Versione: 30 gennaio 2008

Università di Pisa
Corso di laurea in Matematica

Testi e soluzioni degli scritti d'esame di

Topologia e Analisi Complessa

a.a. 2007/08

docenti: F. Broglia, G. Alberti

Giovanni Alberti
Dipartimento di Matematica
Università di Pisa
largo Pontecorvo 5
56127 Pisa
www.dm.unipi.it/~alberti

Avvertenze

Questa è una raccolta degli scritti d'esame per il corso di Topologia e Analisi Complessa del corso di laurea in Matematica, a.a. 2007/08. La prima parte contiene i testi di tutti gli scritti, incluse le prove in itinere (compitini), mentre la seconda sezione contiene una breve traccia delle soluzioni.

Programma del corso.

Omotopia e gruppo fondamentale.

Connessione per archi, cammini e operazioni fra cammini continui.
Omotopia tra funzioni continue, omotopia relativa, omotopia tra cammini.
Equivalenza omotopica; retratti e retratti di deformazione; spazi contraibili.
Il gruppo fondamentale di uno spazio topologico; ruolo del punto base.
Omomorfismi tra gruppi fondamentali indotti da applicazioni continue; invarianza per omotopia; il gruppo fondamentale di spazi omotopicamente equivalenti.
Il gruppo fondamentale di un prodotto.
Il gruppo fondamentale della circonferenza.
Rivestimenti; sollevamento di cammini; lemma di monodromia.
Il teorema di van Kampen (senza dimostrazione).

Funzioni olomorfe di una variabile complessa

L'algebra delle serie formali.
Serie convergenti; calcolo del raggio di convergenza; operazioni sulle serie convergenti; derivata di una serie convergente.
L'esponenziale complessa come rivestimento di $\mathbb{C}^*$.
Funzioni analitiche; analiticità della somma di una serie convergente; prolungamento analitico; funzioni meromorfe.
Forme differenziali e loro integrazione; forme chiuse e forme esatte; primitive lungo un cammino o lungo un'omotopia; la forma dz/z; indice di un cammino chiuso.
Funzioni olomorfe; condizioni di Cauchy-Riemann; teorema del Dini per applicazioni di rango massimo; le funzioni olomorfe con derivata diversa da 0 come isomorfismi analitici locali.
Formula integrale di Cauchy; sviluppo in serie di una funzione olomorfa; formula e teorema di Cauchy per un compatto.
Il teorema della mappa aperta; principio del massimo; principio di simmetria.
Serie di Laurent; sviluppo di una funzione olomorfa in una corona; singolarità isolate; classificazione tramite limite e tramite serie; il teorema di Weirstrass per le singolarità essenziali;
La sfera di Riemann.
Il teorema dei residui.
Derivata logaritmica; comportamento attorno ad una radice multipla di una funzione olomorfa; teorema di Rouché.
Integrali calcolabili con il metodo dei residui.

Testi

Primo compitino, 24 aprile 2008

1. Si calcoli il gruppo fondamentale dello spazio X ottenuto rimuovendo i punti $(1,0,0)$ e $(-1,0,0)$ dalla sfera standard $S^2 \subset \mathbb{R}^3$.
2. Si calcoli il gruppo fondamentale e si trovi il rivestimento universale dello spazio X dato dall'unione di una sfera e di una circonferenza aventi un unico punto in comune.
3. Si considerino in $\mathbb{R}^2$ i due sottoinsiemi $F := S^1 \cup \{(0,0)\}$ e $G := S^1 \cup \{(4,0)\}$. Si chiede se esiste un omeomorfismo φ di $\mathbb{R}^2$ tale che $\varphi(F) = G$.

SECONDO COMPITINO, 30 MAGGIO 2008

1. Sia D il disco chiuso $\{|z| \le 1\}$ e sia f una funzione continua su D ed olomorfa sulla parte interna di D che soddisfa le seguenti proprietà:
   i) f è pari, vale a dire che $f(z) = f(-z)$ per ogni $z \in D$;
   ii) $f(0) = 0$;
   iii) $|f(z)| \le 1$ per ogni $z \in \partial D$.
   Dimostrare allora che
   a) $|f(z)| \le |z|^2$ per ogni $z \in D$;
   b) se esiste z_0 interno a D tale che $z_0 \ne 0$ e $|f(z_0)| = |z_0|^2$ allora $f(z) = az^2$ per un'opportuno numero complesso a con $|a| = 1$.

2. Calcolare al variare di $a \in \mathbb{R}$ il valore di $I(a) := \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{4 + x^4}\, dx$.

3. Sia A la corona circolare $\{1 < |z| < 4\}$ e sia $f(z) := z^3 + 2z^2 + 5z + 1$.
   a) Quante sono le soluzioni *complesse* dell'equazione $f(z) = 0$ contenute in A?
   b) Quante sono le soluzioni *reali* dell'equazione $f(z) = 0$ contenute in A?

Scritto del primo appello, 16 giugno 2008

1. Sia X l'unione dei sottoinsiemi E_1 ed E_2 di $\mathbb{R}^4$ definiti rispettivamente dalle equazioni

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1 \quad \text{e} \quad 4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1 \ .$$

   Dimostrare che X è connesso per archi e determinarne il gruppo fondamentale.

2. Sia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una funzione continua, e sia X l'insieme dei punti $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ tali che $z_2 \neq f(z_1)$. Dimostrare che X è connesso per archi e determinarne il gruppo fondamentale.

3. a) Determinare la natura della singolarità della funzione meromorfa

$$f(z) := \frac{1 - e^{iz}}{z^2}$$

   e calcolare il corrispondente residuo.
   b) Calcolare con il metodo dei residui $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2}\, dx$.

4. a) Trovare tutti gli zeri della funzione olomorfa $e^z + e^{-z}$.
   b) Dire quanti sono gli zeri di $f(z) := e^z + e^{-z} + z^{-2}$ contenuti nel quadrato $Q := [-2\pi, 2\pi]^2$ (contati con la loro molteplicità).

Scritto del secondo appello, 10 luglio 2008

1. Si consideri lo spazio $X := \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : z_1 z_2 \neq 0\}$.
   a) Dimostrare che X è connesso per archi e calