : A \to (0, +\infty)$ è la funzione definita nell'esercizio 156, e si applichi quindi il teorema di van Kampen a $X = U_1 \cup U_2$ dove $X := A \setminus \partial I$ e $U_2 := A \setminus I$. Il punto chiave è che sia U_1 che $U_1 \cap U_2$ sono semplicemente connessi. Infatti un retratto di deformazione di U_1 è il segmento aperto $J := (\alpha_1, \alpha_2) \times \{0\}$, mentre un retratto di deformazione di $U_1 \cap U_2 = U_1 \setminus I$ è la superficie

$$S := \big\{(t,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m-1} : \ t \in (\alpha_1, \alpha_2), \ |y| = \tfrac{1}{2} r(t,0)\big\} \ ,$$

che è omeomorfa al prodotto $(\alpha_1, \alpha_2) \times S^{m-2}$, che a sua volta è semplicemente connesso.
c) Scrivere j come $i' \circ i$ dove i' è la mappa di inclusione di $A \setminus \partial I$ in A, ed usare il fatto che i'_* è un isomorfismo (esercizio 154).

158 Sia A un aperto connesso di $\mathbb{R}^m$ con $m \ge 4$, sia S l'unione di una famiglia finita $\mathscr{F}$ di punti o di segmenti chiusi contenuti in A tranne al più gli estremi, e sia i la mappa di inclusione di $A \setminus S$ in A. Dimostrare che $A \setminus S$ è connesso per archi e $i_* : \pi_1(A \setminus S) \to \pi_1(A)$ è un isomorfismo.

Traccia. Ridursi al caso in cui ogni coppia di segmenti ha in comune al più un estremo, ed utilizzare quindi gli esercizi 154 e 157.

159 Come l'esercizio precedente, supponendo però che $\mathscr{F}$ sia una famiglia localmente finita in A, vale a dire che ogni punto di A ammette un intorno U tale che interseca solo un sottoinsieme finito di elementi di $\mathscr{F}$ (cfr. esercizio 155).

160* Si chiama *simplesso* di dimensione n in $\mathbb{R}^m$ l'insieme delle combinazioni convesse di $n+1$ punti affinemente indipendenti, detti *vertici* del simplesso (pertanto i simplessi di dimensione 0 sono i punti, quelli di dimensione 1 i segmenti, quelli di dimensione 2 i triangoli, e così via). Si chiama inoltre *bordo* del simplesso l'unione dei simplessi generati da tutte le sottofamiglie proprie dei vertici.
Sia A un aperto connesso di $\mathbb{R}^m$ con $m \ge 2$ e sia S l'unione di una famiglia (localmente) finita di simplessi in $\mathbb{R}^m$ di dimensione minore o uguale a $m-2$. Dimostrare che $A \setminus S$ è connesso per archi. [*Cfr. esercizio 22.*]

161* Dimostrare la seguente generalizzazione degli esercizi 154 e 158: sia A un aperto connesso di $\mathbb{R}^m$ con $m \geq 3$, sia S l'unione di una famiglia (localmente) finita di simplessi di dimensione minore o uguale a $m-3$ contenuti in A tranne al più il bordo. e sia i la mappa di inclusione di $A \setminus S$ in A. Allora i_* è un isomorfismo di $\pi_1(A \setminus S)$ in $\pi_1(A)$.

162 Dato un intero $n \geq 2$, si ponga $X := \mathbb{R}^3$ e si prendano X_*^n e G come nell'esercizio 117. Dimostrare che X_*^n è semplicemente connesso e $\pi_1(X_*^n/G)$ è isomorfo a G cha a sua volta è isomorfo al gruppo delle permutazioni di n elementi. [*Per dimostrare che X_*^n è semplicemente connesso utilizzare l'esercizio 161.*]

163 Dato un gruppo finito H, costruire uno spazio topologico X connesso per archi tale che $\pi_1(X)$ è isomorfo a H.

Traccia. Utilizzare il fatto H è isomorfo ad un sottogruppo del gruppo delle permutazioni S_n con n opportuno, e quindi anche ad un sottogruppo del gruppo G definito nell'esercizio 117. Prendere quindi $X := X_*^n/H$.

Nota sulla terminologia. Negli esercizi che seguono scriviamo S^1 per l'insieme dei numeri complessi di norma 1 e $\mathbb{C}^*$ per quello dei numeri complessi diversi da zero.

Si suppone che un cammino sia sempre regolare quanto basta per poter integrare una forma, vale a dire continuo e C^1 a tratti. Diremo inoltre che due cammini chiusi γ_0, γ_1 sono *omotopi* in X se sono omotopi nella classe dei cammini chiusi contenuti in X, ovvero se esiste una mappa continua $F : I \times I \to X$ tale che $F(t, 0) = \gamma_0(t)$ e $F(t, 1) = \gamma_1(t)$ per ogni t, e $F(0, s) = F(1, s)$ per ogni s. Si tratta dunque di una nozione diversa da quella di *equivalenza omotopica*, dove invece $F(0, s)$ e $F(1, s)$ risultano essere uguali al punto base assegnato per ogni s.

A meno che non sia esplicitamente detto il contrario, $\log z$ indica la *determinazione standard* del logaritmo complesso, cfr. esercizio 10.

Dato q numero reale positivo, diciamo che una funzione f definita su (un sottoinsieme di) $\mathbb{C}$ ha *crescita di ordine q all'infinito* se esistono delle costanti C ed R tali che $|f(z)| \le C|z|^q$ per ogni z con $|z| \ge R$ (ed essere precisi, questa è la definizione di crescita di ordine q *dall'alto*; non si impone infatti alcuna stima dal basso sul valore di $|f(z)|$).

1 Calcolare tutte le radici n-esime del numero complesso z nei seguenti casi:
a) $z = -8i$ e $n = 3$;
b) $z = -4$ e $n = 4$;
c) $z = -1 - i$ e $n = 2$;
d) $z = -1 + i\sqrt{3}$ e $n = 4$.

2 ° Dimostrare che la mappa esponenziale $\exp : z \mapsto e^z$ è un rivestimento da $\mathbb{C}$ in $\mathbb{C}^*$.

3 $^\diamond$ Sia A un aperto connesso di $\mathbb{C}$ e sia $f : A \to \mathbb{C}$ una funzione continua tale che $\exp(f)$ è costante. Dimostrare che f è costante.

4 ° Dimostrare che la mappa $z \mapsto z^n$ è un rivestimento da $\mathbb{C}^*$ in $\mathbb{C}^*$ e anche da S^1 in S^1 per ogni intero $n \in \mathbb{Z}$.

5 Dimostrare che la mappa $z \mapsto z^n$ non è un rivestimento da $\mathbb{C}$ in $\mathbb{C}$ per alcun intero $n > 1$.

6 ° a) Sia A un aperto semplicemente connesso di $\mathbb{C}^*$. Dimostrare che esiste un'inversa destra della funzione esponenziale definita su A, vale a dire una funzione $f : A \to \mathbb{C}$ tale che $\exp(f(z)) = z$ per ogni $z \in A$. Una tale funzione viene detta *determinazione* del logaritmo complesso su A.

b) Dimostrare che le determinazioni del logaritmo su A sono tutte e sole le funzioni della forma $f(z) + 2k\pi i$ con $k \in Z$.

7 $^\diamond$ a) Far vedere che non esiste alcuna inversa destra della funzione esponenziale definita su $\mathbb{C}^*$, e neanche definita su S^1.

b) Sia $n \in \mathbb{Z}$ un numero intero con $|n| \ge 2$; far vedere che non esiste alcuna inversa destra della funzione $z \mapsto z^n$ definita su $\mathbb{C}^*$, e neanche definita su S^1.

8 Dato $\alpha \in (0, 2\pi)$, sia A_α il complementare in $\mathbb{C}$ della semiretta chiusa $\{re^{i\alpha} : r \in [0, \infty)\}$, e si indichi con $\log z$ la determinazione del logaritmo complesso definita su A_α che coincide con l'usuale logaritmo per tutti i numeri reali positivi; chiaramente il valore di $\log z$ dipende anche dalla scelta dell'angolo α. Calcolare $\log z$ nei seguenti casi:
a) $z = -1 + i$ e $\alpha = \pi/2, \pi, 3\pi/2$;
b) $z = -2 + i\sqrt{3}$ e $\alpha = \pi/2, \pi, 3\pi/2$.

9 Presi α, A_α e $\log z$ come nell'esercizio 7 e preso $a \in \mathbb{C}$, si definisce z^a per ogni $z \in A_\alpha$ ponendo $z^a := \exp(a \log z)$; come nel caso del logaritmo complesso, quando a non è intero il valore di z^a dipende anche dalla scelta di α. Calcolare z^a nei seguenti casi:
a) $z = 2i$, $a = 1/2$, $\alpha = \pi/4, \pi, 7\pi/4$;
b) $z = -2i$, $a = -3/2$, $\alpha = \pi/4, \pi, 7\pi/4$;
c) $z = -8$, $a = 2/3$, $\alpha = \pi/2, 3\pi/2$.

10 Sia $\log z$ la *determinazione standard* del logaritmo complesso, vale a dire quella definita sul complementare della semiretta dei numeri reali negativi o nulli che coincide con l'usuale logaritmo per tutti i numeri reali positivi (cioè la funzione $\log z$ definita nell'esercizio 7 per $\alpha = \pi$). Calcolare $\log z$ nei seguenti casi:
a) $z = i$; b) $z = -3i$; c) $z = 1 - i$; d) $z = -(\sqrt{3} + i)$; e) $z = -1 + \sqrt{3}i$.

11 Calcolare i primi 3 coefficienti delle serie formali ST, $S \circ T$ e $T \circ S$ dove

$$S(X) := \sum_{n=0}^{\infty} n!\, X^n \quad \text{e} \quad T(X) := \sum_{n=1}^{\infty} n^n X^n \,.$$

12 Calcolare i raggi di convergenza delle seguenti serie di potenze, dove a è un qualunque numero reale positivo:
a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a^n X^n$; b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} n^3 X^n$; c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^a X^n$; d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^n X^{3n}$; e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \log(n+1)\, X^n$;
f) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} 2^{n \log n} X^n$; g) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^{3n}}{1+2^n}$; h) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (n + \cos n) X^n$; i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^{n^2}}{1+3^n}$.

13 Sia (a_n) una successione di numeri complessi che soddisfa l'equazione ricorsiva

$$a_{n+1} = \alpha a_n + \beta \quad \text{per } n = 0, 1, 2 \ldots$$

dove α, β sono numeri complessi assegnati con $\alpha \neq 0$. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze $\sum a_n X^n$.

14° Sia (a_n) una successione di numeri complessi non nulli. Dimostrare che il raggio di convergenza R della serie di potenze $\sum_n a_n X^n$ soddisfa

$$\liminf_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \le \frac{1}{R} \le \limsup_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \tag{1}$$

(per $1/R$ si segue la solita convenzione per cui $1/{+\infty} = 0$ e $1/0 = +\infty$). Dedurne in particolare che

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

nel caso che il limite a sinistra dell'uguale esista.

15 Dare un esempio di serie di potenze per cui entrambe le disuguaglianze nella formula (1) dell'esercizio 14 sono strette.

16* Sia (a_n) una successione di numeri reali che soddisfa l'equazione ricorsiva

$$a_{n+1} = \log(1 + \alpha^{a_n}) \quad \text{per } n = 0, 1, 2 \ldots$$

dove $\alpha > 1$ è un numero reale assegnato. Determinare al variare di α il raggio di convergenza della serie di potenze $\sum a_n X^n$.

17 Per ciascuna delle seguenti serie di potenze calcolare il raggio di convergenza e trovare una rappresentazione esplicita in termini di funzioni elementari della funzione analitica associata:

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} X^n$; b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n} X^n$; c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X^{2n}}{n}$; d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\, X^{n-1}$; e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 X^n$;

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n a^n X^{2n}$; g) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^{2n+1}}{n!}$; h) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^{2n}}{n!}$; i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{(2n)!}$; l) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} X^{2n+1}$.

18 Utilizzando quanto fatto nell'esercizio precedente, calcolare il valore delle seguenti serie numeriche:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$; b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5^n}$; s) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$; d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}$; e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}$.

19 ° Date le serie di potenze a coefficienti complessi

$$S(X) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \quad \text{e} \quad S_k(X) := \sum_{n=0}^{\infty} a_{k,n} X^n \quad \text{con } k = 1, 2, \dots,$$

indichiamo con R ed R_k i corrispondenti raggi di convergenza. Supponiamo ora che

$$\lim_{k \to +\infty} a_{k,n} = a_n \quad \text{per } n = 0, 1, 2, \dots \tag{1}$$

e che esista inoltre una successione di numeri positivi α_n tale che

$$|a_{k,n}| \leq \alpha_n \quad \text{per ogni } k, n. \tag{2}$$

Indichiamo quindi con r il raggio di convergenza della serie $\sum_n \alpha_n X^n$. Dimostrare che
a) $R \geq r$ e $R_k \geq r$ per ogni k;
b) le funzioni $S_k(z)$ convergono uniformemente a $S(z)$ su $\{|z| \leq \rho\}$ per ogni $\rho < r$.

20 Nel contesto dell'esercizio 19, far vedere con degli esempi che rimuovendo l'ipotesi (2) possono verificarsi le seguenti situazioni:
a) $R_k = +\infty$ per ogni k e $R = 0$;
b) $R_k = 0$ per ogni k e $R = +\infty$;
c) $R_k = R = +\infty$ per ogni k ma $S_k(z) \not\to S(z)$ per $z \neq 0$.

21 * Nel contesto dell'esercizio 19, far vedere con un esempio che può verificarsi la seguente situazione: $R_k = R = +\infty$ per ogni k ma $S_k(z) \not\to S(z)$ per ogni z tale che $|z| > \rho$.

22 ◇ Usando l'esercizio 19, dimostrare che $e^z = \displaystyle\lim_{k \to +\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right)^k$ per ogni $z \in \mathbb{C}$.

23 ° Sia A un'aperto di $\mathbb{C}^*$, e sia $f : A \to \mathbb{C}$ una determinazione del logaritmo complesso definita su A. Dimostrare che f è una funzione analitica e verifica $f'(z) = 1/z$.

24 Sia A un'aperto di $\mathbb{C}^*$, e sia $f : A \to \mathbb{C}$ una funzione analitica tale che $f'(z) = 1/z$ per ogni $z \in A$. Dimostrare che $f(z)$ coincide a meno di costante con una determinazione del logaritmo complesso.

25 Data la serie di potenze

$$S(X) := \sum_{n=2}^{\infty} \frac{X^n}{n(n-1)} \ ,$$

si dimostri quanto segue:
a) il raggio di convergenza di $S(X)$ è 1;
b) la funzione $S(x)$ soddisfa $S''(x) = 1/(1-x)$ per ogni $x \in (-1,1)$;
c) $S(x) = x + (1-x)\log(1-x)$ per ogni $x \in (-1,1)$;
d) $S(z) = z + (1-z)\log(1-z)$ per ogni $z \in \mathbb{C}$ con $|z| < 1$.

26 Date la serie di potenze

$$S(X) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X^n}{n^2}$$

e la funzione

$$f(x) := \int_0^x \frac{-\log(1-t)}{t}\, dt \ ,$$

dimostrare quanto segue:
a) il raggio di convergenza di $S(X)$ è 1;
b) la funzione f è ben definita per ogni $x \leq 1$;
c) la funzione $S(x)$ soddisfa $(x\,S'(x))' = 1/(1-x)$ per ogni $x \in (-1,1)$;
d) $S(x) = f(x)$ per ogni $x \in (-1,1)$;
e) $S(x) + S(1-x) = f(1) - \log x \, \log(1-x)$ per ogni $x \in (0,1)$;
f) $S(z) + S(1-z) = f(1) - \log z \, \log(1-z)$ per ogni $z \in \mathbb{C}$ tale che $|z| < 1$ e $|1-z| < 1$.

27$^\diamond$ Dimostrare che la funzione

$$f(z) := \frac{\log(1+z)}{z}$$

può essere estesa per continuità al punto $z = 0$, e risulta essere analitica in quel punto.

28 Dimostrare la seguente versione della formula di sommazione per parti di Abel: dati i numeri complessi A_n, B_n con $n = 0, 1, \dots, m$, si ponga

$$a_n := A_n - A_{n-1} \quad \text{e} \quad b_n := B_n - B_{n-1} \tag{1}$$

per ogni $n = 1, \dots, m$. Allora

$$\sum_{n=1}^{m} a_n B_n = [A_m B_m - A_0 B_0] - \sum_{n=1}^{m} A_{n-1} b_n \ . \tag{2}$$

[*A livello formale possiamo interpretare la* (1) *dicendo che* a_n *e* b_n *sono l'equivalente discreto delle derivate di* A_n *e* B_n*; se poi interpretiamo le sommatorie come l'equivalente discreto degli integrali, allora la* (2) *corrisponde all'usuale formula di integrazione per parti.*]

29 Sia (a_n) una successione di numeri complessi tale che la serie $\sum_n a_n$ converge. Dimostrare che la serie di funzioni

$$S(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \ .$$

converge uniformemente per $x \in [0,1]$, e pertanto $S(x)$ è continua sull'intervallo $[0,1]$.

Traccia. Fissiamo $\varepsilon > 0$. Poiché la serie $\sum_n a_n$ converge, esiste un indice $l > 0$ tale che, posto $A_n := a_l + a_{l+1} + \cdots + a_n$ per ogni $n \geq l$, si ha $|A_n| \leq \varepsilon$.
Prendiamo $m > l$ ed $x \in [0, 1]$. Applicando la formula di sommazione per parti (2) dell'esercizio 28 con A_n dato sopra e $B_n := x^n$ otteniamo

$$\sum_{n=l+1}^{m} a_n x^n = A_m x^m - A_l x^l - \sum_{n=l+1}^{m} A_{n-1}(x^n - x^{n-1}) \ ,$$

e quindi, usando il fatto che $|A_n| \leq \varepsilon$ e $0 \leq x \leq 1$,

$$\left| \sum_{n=l+1}^{m} a_n x^n \right| \leq 2\varepsilon + \varepsilon \sum_{n=l+1}^{m} (x^{n-1} - x^n) \leq 2\varepsilon + \varepsilon(x^l - x^m) \leq 3\varepsilon \ .$$

Da questo si deduce che le somme parziali della serie di funzioni $\sum_n a_n x^n$ costituiscono una successione di Cauchy nello spazio delle funzioni continue su $[0, 1]$ dotato della norma del sup e pertanto convergono uniformemente ad una funzione continua.

30 Sia data una serie di potenze $S(X) = \sum_n a_n X^n$ con raggio di convergenza R, e un numero complesso z_0 con $|z_0| = R$ tale che la serie $S(z_0)$ converge. Utilizzando quanto dimostrato nell'esercizio 29, dimostrare che

$$\lim_{t \uparrow 1} S(tz_0) = S(z_0) \ .$$

31* È noto che la serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

ha raggio di convergenza 1, converge assolutamente a $-\log(1 - z)$ per ogni $z \in \mathbb{C}$ con $|z| < 1$, e non converge per $|z| > 1$. Dimostrare che la serie converge a $-\log(1 - z)$ anche per ogni $z \in \mathbb{C}$ con $|z| = 1$ e $z \neq 1$.

Traccia. Per dimostrare la convergenza, si applichi la formula di sommazione per parti (2) nell'esercizio 28 con $A_n = 1/(n+1)$ e $B_n := (z^n - 1)/(z - 1)$, da cui segue $a_n = -1/(n(n+1))$ e $b_n := z^n$. Per dimostrare che il valore della serie è proprio $-\log(1 - z)$ si utilizzi l'esercizio 30.

32 Dimostrare che $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \log 2$. [*Usare l'esercizio 31.*]

33 Dimostrare che $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \int_0^1 \frac{-\log(1 - t)}{t} \, dt$. [*Usare gli esercizi 26 e 30.*]

34 Determinare lo sviluppo in serie di Taylor in 0 della funzione $\arctan x$ ed utilizzarlo per dimostrare che

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots \qquad (1)$$

Traccia. Per ottenere la serie di Taylor di $\arctan x$ conviene partire da quella, nota, di $1/(1 + x^2)$. La serie di potenze così ottenuta ha raggio di convergenza 1; per ottenere la (1) si deve quindi usare quanto dimostrato nell'esercizio 30.

35 ° Utilizzare le funzioni e^z e $\log z$ per scrivere il prolungamento analitico della funzione di variabile reale $f(x)$ all'aperto D in $\mathbb{C}$ nei seguenti casi:
a) $f(x) := \cos x$ e $D := \mathbb{C}$;
b) $f(x) := \sin x$ e $D := \mathbb{C}$;
c) $f(x) := \tan x$ e $D := \mathbb{C} \setminus \{z = \pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$;
d) $f(x) := \arctan x$ e $D := \{z \in \mathbb{C} : -1 < \operatorname{Im} z < 1\}$;
e) $f(x) := \arcsin x$ e $D := \{z \in \mathbb{C} : -1 < \operatorname{Re} z < 1\}$;
f) $f(x) := x^a$ con $a \in \mathbb{R}$ e $D := \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$.

36 ° Utilizzando il principio del prolungamento analitico, dimostrare le seguenti identità ($\cos z$, $\sin z$, $\arctan z$ e z^a sono i prolungamenti analitici di $\cos x$, $\sin x$, $\arctan x$ e x^a definiti nell'esercizio 35):
a) $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ per ogni $z \in \mathbb{C}$;
b) $(\sin z)' = \cos z$ per ogni $z \in \mathbb{C}$;
c) $(\arctan z)' = 1/(1 + z^2)$ per ogni $z \in \mathbb{C}$ tale che $-1 < \operatorname{Im} z < 1$;
d) $(\log z)' = 1/z$ per ogni $z \in \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$;
e) $(z^a)' = az^{a-1}$ per ogni $a \in \mathbb{R}$ e $z \in \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$.

37 Determinare i luoghi di zeri delle seguenti funzioni analitiche:
a) e^z; b) $e^z + e^{-z}$; c) $\cos z$; d) $\sin z$; e) $\log z$.

38 Dimostrare che la funzione di una variabile reale $f(x) := \sqrt{x}$ non ammette alcun prolungamento analitico a $\mathbb{C}^*$.

Traccia. Far vedere un eventuale prolungamento analitico sarebbe un'inversa destra della funzione $z \mapsto z^2$. Ma quest'ultima è un rivestimento di ordine diverso da 1 da $\mathbb{C}^*$ in $\mathbb{C}^*$ (cfr. esercizio 4) e quindi non ammette un'inversa destra.

39* Consideriamo la funzione di una variabile reale $f(x) := \arctan x$. Dimostrare che:
a) f è prolungabile analiticamente a tutto l'aperto $D := \mathbb{C} \setminus \{iy : y \in \mathbb{R}\, |y| \geq 1\}$;
b) f non è prolungabile analiticamente ad alcun aperto di $\mathbb{C}$ che contiene strettamente D.

40 Calcolare il differenziale delle seguenti funzioni (a valori reali o complessi) definite su $\mathbb{C}$:
a) $x^2 + y^4 + 2xy^3$; b) $x + iy$; c) $cosy + i \sin y$; d) $e^{x^2+y^2}$; e) $f(\sqrt{x^2 + y^2})$;
f) $2z + 1$; g) $|z|^2$; h) $\bar{z}^2$; i) z^n; l) e^z; m) $\log z$; n) $f(|z|^2)$; o) $f(|z|^2)\, z$.
Nei punti e), n) e o) f è una generica funzione di classe C^1 su $(0, +\infty)$.

41 Dati gli operatori differenziali

$$\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

Dimostrare che per ogni funzione di classe C^1 su $\mathbb{R}^2$ (a valori reali o complessi) si ha

$$df = \frac{\partial f}{\partial z}\, dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\, d\bar{z} \ .$$

42 Calcolare l'integrale della forma ω lungo il cammino γ nei seguenti casi:
a) $\omega := x\, dx + xy\, dy$ e $\gamma(t) := e^{it}$ con $t \in [0, \pi]$;

b) $\omega := e^{-x}\,dx + e^{-y}\,dy$ e $\gamma(t) := t + it^2$ con $t \in [0, +\infty)$;
c) $\omega := iy\,dx + \dfrac{x}{x^2+y^2}\,dy$ e $\gamma(t) := 2e^{it}$ con $t \in [0, \pi]$;
d) $\omega := \dfrac{y+1}{x^2+y^2}\,dx - \dfrac{x+1}{x^2+y^2}\,dy$ e $\gamma(t) := e^{it}$ con $t \in [0, 2\pi]$;
e) $\omega := xy\,d\bar z$ e $\gamma(t) := t^3 + it^2$ con $t \in [-1, 1]$;
f) $\omega := \bar z\,dz$ e $\gamma(t) := t^2 + it^3$ con $t \in [-1, 1]$;
g) $\omega := |z|\,dz$ e $\gamma(t) := e^{2t} - 1 + 2ie^t$ con $t \in [0, 1]$;

43 Di ciascuna delle seguenti forme differenziali dire se è chiusa o esatta sul dominio di definizione, ed in caso che sia esatta determinarne le primitive:

a) $(y + ix)\,dx + (x - iy)\,dy$; b) $\dfrac{x\,dx + y\,dy}{1 + x^2 + y^2}$; c) $\dfrac{y\,dx - x\,dy}{x^2 + y^2}$; d) $\dfrac{y\,dx - x\,dy}{(x^2 + y^2)^2}$;

e) $xe^{x^2 y}(2y\,dx + x\,dy)$; f) $\dfrac{(x^2 - y^2)\,dx + 2xy\,dy}{(x^2 + y^2)^2}$; g) $f(x^2 + y^2) \cdot (x\,dx + y\,dy)$;

h) $\dfrac{dz}{z^2}$; i) $\dfrac{dz}{z^2 - 1}$; l) $\dfrac{d\bar z}{z}$; m) $\dfrac{e^z - 1}{z}\,dz$; n) $\dfrac{\sin z}{z^2}\,dz$; p) $f(|z|)\,\bar z\,dz$.

Nei punti g) e p) f è una generica funzione di classe C^1 su $(0, +\infty)$.

44 $^\diamond$ Determinare le primitive della forma $\dfrac{y\,dx - x\,dy}{x^2 + y^2}$ sui semipiani $\{y > 0\}$ e $\{y < 0\}$.

45 $^\circ$ Sia ω una forma chiusa su A aperto di $\mathbb{R}^2$, e siano γ_0 e γ_1 due cammini chiusi omotopi in A. Dimostrare che $\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$.

46 $^\circ$ Sia ω una forma chiusa su A aperto connesso di $\mathbb{R}^2$, e sia $\mathscr{F}$ una famiglia di cammini chiusi che generano il gruppo fondamentale di A (rispetto ad un qualche punto base assegnato). Dimostrare che ω è esatta se e solo se $\int_\gamma \omega = 0$ per tutti i cammini γ in $\mathscr{F}$.

47 $^\diamond$ Siano p_1, p_2 due punti del piano, e siano γ_1 e γ_2 le parametrizzazioni di due circonferenze con centri rispettivamente p_1 e p_2 e raggi r_1 e r_2 inferiori a $|p_1 - p_2|$. Dimostrare che una forma chiusa ω su $\mathbb{R}^2 \setminus \{p_1, p_2\}$ è esatta se e solo se ha integrale nullo su γ_1 e γ_2, o più in generale su due cammini chiusi omotopi in A a γ_1 e γ_2.

48 Dato A aperto connesso di $\mathbb{R}^2$, indichiamo con G il gruppo fondamentale di A rispetto ad un qualche punto base p_0, e con H il sottogruppo normale generato dai commutatori (vale a dire gli elementi di G della forma $xyx^{-1}y^{-1}$), Dato un cammino chiuso γ con punto base p_0, indichiamo con $[\gamma]$ la sua classe di equivalenza in G e con $[[\gamma]]$ quella in G/H.

Data ω forma chiusa in A e γ cammino chiuso con punto base p_0, dimostrare che il valore di $\int_\gamma \omega$ dipende solo da $[[\gamma]]$.

Traccia. Partire dalla seguente osservazione chiave: dati due cammini γ_1 e γ_2 con lo stesso punto base ed una qualunque forma ω (anche non chiusa), l'integrale di ω su $\gamma_1 * \gamma_2$ coincide con quello su $\gamma_2 * \gamma_1$.

49 $^\circ$ Dato un cammino chiuso $\gamma : I \to \mathbb{C}$, la mappa $z \mapsto \mathrm{Ind}(\gamma, z)$ è costante su ogni componente connessa dell'aperto $\mathbb{C} \setminus \gamma(I)$.

Traccia. Poiché la mappa in questione ha valori nello spazio discreto $\mathbb{Z}$, è sufficiente dimostrare che è continua. Inoltre

$$\mathrm{Ind}(\gamma, z) := \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{\dot\gamma(t)}{\gamma(t) - z}\,dt$$

e quindi basta applicare il seguente lemma (variante di un risultato ben noto): dato uno spazio topologico X ed una funzione continua $f : X \times [a,b] \to \mathbb{C}$, la funzione

$$F(x) := \int_a^b f(x,t)\,dt$$

è ben definita e continua per ogni $x \in X$.

50° Sia γ un cammino chiuso contraibile (cioè omotopo a costante) in $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$. Dimostrare che $\mathrm{Ind}(\gamma, z_0) = 0$.

51° Preso $z_0 \in \mathbb{C}$ e $r > 0$, sia $\gamma(t) := z_0 + re^{it}$ con $t \in [0, 2\pi]$ la parametrizzazione standard della circonferenza di centro z_0 e raggio r. Dimostrare che $\mathrm{Ind}(\gamma, z) = 1$ se $|z - z_0| < r$ e $\mathrm{Ind}(\gamma, z) = 0$ se $|z - z_0| > r$.

Traccia. Calcolare $\mathrm{Ind}(\gamma, z_0)$ partendo dalla definizione di indice e usare l'esercizio 49 per dimostrare che $\mathrm{Ind}(\gamma, z) = \mathrm{Ind}(\gamma, z_0)$ se $|z - z_0| < r$. Usare invece l'esercizio 50 per il caso $|z - z_0| > r$.

52$^\diamond$ Dati z_0 e z_1 punti distinti di $\mathbb{C}$, si ponga

$$\omega := \frac{dz}{z - z_0} - \frac{dz}{z - z_1}\ .$$

Dimostrare che:
a) la forma ω è chiusa su $\mathbb{C} \setminus \{z_0, z_1\}$;
b) la forma ω non è esatta su $\mathbb{C} \setminus \{z_0, z_1\}$;
c) la forma ω è esatta su $\mathbb{C} \setminus [z_0, z_1]$, dove $[z_0, z_1]$ è il segmento che congiunge z_0 a z_1.
d) Calcolare una primitiva di ω su $\mathbb{C} \setminus [z_0, z_1]$.

53 Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z}$ per i seguenti cammini:
a) $\gamma := t + i(1 - t^2)$ con $t \in [-2, 2]$;
b) $\gamma := t^n + i(1 - t^{2m})$ con $t \in [-1, 1]$ ed n, m interi positivi assegnati;
c) $\gamma := 2\sin t(\cos t + 2\cos^3 t) + i(4\cos^4 t - 1)$ con $t \in [0, 2\pi]$;
d) $\gamma := (1 + t^4)^{-1}(\cos t + i2\sin t)$ con $t \in [0, 4\pi]$.
e) $\gamma := e^{-t}(2\cos t + i\sin t)$ con $t \in [0, \infty)$.

54° Sia D un compatto in $\mathbb{C}$ la cui frontiera è parametrizzata in senso antiorario dal cammino chiuso semplice γ. Dimostrare che l'indice $\mathrm{Ind}(\gamma, z_0)$ è uguale a 0 se z_0 non appartiene a D, ed è uguale a 1 se z_0 è interno a D.

Traccia. Supponiamo $z_0 = 0$. Se 0 non appartiene a D la forma dz/z è definita e continua su tutto D, ed è chiusa nella parte interna di D; quindi l'integrale sulla frontiera di D è nullo per il teorema di Gauss-Green, ovvero l'indice di γ è zero. Se invece 0 appartiene alla parte interna di D, si prenda un disco aperto B di centro 0 la cui chiusura è contenuta in D: applicando il teorema di Gauss-Green alla forma dz/z sul dominio $D \setminus B$ si ottiene che l'indice di γ coincide con quello del cammino γ_0 che parametrizza la frontiera di B in senso antiorario, ed un calcolo diretto mostra che quest'ultimo è uguale a 1.
[*È un fatto vero ma di non immediata dimostrazione che ogni cammino chiuso semplice parametrizza la frontiera di un compatto connesso; da questo segue che l'indice di un cammino chiuso semplice rispetto ad un qualunque punto può essere solo* 0 *o* ± 1.]

55° Com'è noto, un generatore del gruppo fondamentale di C^* con punto base 1 è il cammino $\gamma_0(t) := (\cos t, \sin t)$ con $t \in [0, 2\pi]$. Sia quindi $\Phi : \pi_1(\mathbb{C}^*, 1) \to \mathbb{Z}$ l'isomorfismo che porta $[\gamma_0]$ in 1. Dimostrare che per ogni cammino chiuso γ in $\mathbb{C}^*$ di classe C^1 e con punto base 1 si ha

$$\operatorname{Ind}(\gamma, 0) = \Phi([\gamma]) \ . \tag{1}$$

Traccia. Posto $k := \Phi([\gamma])$, si ha $[\gamma] = [\phi_0]^k$, e siccome l'indice è invariante per omotopia e additivo rispetto al prodotto di cammini, ne segue che $\operatorname{Ind}(\gamma, 0) = k \cdot \operatorname{Ind}(\gamma_0, 0) = k$.

56° Sia z_0 un punto di $\mathbb{C}$, e siano $\gamma_1, \gamma_2 : I \to \mathbb{C}$ dei cammini chiusi tali che $|\gamma_2(t)| < |\gamma_1(t) - z_0|$ per ogni t. Dimostrare che $\operatorname{Ind}(\gamma_1, z_0) = \operatorname{Ind}(\gamma_1 + \gamma_2, z_0)$.

Traccia. Siccome l'indice è dato dall'integrale di una forma chiusa, basta dimostrare che cammini chiusi γ_1 e $\gamma_1 + \gamma_2$ sono omotopi in $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$: un'omotopia è $F(t, s) := \gamma_1(t) + s\gamma_2(t)$. Si osservi che la condizione $|\gamma_2| < |\gamma_1 - z_0|$ implica che z_0 non appartiene all'immagine di F, e di conseguenza neanche a quelle di γ_1 e $\gamma_1 + \gamma_2$.

57° È possibile calcolare l'indice di un cammino chiuso attorno a un punto z_0 contando in modo opportuno il numero di intersezioni con una semiretta che parte da z_0. Dimostrare che vale infatti quanto segue:
Sia $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}^*$ un cammino chiuso di classe C^1 tale che $\dot\gamma(0) = \dot\gamma(1)$ e sia R una semiretta della forma $R = \{z_0 + re^{i\theta} : r \in [0, +\infty)\}$ con $\theta \in [0, 2\pi)$. Indichiamo con S l'insieme dei $t \in [0, 1]$ tali che $\gamma(t) \in R$, e supponiamo che $\dot\gamma(t)$, inteso come vettore di $\mathbb{R}^2$, non sia parallelo a $e^{i\theta}$ per alcun $t \in S$, ovvero che $\dot\gamma_{\mathrm{n}}(t) \neq 0$, dove $\dot\gamma_{\mathrm{n}}(t)$ indica la componente di $\dot\gamma(t)$ nella direzione $e^{i(\theta + \pi/2)}$ (che è ortogonale a quella di R). Allora l'insieme S è finito e

$$\operatorname{Ind}(\gamma, 0) = \#\{t \in S \cap [0, 1) : \dot\gamma_{\mathrm{n}}(t) > 0\} - \#\{t \in S \cap [0, 1) : \dot\gamma_{\mathrm{n}}(t) < 0\} \ . \tag{1}$$

Traccia. Ci limitiamo al caso in cui $z_0 = 0$, $\theta = \pi$ (dunque R è la semiretta dei numeri reali negativi) e $\gamma(0) = \gamma(1)$ appartiene ad R. La finitezza di S segue dal fatto che è un sottoinsieme discreto di $[0, 1]$. Indichiamo con $t_0, \dots, t_n$ i punti di S ordinati in senso crescente (dunque $t_0 = 0$ e $t_n = 1$) e con γ_k la restrizione di γ all'intervallo $[t_{k-1}, t_k]$ per $k = 1, \dots, n$. Allora

$$2\pi \cdot \operatorname{Ind}(\gamma, 0) = \operatorname{Im}\left[\int_\gamma \frac{dz}{z}\right] = \sum_{k=1}^n \operatorname{Im}\left[\int_{\gamma_k} \frac{dz}{z}\right] .$$

Sia ora $\log z$ la determinazione standard del logaritmo su $\mathbb{C} \setminus R$, e poniamo $\beta_k := 1$ se $\dot\gamma_{\mathrm{n}}(t_k) > 0$ e $\beta_k := -1$ altrimenti. Siccome il cammino γ_k è contenuto in $\mathbb{C} \setminus R$ a parte gli estremi,

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}\left[\int_{\gamma_k} \frac{dz}{z}\right] &= \operatorname{Im}\left[\lim_{t \to t_k} \log \gamma(t) - \lim_{t \to t_{k-1}} \log \gamma(t)\right] \\ &= \lim_{t \to t_k} \arg(\gamma(t)) - \lim_{t \to t_{k-1}} \arg(\gamma(t)) = \pi(\beta_k + \beta_{k-1})\end{aligned}$$

e sommando per $k = 1, \dots, n$ otteniamo

$$\operatorname{Ind}(\gamma, 0) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n (\beta_k + \beta_{k-1}) = \sum_{k=0}^n \beta_k$$

che è proprio la formula (1).

58 Calcolare l'indice $\mathrm{Ind}(\gamma, 0)$ per i seguenti cammini:
a) $\gamma := t^4 + i(1-t^2)$ con $t \in [-2, 2]$;
b) $\gamma := 1 + 2\cos t + 2i \sin t$ con $t \in [0, 2\pi]$;
c) $\gamma := a\cos t + ib \sin t$ con $t \in [0, 4\pi]$ ed a, b numeri reali positivi;
d) $\gamma := 2\sin t(\cos t + 2\cos^3 t) + i(4\cos^4 t - 1)$ con $t \in [0, 2\pi]$;
e) $\gamma := e^{-|t|}\cos t + ie^{|t|}\sin t$ con $t \in [-\pi, \pi]$.

59 Dire quali delle seguenti funzioni di $z = x + iy$ sono olomorfe sul proprio dominio di definizione:

a) $x^2 - y^2 - 2xyi$; b) $x^2 - iy^2$; c) $2xy + i(y^2 - x^2)$; d) $\dfrac{x+iy}{x^2+y^2}$; e) $\dfrac{-x+iy}{x^2+y^2}$;

f) $e^{y^2-x^2}(\sin(2xy) + i\cos(2xy))$; g) e^{y+2ix}; h) $e^{1+\bar z}$; i) $\dfrac{z}{\bar z^2}$; l) $1 + |z|^4$.

60$^\diamond$ Sia A un aperto di $\mathbb{C}$ e $f : A \times [a, b] \to \mathbb{C}$ una funzione continua tale che $z \mapsto f(s, z)$ è olomorfa su A per ogni $s \in I$. Dimostrare che la funzione

$$F(z) := \int_a^b f(z, t)\, dt$$

è ben definita e olomorfa su tutto A.

Traccia. Dimostrare innanzitutto che $F(z)$ è ben definita e continua, e poi che $F(z)\, dz$ è una forma chiusa. Applicare quindi il teorema di Morera.

61$^\diamond$ Sia A un aperto di $\mathbb{C}$ e sia f_n una successione di funzioni olomorfe che converge uniformemente ad f su ogni sottoinsieme compatto di A. Dimostrare che f è olomorfa.

Traccia. Dimostrare che $f(z)\, dz$ è una forma chiusa e applicare il teorema di Morera.

62* Fissato un numero reale $a > 0$, si considerino la serie di potenze

$$S_a(X) := \frac{1}{a} + \frac{X}{a(a+1)} + \cdots + \frac{X^n}{a(a+1)\cdots(a+n)} + \cdots$$

e la funzione

$$f_a(z) := \int_0^1 s^{a-1} e^{z(1-s)}\, ds\ .$$

Dimostrare quanto segue:
a) $1 + X\, S_{a+1}(X) = a\, S_a(X)$;
b) il raggio di convergenza di $S_a(X)$ è $+\infty$;
c) $f_a(z)$ è ben definita per ogni $z \in \mathbb{C}$;
d) la funzione f_a è olomorfa su $\mathbb{C}$;
e) la funzione $g(x) := x^a S_a(x)$ soddisfa l'equazione $g'(x) = g(x) + x^{a-1}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$;
f) $S_a(x) = f_a(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$;
g) $S_a(z) = f_a(z)$ per ogni $z \in \mathbb{C}$;

63* Fissati a, b numeri reali positivi, si consideri la serie di potenze

$$S_{ab}(X) := \frac{b}{a} + \frac{b(b+1)}{a(a+1)}X + \cdots + \frac{b(b+1)\cdots(b+n)}{a(a+1)\cdots(a+n)}X^n + \cdots$$

a) Dimostrare che il raggio di convergenza di $S_{ab}(X)$ è 1;

b) trovare un'equazione differenziale soddisfatta da $S_{ab}(x)$, cfr. esercizio 62(e);
c) trovare un'espressione integrale per $S_{ab}(x)$, cfr. esercizio 62(f,g);
d) determinare esplicitamente $S_{ab}(x)$ nel caso $b = 1$.

64* Sia $S(X)$ la serie di potenze data nell'esercizio 26 e si consideri la funzione

$$g(z) := \int_0^1 \frac{-\log(1 - sz)}{s}\, ds \ .$$

Dimostrare che:
a) $f(z)$ è ben definita per ogni $z \in A := \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}$;
b) f è una funzione olomorfa su A;
c) $S(z) = g(z)$ per ogni $z \in \mathbb{C}$ con $|z| < 1$.

65° Definiamo le seguenti classi di matrici reali 2×2:

$$\mathscr{M} := \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} : \ a, b \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{e} \quad \mathscr{M}' := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} : \ a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

Dimostrare che:
a) se $A, B \in \mathscr{M}$ allora $AB \in \mathscr{M}$;
b) se $A, B \in \mathscr{M}'$ allora $AB \in \mathscr{M}$;
c) se $A \in \mathscr{M}$ e $B \in \mathscr{M}'$ allora $AB, BA \in \mathscr{M}'$;
d) l'applicazione $x + iy \mapsto \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ è un isomorfismo di campo di $\mathbb{C}$ in $\mathscr{M}$.

66 Data M matrice reale 2×2, indichiamo con $|M|$ la sua norma euclidea, vale a dire

$$|M| := \Big(\sum_{ij} M_{ij}^2 \Big)^{1/2} \ .$$

Diciamo inoltre che M è *conforme* se conserva gli angoli tra vettori, ovvero se per ogni coppia $v, w \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ si ha

$$\frac{\langle Mv; Mw \rangle}{|Mv| \cdot |Mw|} = \frac{\langle v; w \rangle}{|v| \cdot |w|}$$

dove $\langle \ ; \ \rangle$ è il prodotto scalare in $\mathbb{R}^2$. Presi $\mathscr{M}$ e $\mathscr{M}'$ come nell'esercizio 65, dimostrare quanto segue:
a) $|2 \det M| \leq |M|^2$;
b) $M \in \mathscr{M}$ se e solo se $2 \det M = |M|^2$;
c) $M \in \mathscr{M}'$ se e solo se $2 \det M = -|M|^2$;
d) M è conforme se e solo se $M \in \mathscr{M} \cup \mathscr{M}'$.

67° L'identificazione canonica di $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$ data da $x + iy \mapsto (x, y)$ permette di vedere una funzione f da $\mathbb{C}$ in $\mathbb{C}$ come una mappa da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$. Diciamo quindi che f è differenziabile (risp., di classe C^1) se è differenziabile (risp., di classe C^1) come mappa da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$, ed in tal caso indichiamo con Df la corrispondente matrice Jacobiana, vale a dire

$$Df = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \mathrm{Re}\, f & \frac{\partial}{\partial y} \mathrm{Re}\, f \\ \frac{\partial}{\partial x} \mathrm{Im}\, f & \frac{\partial}{\partial y} \mathrm{Im}\, f \end{pmatrix} \ .$$

Sia A un aperto di $\mathbb{C}$ e $f : A \to \mathbb{C}$ una funzione differenziabile. Dimostrare che f è olomorfa se e solo se $Df(z)$ appartiene alla classe $\mathscr{M}$ definita nell'esercizio 65 per ogni $z \in A$, ed in tal caso la derivata complessa f' e la matrice Jacobiana Df sono legate dalla relazione

$$Df = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\, f' & -\mathrm{Im}\, f' \\ \mathrm{Im}\, f' & \mathrm{Re}\, f' \end{pmatrix} .$$

68° Siano f e g funzioni olomorfe. Utilizzando gli esercizi 65 e 67, dimostrare che $f \circ g$ è olomorfa e vale la solita formula per la derivata della funzione composta: $(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$.

69° a) Sia $f : A \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa. Utilizzando l'esercizio 67, dimostrare che la matrice $Df(z)$ ha rango 0 o 2 per ogni $z \in A$.

b) Dedurne che se A è connesso ed f non è costante, allora $f(A)$ ha parte interna non vuota. [*In effetti vale un risultato più forte, cfr. esercizio 71.*]

Traccia. b) Se f non è costante, allora esiste almeno un punto $z_0 \in A$ tale che $f'(z_0) \neq 0$ (verificarlo!), ma allora la matrice Jacobiana $Df(z_0)$ è invertibile, e dunque per il teorema della funzione implicita esiste un intorno U di z_0 tale che la restrizione di f ad U è una mappa aperta in $\mathbb{C}$.

70$^\diamond$ Sia $f : A \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa. Supponendo che 0 appartenga ad A e che $f(0) = 0$, indichiamo con n il più piccolo intero tale che $a_n \neq 0$, dove a_n è l'n-esimo coefficiente della serie di Taylor di f in 0. Dimostrare che esiste una funzione olomorfa h definita in un intorno U di 0 tale che

$$f(z) = h^n(z) \quad \text{per ogni } z \in U.$$

Traccia. Scriviamo $f(z) = z^n\, g(z)$ dove g è la funzione definita dalla serie di potenze

$$g(z) := \sum_{m=0}^{\infty} a_{n+m} z^m .$$

Siccome $g(0) = a_n \neq 0$, preso un disco aperto V centrato in $g(0)$ che non contiene 0, il logaritmo complesso ammette una determinazione su V, che indichiamo con $\log z$. Quindi $U := g^{-1}(V)$ è un intorno aperto di 0 e $\tilde{g}(z) := \exp(\frac{1}{n} \log g(z))$, è una determinazione della radice n-esima di $g(z)$ definita su U. Poniamo quindi $h(z) := z\, \tilde{g}(z)$.

71° Sia A un aperto connesso di $\mathbb{C}$ ed $f : A \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa non costante. Dimostrare che f è una mappa aperta.

Traccia. Basta far vedere che ogni $z_0 \in A$ ammette un intorno aperto U tale che la restrizione di f ad U è una mappa aperta in $\mathbb{C}$. Sono possibili due casi:

a) Se $f'(z_0) \neq 0$ allora la matrice Jacobiana di f, vista come mappa da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$, ha determinante diverso da 0 in un intorno aperto U di z_0 (cfr. esercizio 69), e dunque f è aperta su U per via del teorema di invertibilità locale.

b) Se invece $f'(z_0) = 0$, utilizzando l'esercizio 70 possiamo scrivere $f(z)$ in un intorno di z_0 come $f(z) = f(z_0) + h^n(z)$ dove h è una funzione tale che $h(z_0) = 0$ e $h'(z_0) \neq 0$. Per quanto visto al punto a), h è una mappa aperta su un opportuno intorno aperto di z_0 e siccome la mappa $z \mapsto z^n$ è aperta su tutto $\mathbb{C}$ (verificarlo!), ne segue che anche f è aperta in un intorno di z_0.

[*Per una dimostrazione alternativa si veda l'esercizio 107.*]

72$^\diamond$ Sia A un aperto semplicemente connesso in $\mathbb{C}$ e sia $f : A \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa *mai nulla*. Dimostrare che esiste una funzione olomorfa $g : A \to \mathbb{C}$ tale che

$$f(z) = \exp(g(z)) \quad \text{per ogni } z \in A. \tag{1}$$

Prima traccia di dimostrazione. Siccome $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ è un rivestimento ed A è semplicemente connesso, ogni mappa $f : A \to \mathbb{C}^*$ continua ammette un sollevamento $g : A \to \mathbb{C}$, cioè una mappa continua tale che $f(z) = \exp(g(z))$ per ogni $z \in A$. Non resta che dimostrare che se f è olomorfa allora anche g è olomorfa. Per ogni $z_0 \in A$, sia V un intorno aperto di $f(z_0)$ che ammette una determinazione del logaritmo complesso, indicata con $\log z$. Allora per ogni $z \in f^{-1}(V)$ esiste un intero k tale che $g(z) = \log f(z) + 2k\pi i$; preso inoltre U intorno aperto *connesso* di z_0 contenuto in $f^{-1}(V)$, l'intero k non dipende da z su U (perché $g(z) - \log z$ è una funzione continua dal connesso U in uno spazio discreto). Pertanto, siccome log e f sono funzioni olomorfa, anche g è olomorfa su U. Dall'arbitrarietà di z_0 segue che g è olomorfa su A.

Seconda traccia di dimostrazione. Si fissi un punto $z_0 \in A$ ed un intorno aperto V di $f(z_0)$ su cui è definita una determinazione del logaritmo complesso, che indichiamo con $\log z$. Si noti che la forma

$$\omega := \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz$$

è chiusa e ben definita su tutto A, e quindi ammette una primitiva olomorfa $g : A \to \mathbb{C}$. Poiché inoltre g è determinata a meno di costanti, possiamo supporre che

$$g(z_0) = \log f(z_0)\ .$$

Se inoltre U è un intorno connesso di z_0 tale che $f(U) \subset V$, abbiamo che

$$g'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = (\log f(z))' \quad \text{per ogni } z \in U,$$

e dunque $g(z) = \log f(z)$ per ogni $z \in U$. Da questo segue che $\exp(g(z)) = f(z)$ per ogni $z \in U$ e quindi, per via del principio del prolungamento analitico, anche per ogni $z \in A$.

73 Far vedere che l'ipotesi che A sia semplicemente connesso nell'esercizio precedente non può essere rimossa.

74$^\diamond$ Sia A un aperto connesso e sia $f : A \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa con $|f|$ costante. Dimostrare che f è costante.

Traccia. L'immagine di f ha parte interna vuota; si applichi quindi l'esercizio 69.

75 Sia A un aperto connesso di $\mathbb{C}$ ed $f : A \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa che soddisfa l'equazione $(\operatorname{Re} f)^2 + (\operatorname{Im} f)^4 = 1$. Dimostrare che f è costante.

Traccia. Verificare che l'insieme dei punti $x + iy \in \mathbb{C}$ tali che $x^2 + y^4 = 1$ ha parte interna vuota in $\mathbb{C}$ e usare l'esercizio 69.

76 Sia $f : A \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa. Dimostrare che

$$f' = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x} = -i\frac{\partial f}{\partial y} = 2\frac{\partial}{\partial z}\operatorname{Re} f = 2i\frac{\partial}{\partial z}\operatorname{Im} f\ .$$

77$^\diamond$ Sia A un aperto contenuto in $\mathbb{C}$ ed $f : A \to \mathbb{C}$ una funzione differenziabile (nel senso delle mappe da un aperto di $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$). La funzione f si dice *antiolomorfa* se in ogni punto di A è soddisfatta l'equazione

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 0 \ .$$

Utilizzando gli esercizi 65 e 67, dimostrare i seguenti fatti:
a) f è antiolomorfa se e solo se $Df(z) \in \mathscr{M}'$ per ogni $z \in A$, con $\mathscr{M}'$ data nell'esercizio 65;
b) se f e g sono antiolomorfe allora $f \circ g$ è olomorfa;
c) se f è olomorfa e g antiolomorfa allora $f \circ g$ e $g \circ f$ sono antiolomorfe;
d) la mappa $z \mapsto \bar{z}$ è antiolomorfa;
e) se $f(z)$ è olomorfa allora $f(\bar{z})$ e $\overline{f(z)}$ sono antiolomorfe, mentre $\overline{f(\bar{z})}$ è olomorfa;
f) se f è olomorfa e antiolomorfa allora f è localmente costante.

78 Completare come segue i punti a), b), c) ed e) dell'esercizio 77:
a) scrivere Df in termini di $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f$;
b) scrivere $\frac{\partial}{\partial z}(f \circ g)$ in termini di $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f$ e $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} g$;
c) scrivere $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(f \circ g)$ e $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(g \circ f)$ in termini di $\frac{\partial}{\partial z} f$ e $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} g$;
e) posto $g(z) := \overline{f(\bar{z})}$, scrivere $\frac{\partial}{\partial z} g$ in termini di $\frac{\partial}{\partial z} f$.

79$^\diamond$ Si prendano A ed f come nell'esercizio 77. La funzione f si dice *conforme* se $Df(z)$ è una matrice conforme per ogni $z \in A$ (cfr. esercizio 66). Dimostrare quanto segue:
a) se f è olomorfa o antiolomorfa allora f è conforme;
b)* se f è conforme e di classe C^2 ed A è connesso, allora f è olomorfa oppure antiolomorfa.
Traccia. b) Si indichi con A^0 l'insieme dei punti $z \in A$ tali che $Df(z) = 0$, e con A^+ e A^- gli insiemi dei punti $z \in A \setminus A^0$ tali che $Df(z)$ appartiene a $\mathscr{M}$ e $\mathscr{M}'$ rispettivamente ($\mathscr{M}$ e $\mathscr{M}'$ sono definiti nell'esercizio 65), e si consideri la funzione $h : A \to \mathbb{C}$ definita da

$$h(z) := \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial z}(z) & \text{se } z \in A^+, \\ 0 & \text{se } z \in A^0, \\ \overline{\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z)} & \text{se } z \in A^-. \end{cases}$$

La funzione h è di classe C^1 olomorfa su A e nulla su A_0, e quindi si presentano due possibilità: o h è identicamente nulla (e allora f è costante) oppure A_0 è un insieme discreto, nel qual caso A^+ e A^- non possono essere entrambi vuoti.

80 Si prendano A ed f come nell'esercizio 77. Dimostrare quanto segue:
a) $2\,|\det Df(z)| \leq |Df(z)|^2$ per ogni $z \in A$;
b) se f è olomorfa allora $2 \det Df(z) = |Df(z)|^2$ per ogni $z \in A$;
c) se f è antiolomorfa allora $2 \det Df(z) = -|Df(z)|^2$ per ogni $z \in A$;
d) se A è connesso e $2\,|\det Df(z)| = |Df(z)|^2$ per ogni $z \in A$ allora f è olomorfa oppure antiolomorfa.

81$^\diamond$ Sia A un aperto di $\mathbb{C}$ ed u una funzione su A a valori reali (o complessi) di classe C^2 (come funzione su un aperto di $\mathbb{R}^2$). La funzione u si dice *armonica* se soddisfa l'equazione di Laplace

$$\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \ .$$

Dimostrare che se $f : A \to \mathbb{C}$ è una funzione olomorfa o antiolomorfa allora le funzioni reali $\mathrm{Re}\, f$ e $\mathrm{Im}\, f$ sono armoniche.

82 Sia $f : A \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa. Dimostrare che $g(z) := \overline{f(1/\bar{z})}$ è olomorfa e scrivere $g'(z)$ in termini di $f'(z)$.

83* Sia $D := \{|z| < 1\}$. Dare un esempio di funzione olomorfa $f : D \to \mathbb{C}$ che non può essere estesa ad alcun aperto connesso A che contiene strettamente D.

Traccia. Si prenda una successione (z_n) densa in ∂D e si ponga

$$f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{-n}}{z - z_n} \quad \text{per ogni } z \in D. \tag{1}$$

Verificare che la serie di funzioni in (1) converge totalmente in $\{|z| \le r\}$ per ogni $r < 1$ ed usare l'esercizio 61 per dedurne che f è olomorfa su D. Per far vedere che f non è estendibile ad A, si osservi che A deve contenere z_m per qualche m ma f non è estendibile per continuità in z_m perché $|f(tz_m)| \to +\infty$ quando $t \uparrow 1$. Per dimostrare quest'ultima asserzione osservare che

$$\begin{aligned} |f(tz_m)| &\ge \left| \frac{4^{-m}}{tz_m - z_m} \right| - \sum_{n \ne m} \left| \frac{4^{-n}}{tz_m - z_n} \right| \\ &\ge \frac{4^{-m}}{1-t} - \sum_{n<m} \left| \frac{4^{-n}}{tz_m - z_n} \right| - \sum_{n>m} \frac{4^{-n}}{1-t} \ge \frac{2}{3} \cdot \frac{4^{-m}}{1-t} - \sum_{n<m} \left| \frac{4^{-n}}{tz_m - z_n} \right| \end{aligned}$$

e passare al limite per $t \uparrow 1$ (per la seconda disuguaglianza si è usato che $|tz_m - z_n| \ge 1 - t$).

84° Sia $f : A \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa. Dato z_0 in A, indichiamo con R il raggio di convergenza della la serie di Taylor di f in z_0. Dimostrare che $R \ge \mathrm{dist}(z_0, \mathbb{C} \setminus A)$.

Traccia. Siano a_n i coefficienti della serie in questione e si prenda $r < \mathrm{dist}(z_0, \mathbb{C} \setminus A)$. Siccome il disco chiuso di centro z_0 e raggio r è contenuto in A, per ogni $n \ge 0$ vale la disuguaglianza di Cauchy

$$|a_n| \le M r^{-n} \quad \text{dove} \quad M := \sup \left\{ |f(z_0 + re^{it})| : 0 \le t \le 2\pi \right\} .$$

Ne segue che $\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} \le 1/r$ e quindi $R \ge r$.

85$^\diamond$ Dato un aperto A contenuto in $\mathbb{C}$ ed una funzione continua $f : A \to \mathbb{C}$, diciamo che f soddisfa la proprietà della media (sulle circonferenze) se

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{it})\, dt \tag{1}$$

per ogni $z \in A$ ed ogni $r > 0$ tale che il disco chiuso $D_r(z)$ di centro z e raggio r è contenuto in A. Diciamo invece che f soddisfa la proprietà della media *sui dischi* se per gli stessi z ed r si ha

$$f(z) = \frac{1}{\pi r^2} \int_{D_r(z)} f(x + iy)\, dx\, dy \ . \tag{2}$$

Dimostrare che la proprietà della media sulle circonferenze equivale a quella sui dischi.

Traccia. Per dimostrare che la (1) implica la (2), scrivere l'integrale in (2) in coordinate polari. Per dimostrare l'implicazione inversa, scrivere l'integrale della (2) in coordinate polari, moltiplicare entrambi i termini dell'uguaglianza per πr^2, e infine derivare rispetto alla variabile r.

86 $^\diamond$ Sia A un aperto limitato di $\mathbb{C}$ e sia $f : \overline{A} \to \mathbb{R}$ una funzione continua con la proprietà della media in ogni punto di A. Dimostrare che il valore massimo ed il valore minimo di f vengono assunti sulla frontiera di A. Far vedere inoltre che se A è connesso ed il valore massimo (oppure minimo) di f viene assunto anche in un punto di A allora f è costante.

Traccia. Applicare il principio del massimo modulo alle funzioni $f - m$ e $M - f$ dove m e M sono rispettivamente il valore minimo e massimo di f su $\overline{A}$.

87 $^\diamond$ Sia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa la cui parte reale è limitata superiormente. Dimostrare che f è costante.

Traccia. Applicare il teorema di Liouville a $g := \exp(f)$.

88 Sia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa tale che la funzione $g := a \cdot \operatorname{Re} f + b \cdot \operatorname{Im} f$ è limitata superiormente per opportuni $a, b \in \mathbb{R}$ non entrambi nulli. Dimostrare che f è costante.

89 $^\circ$ Dimostrare la seguente generalizzazione del teorema di Liouville: una funzione olomorfa $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ con crescita di ordine q all'infinito (si veda la definizione all'inizio di questa raccolta) è un polinomio di grado $\leq q$.

Traccia. Siano a_n i coefficienti della serie di Taylor di f in 0. Per ogni $n \geq 0$, utilizzando la disuguaglianza di Cauchy si ottiene $|a_n| \leq C r^{q-n}$ per ogni $r \geq R$, e passando al limite per $r \to +\infty$ si deduce che $a_n = 0$ quando $n > q$.

90 Sia f una funzione continua su $\mathbb{C}$. Dimostrare che f ha crescita di ordine q all'infinito se e solo se esiste una costante C tale che $|f(z)| \leq C(1 + |z|^q)$ per ogni $z \in \mathbb{C}$.

91 * Sia f una funzione *reale* e continua su $\mathbb{C}$ con la proprietà della media. Dimostrare che se la *parte positiva* di f ha crescita di ordine q all'infinito, allora f ha crescita di ordine q all'infinito.

Traccia. Al solito, la parte positiva e negativa di f sono definite da $f^+(z) := \max\{f(z), 0\}$ e $f^-(z) := \max\{-f(z), 0\}$; si tratta quindi di due funzioni non negative tali che $f = f^+ - f^-$. Dobbiamo far vedere che anche la parte negativa di f ha crescita q. Siccome f^+ ha crescita q, esiste una costante C tale che $f^+(z) \leq C(1 + |z|^q)$ per ogni z (cfr. esercizio 90). Indichiamo con $D_r(z)$ il disco di centro z e raggio r. Preso $z_0 \in \mathbb{C}$ tale che $f(z_0) < 0$ e posto $r := |z_0|$, si ha che $D_r(z_0) \subset D_{2r}(0)$ e quindi, utilizzando la proprietà della media,

$$\begin{aligned}
f^-(z_0) = -f(z) &= \frac{1}{\pi r^2} \int_{D_r(z)} -f(z)\, dx\, dy \\
&\leq \frac{1}{\pi r^2} \int_{D_r(z)} f^-(z)\, dx\, dy \\
&\leq \frac{1}{\pi r^2} \int_{D_{2r}(0)} f^-(z)\, dx\, dy \\
&\leq \frac{1}{\pi r^2} \int_{D_{2r}(0)} f^-(z) + \big(C(1 + |z|^q) - f^+(z)\big)\, dx\, dy \\
&= \frac{1}{\pi r^2} \int_{D_{2r}(0)} -f(z) + C(1 + |z|^q)\, dx\, dy
\end{aligned}$$

$$= -4f(0) + C\left[4 + \frac{2^{q+3}r^q}{q+2}\right] \leq C'(1+|z|^q)$$

dove si è posto $C' := \max\left\{4(C - f(0)); 2^{q+3}C/(q+2)\right\}$.

92* Dimostrare la seguenti generalizzazioni del teorema di Liouville:
a) Se $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ è una funzione olomorfa la cui parte reale $\operatorname{Re} f$ ha crescita di ordine q all'infinito, allora f è un polinomio di grado $\leq q$.
b) Se $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ è una funzione olomorfa tale che la parte positiva di $\operatorname{Re} f$ ha crescita di ordine q all'infinito, allora f è un polinomio di grado $\leq q$.

Traccia. a) Tenuto conto dell'esercizio 89, basta dimostrare che f' ha crescita di ordine $q-1$ all'infinito. Posto $g := \operatorname{Re} f$, si ha

$$f' = \frac{\partial g}{\partial x} - i\frac{\partial g}{\partial y} \ .$$

Quindi, poiché f' ha la proprietà della media, usando la formula (2) dell'esercizio 85 otteniamo

$$f'(w) = \frac{1}{\pi r^2} \int\limits_{D_r(w)} \frac{\partial g}{\partial x} - i\frac{\partial g}{\partial y}\, dx\, dy$$

per ogni $w \in \mathbb{C}$, $r > 0$, e applicando il teorema di Gauss-Green

$$f'(w) = \frac{i}{\pi r^2} \int_\gamma g\, d\bar{z} \tag{1}$$

dove $\gamma(t) := w + re^{it}$ con $t \in [0, 2\pi]$. Utilizzando la formula (1) con $r := |w|$ e maggiorando il modulo di $g = \operatorname{Re} f$ con $C(1 + |z|^q)$ (cfr. esercizio 90) si ottiene infine

$$|f'(w)| \leq 2C(1 + 2^q|w|^q)/|w| \ ,$$

e quindi $|f'(w)| \leq 2^{q+2}C|w|^{q-1}$ per $|w| \geq 1$.
b) Utilizzare l'esercizio 91 per ricondursi all'enunciato a).

93 Sia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa *mai nulla* tale che $|f(z)| \leq \exp(C|z|^q)$ per ogni $|z| \geq R$, dove C, R, q sono opportune costanti positive. Dimostrare che $f(z) = \exp(p(z))$ con p polinomio di grado $\leq q$.

Traccia. Si usi l'esercizio 72 per scrivere f come $f(z) = \exp(g(z))$; si applichi quindi l'enunciato b) dell'esercizio 92 alla funzione olomorfa g.

94$^\diamond$ Sia D il disco aperto $\{|z| < 1\}$, e sia $f : D \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa estendibile per continuità alla circonferenza ∂D, e che su questa assume valori reali. Dimostrare che la funzione data da

$$\tilde{f}(z) := \begin{cases} f(z) & \text{per } 0 < |z| \leq 1 \\ \overline{f(1/\bar{z})} & \text{per } |z| > 1 \end{cases}$$

è un'estensione olomorfa di f a $\mathbb{C}^*$.

95 Sia f una funzione continua sul semipiano chiuso $y \geq 0$ ed olomorfa sul semipiano aperto $y > 0$ che assume valori puramente immaginari all'asse delle x. Dimostrare che f è costante.

Traccia. Far vedere che f può essere estesa ad una funzione olomorfa limitata su tutto $\mathbb{C}$.

96 Dare un esempio di funzione continua sul semipiano chiuso $y \geq 0$ ed olomorfa sul semipiano aperto $y > 0$ che non può essere estesa ad una funzione olomorfa su $\mathbb{C}$.

97 Sia A un aperto limitato di $\mathbb{C}$ e sia $f : \overline{A} \to \mathbb{C}$ una funzione continua ed olomorfa su A la cui parte reale è costante sulla frontiera di A. Dimostrare che f è costante.

Traccia. Usare l'esercizio 86 per ottenere che la parte reale di f è costante su A.

98 Sia A un aperto di $\mathbb{C}$ simmetrico rispetto all'asse delle x e sia $f : A \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa. Dimostrare che f si può scomporre come $f = f_1 + f_2$ dove $f_1, f_2 : A \to \mathbb{C}$ sono funzioni olomorfe tali che sull'asse delle x la funzione f_1 assume valori reali mentre f_2 assume valori puramente immaginari. Dimostrare inoltre che se A è connesso allora tale scomposizione è unica.

Traccia. Per l'esistenza, prendere $f_1(z) := \frac{1}{2}\big(f(z) + \overline{f(\bar{z})}\big)$ e $f_2(z) := \frac{1}{2}\big(f(z) - \overline{f(\bar{z})}\big)$.

99 $^\diamond$ a) Sia $D := \{|z| < 1\}$, e sia $f : \overline{D} \to \mathbb{C}$ una funzione continua ed olomorfa su D che assume valori puramente immaginari sulla circonferenza ∂D. Dimostrare che f è costante. [*Utilizzare l'esercizio 94.*]
b) Dimostrare che due funzioni continue su $\overline{D}$ ed olomorfe su D le cui parti reali coincidono su ∂D differiscono solo per una costante.

100 * L'esercizio 99 mostra che una funzione olomorfa sul disco è determinata a meno di costanti dalla restrizione della sua parte reale alla frontiera. Vale in effetti un enunciato più preciso: presa f come nell'esercizio 99, indichiamo con a_n i coefficienti della serie di Taylor di f in 0 e poniamo $g(\theta) := \operatorname{Re} f(e^{i\theta})$ per ogni $\theta \in [0, 2\pi]$; si ha allora che

$$\operatorname{Re} a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)\, d\theta \quad \text{e} \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)\, e^{-in\theta}\, d\theta \quad \text{per } n = 1, 2, \dots \tag{1}$$

Traccia. Ci limitiamo al caso in cui la serie di Taylor di f in 0 converge totalmente su tutto il disco chiuso. Con questa ipotesi si ha che

$$g(\theta) = \operatorname{Re} f(e^{i\theta}) = \frac{1}{2}\Big[f(e^{i\theta}) + \overline{f(e^{i\theta})}\Big] = \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\big[a_m e^{im\theta} + \overline{a_m} e^{-im\theta}\big] \ ;$$

quindi per ogni $n \geq 1$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)\, e^{-in\theta}\, d\theta = \sum_{m=0}^{\infty}\left[\frac{a_m}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(m-n)\theta}\, d\theta + \frac{\overline{a_m}}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-i(m+n)\theta}\, d\theta\right] = a_n \ ,$$

dove l'ultima uguaglianza segue dal fatto che $\int_0^{2\pi} e^{ik\theta}\, d\theta = 0$ è zero per ogni intero $k \neq 0$ e vale 2π per $k = 0$. In modo analogo si dimostra la prima identità in (1).

101 $^\diamond$ Sia $D := \{|z| < 1\}$, e sia $g : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e C^1 a tratti tale che $g(0) = g(2\pi)$. Dimostrare che esiste una funzione $f : \overline{D} \to \mathbb{C}$, olomorfa in D, tale che

$$\operatorname{Re} f(e^{i\theta}) = g(\theta) \quad \text{per ogni } \theta \in [0, 2\pi].$$

Traccia. Scrivere g come serie di Fourier complessa

$$g(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\theta} ,$$

osservare che $c_{-n} = \bar{c}_n$ per ogni n, e porre

$$f(z) := c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} 2c_n z^n . \tag{1}$$

Se g è continua e C^1 a tratti allora è noto che $\sum_n |c_n| < +\infty$ e da questo segue che la serie di potenze in (1) converge totalmente su $\overline{D}$.

102 Sia $D := \{|z| < 1\}$, e sia $f : \overline{D} \to \mathbb{C}$ una funzione continua e olomorfa su D tale che $|f|$ è costante su ∂D. Far vedere che f si annulla in almeno un punto di D oppure è costante.

Traccia. Se per assurdo f non si annullasse mai, applicando il principio del massimo modulo a $f(z)$ e $1/f(z)$ si otterrebbe che $|f(z)|$ assume valore massimo e minimo sulla frontiera di D, e dunque è costante. Per quanto visto allora anche f deve essere costante.

103 Sia $D_r := \{|z| < r\}$, e sia $f : D_r \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa. Dimostrare che se esistono delle costanti positive C, p, ρ tali che $|f(z)| \le C|z|^{-p}$ per $|z| \le \rho$ allora 0 è una singolarità rimovibile oppure un polo di ordine $\le p$.

Traccia. Utilizzare le stime di Cauchy per i coefficienti della serie di Laurent di f in 0.

104° Sia $f : A \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa, $\gamma : I \to A$, un cammino e z_0 un punto che non appartiene a $f(\gamma(I))$. Dimostrare che

$$\mathrm{Ind}(f\circ\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{f\circ\gamma} \frac{dz}{z - z_0} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z) - z_0}\, dz = \frac{1}{2\pi i}\int_I \frac{f'(\gamma(t))}{f(\gamma(t)) - z_0}\,\dot\gamma(t)\, dt .$$

105° Sia $f : A \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa, D un sottoinsieme compatto di A la cui frontiera è parametrizzata in senso antiorario dal cammino chiuso γ, e z_0 un punto che non appartiene a $f(\gamma(I))$. Dimostrare che $\mathrm{Ind}(f\circ\gamma, z_0)$ è pari al numero di punti di $f^{-1}(z_0)$ contenuti in D, contati con la loro molteplicità. In particolare z_0 appartiene a $f(D)$ se e solo se $\mathrm{Ind}(f\circ\gamma, z_0) \neq 0$.

Traccia. Basta applicare il teorema dei residui alla funzione $f'(z)(f(z) - z_0)^{-1}$ sul dominio D, e usare la caratterizzazione dell'indice di $f\circ\gamma$ data nell'esercizio 104.

106$^\diamond$ Sia P un polinomio di grado $d \ge 1$. Completando la seguente traccia di dimostrazione, dimostrare che P ha almeno una radice in $\mathbb{C}$.

Traccia. Si scomponga $P(z)$ come $P(z) = az^d + R(z)$ con R polinomio di grado strettamente minore di d. Allora $|R(z)| = o(|z|^d)$ per $|z| \to +\infty$, e applicando il teorema di Rouché sul disco D di centro 0 e raggio r con r sufficientemente grande, si ha che il numero di zeri di P contenuti in D (e contati con la loro molteplicità) è pari a quello di az^d, che è d.

107 Sia A un aperto connesso di $\mathbb{C}$ ed $f : A \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa non costante. Dimostrare che f è una mappa aperta completando la seguente traccia di dimostrazione.

Traccia. Si deve far vedere che per ogni $z_0 \in A$ ed ogni U intorno di z_0, l'insieme $f(U)$ contiene un intorno di $f(z_0)$. Supponiamo $z_0 = 0$ e $f(z_0) = 0$. Detti a_n i coefficienti della

serie di Taylor di f in 0, sia n il più piccolo indice tale che $a_n \neq 0$. Allora $f(z) = a_n z^n + R(z)$ con $R(z) = o(|z|^n)$ per $|z| \to 0$, e quindi esiste $r > 0$ tale che $|R(z)| \leq |a_n| r^n|/2$ sulla frontiera del disco D di centro 0 e raggio r; possiamo inoltre supporre che D sia contenuto in U. Sia ore B il disco aperto di centro 0 e raggio $|a_n|r^n/2$: applicando il teorema di Rouché si ottiene che per ogni $y \in B$ il numero di zeri di $f(z) - y$ contenuti in D (e contati con la loro molteplicità) è pari a quello di $a_n z^n - y$, ovvero è n. In particolare esiste almeno un numero $z \in D$ tale che $f(z) = y$, ovvero $f(D)$ contiene B.
[*Una dimostrazione alternativa di questo risultato è stata data nell'esercizio 71.*]

108 Per ciascuna delle seguenti funzioni olomorfe, scrivere lo sviluppo di Laurent in 0:

$$\text{a) } e^{-1/z^2}; \quad \text{b) } \frac{\sin z}{z^4}; \quad \text{c) } \frac{1}{z^2 + z^4}; \quad \text{d) } e^z + e^{1/z}; \quad \text{e) } \sin(1 + 1/z); \quad \text{f) } \frac{e^z}{z^2}.$$

109° Sia f una funzione della forma $f(z) = g(z)\,(z - z_0)^{-1}$ con g funzione olomorfa tale che $g(z_0) \neq 0$. Verificare che z_0 è un polo semplice con residuo $\mathrm{Res}(f, z_0) = g(z_0)$.

110° Sia f una funzione della forma $f(z) = g(z)\,(z - z_0)^{-(k+1)}$ con g funzione olomorfa tale che $g(z_0) \neq 0$. Verificare che z_0 è un polo di ordine $k + 1$ con residuo

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{1}{k!} g^{(k)}(z_0)$$

dove $g^{(k)}$ indica la derivata complessa k-esima di g.

111 Sia f una funzione della forma $f(z) = 1/g(z)$ con g funzione olomorfa con uno zero semplice in z_0. Verificare che z_0 è un polo semplice con residuo $\mathrm{Res}(f, z_0) = 1/g'(z_0)$.

112° Sia f una funzione della forma $f(z) = h(z)/g(z)$ con g funzione olomorfa con uno zero semplice in z_0 ed h funzione olomorfa non nulla in z_0. Verificare che z_0 è un polo semplice con residuo $\mathrm{Res}(f, z_0) = h(z_0)/g'(z_0)$.

113 Sia $f(z) = 1/g(z)$ con g funzione olomorfa con uno zero doppio in z_0.
a) Dimostrare che z_0 è un polo di ordine 2;
b) esprimere $\mathrm{Res}(f, z_0)$ in base alle derivate di g in z_0.

114 Per ciascuna delle seguenti funzioni olomorfe, individuare i punti singolari *isolati*, calcolare il residuo e dire se si tratta di singolarità rimovibili, singolarità essenziali, oppure poli (ed in tal caso specificarne l'ordine):

$$\text{a) } \frac{1}{z^2 - 4}; \quad \text{b) } \frac{2z + 1}{z^2 + 1}; \quad \text{c) } \frac{\sin z}{z - i}; \quad \text{d) } \frac{\log(1 + z)}{z^n}; \quad \text{e) } \frac{e^z}{1 + z}; \quad \text{f) } \frac{1}{\sin z}; \quad \text{g) } \frac{1}{(z^2 - 1)^2};$$
$$\text{h) } \frac{1}{\sin^2 z}; \quad \text{i) } \frac{1}{z^n + 1}; \quad \text{l) } e^{1/z}; \quad \text{m) } \frac{1}{e^z - 1}; \quad \text{n) } \frac{1}{\log z}; \quad \text{o) } \frac{\sin z}{z}; \quad \text{p) } \frac{\sin z}{z - z^2}.$$

115 Per ciascuna delle seguenti funzioni olomorfe, scrivere lo sviluppo di Laurent nel punto all'infinito (usando quindi la variabile $z' = 1/z$):

$$\text{a) } e^{-z}; \quad \text{b) } e^z + e^{1/z}; \quad \text{c) } z^2 + z^4; \quad \text{d) } \frac{1}{z^2 + z^4}; \quad \text{e) } \frac{\cos z}{z^2}; \quad \text{f) } \log(1 + 1/z^2).$$

116 Per ciascuna delle seguenti funzioni olomorfe calcolare il residuo all'infinito e dire se il punto all'infinito (∞) è una singolarità rimovibile, una singolarità essenziale oppure un polo (ed in tal caso specificarne l'ordine):

a) e^{-z}; b) $e^z + e^{1/z}$; c) $\dfrac{z^2}{1+z}$; d) $\dfrac{z}{1+z^2}$; e) $\dfrac{e^z+e^{-z}}{z}$; f) $e^{z(z+1)}$.

117 Utilizzare il metodo dei residui per calcolare i seguenti integrali:

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{4+x^4}$; b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{1+x^2}\,dx$ con $a \in \mathbb{R}$; c) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx$;

d) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{2+3x^2+x^4}\,dx$; e) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\sin\theta}$; f) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$;

g) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin\sqrt{x}}{1+x^2}\,dx$; h) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^n}\,dx$ con $n>1$ intero; i) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(4+x^2)}$;

l)* $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^a}\,dx$ con $a>1$ razionale; m) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sqrt[3]{x}\,dx}{x(x+8)}$; n) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\log x}{1+x^2}\,dx$;

o) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1+\cos\theta}{2+\sin^2\theta}\,d\theta$; p) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^6+9x^3+8}$.

[*Suggerimenti: g) utilizzare il cambio di variabile* $x=t^2$; *h) integrare sulla frontiera del settore circolare* $\{z : |z| \le r,\ 0 \le \arg z \le 2\pi/n\}$; *p) integrare sulla frontiera del settore circolare* $\{z : |z| \le r,\ 0 \le \arg z \le 2\pi/3\}$.]

118* Dimostrare che

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\ .$$

Traccia. Calcolare l'integrale di $e^{iz}/\sqrt{z}\,dz$ lungo la frontiera dell'insieme Q_r dato dall'intersezione del cerchio $\{|z|<r\}$ con il primo quadrante e ricordare che l'integrale di e^{-x^2} su $\mathbb{R}$ è quale a $\sqrt{\pi}$.

119 In ciascuno dei seguenti casi utilizzare il teorema di Rouché per calcolare il numero di zeri e di poli della funzione $f(z)$ contenuti nell'aperto A (contati con la loro molteplicità):

a) $f(z) := z^3+3z+1$ e $A := \{|z|<2\}$;

b) $f(z) := z^5+3z+1$ e $A := \{|z|>1\}$;

c) $f(z) := z^4+1+4/z$ e $A := \{|z|<2\}$;

d) $f(z) := z^4+1+4/z$ e $A := \{1/2<|z|<2\}$;

e) $f(z) := \dfrac{z^8-5z^2-1}{2z^4-z}$ e $A := \{|z|<1\}$;

120◇ Data la funzione

$$f(z) := 3\cos z + \frac{1}{1+z^2}\ ,$$

dimostrare che:

a) f ha infiniti zeri nella striscia $A := \{-\frac12 < \operatorname{Im} z < \frac12\}$;

b) tutti gli zeri di f tranne 2 sono tutti contenuti in A;

c) detto $N(r)$ il numero di zeri di f con valore assoluto $\le r$ allora $N(r) \sim \frac{2}{\pi} r$ per $r \to \infty$.

Traccia. Per ogni intero $k \ge 1$ si ponga

$$A_k := (-2\pi k, 2\pi k) \times (-\tfrac12, \tfrac12)\ , \quad B_k := (-2\pi k, 2\pi k) \times \big((-k,-\tfrac12) \cup (\tfrac12, k)\big)\ ,$$

e si utilizzi quindi il teorema di Rouché per far vedere che il rettangolo A_k contiene esattamente $4k$ zeri di f, mentre B_k ne contiene 2.

121 Sia A la corona circolare $\{1 < |z| < 4\}$ e sia $f(z) := z^3 + 2z^2 + 5z + 1$.
a) Quante sono le soluzioni *complesse* dell'equazione $f(z) = 0$ contenute in A?
b) Quante sono le soluzioni *reali* dell'equazione $f(z) = 0$ contenute in A?

122 Si consideri la funzione meromorfa

$$f(z) := e^z + \frac{4}{(z-2)^3} .$$

Determinare il numero di zeri di f contenuti nel semipiano $A := \{\operatorname{Re} z > 0\}$ e dimostrare che sono tutti semplici.

123 Dire quanti sono gli zeri di $f(z) := e^z + e^{-z} + z^{-2}$ contenuti nel quadrato $Q := [-2\pi, 2\pi]^2$ e dimostrare che sono tutti semplici.

124 Sia $I(n)$ il numero di zeri della funzione olomorfa

$$f_n(z) := e^{z+n} + z^3$$

contenuti nel disco aperto D di centro 0 e raggio 1. Dimostrare che tali zeri sono tutti semplici e calcolare il limite di $I(n)$ per $n \to +\infty$ e per $n \to -\infty$.

125 Data una funzione $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ed un numero reale y positivo, per calcolare l'integrale di $f(x+iy)$ con x che varia da $-\infty$ a $+\infty$, si può applicare *formalmente* il cambio di variabile $t = x + iy$, ottenendo la seguente identità:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+iy)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt . \tag{1}$$

a) Far vedere con un'esempio che la (1) non vale se f è una funzione continua a supporto compatto in $\mathbb{C}$.
b) Dimostrare che la (1) vale se l'integrale improprio di destra è ben definito, f è olomorfa su tutto $\mathbb{C}$ e $f(x + si)$ tende a 0 per $x \to \pm\infty$, uniformemente in $s \in [0, y]$.
c) Far vedere con un esempio che nel punto precedente non si può sostituire l'ipotesi che f sia olomorfa con l'ipotesi che sia meromorfa.

126 Sia A un aperto semplicemente connesso di $\mathbb{C}$, e sia f una funzione meromorfa su A con un numero finito di poli e di zeri. Dimostrare che f si scrive come $f(z) = r(z) \exp(g(z))$ con r funzione razionale e $g : A \to \mathbb{C}$ funzione olomorfa. [*Utilizzare l'esercizio 72.*]

127 Sia f una funzione meromorfa su $\mathbb{C}$ con un numero finito di poli e crescita di ordine q all'infinito per qualche q finito (si veda la definizione all'inizio di questa raccolta). Dimostrare che f è una funzione razionale, cioè un rapporto di polinomi.

Traccia. Siano $z_1, \dots, z_n$ i poli di f, e $a_1, \dots, a_n$ i rispettivi ordini. Allora la funzione meromorfa

$$g(z) := f(z) \cdot (z - z_1)^{a_1} \dots (z - z_n)^{a_n}$$

ha solo singolarità eliminabili e ha crescita di ordine $q + a_1 + \dots + a_n$ all'infinito. Applicare l'esercizio 89 alla funzione g.

128 Sia f una funzione meromorfa sulla sfera di Riemann. Dimostrare che f è una funzione razionale.

129 Sia f una funzione meromorfa su $\mathbb{C}$ con un numero finito di poli e di zeri e crescita sub-esponenziale all'infinito, ovvero

$$\lim_{|z|\to+\infty} \frac{|f(z)|}{e^{|z|}} = 0 \ .$$

Dimostrare che f è una funzione razionale.

Traccia. Scrivere f come prodotto di una funzione razionale per una funzione olomorfa *mai nulla*, ed applicare a quest'ultima quanto dimostrato nell'esercizio 93.

[*Una conseguenza di questo risultato è che due funzioni meromorfe su $\mathbb{C}$ con crescita sub-esponenziale che hanno gli stessi zeri e gli stessi poli, con la stessa molteplicità e in numero finito, differiscono solo per una costante moltiplicativa. Si noti che quest'ultima affermazione resta vera anche sotto ipotesi più deboli che la finitezza degli zeri e dei poli.*]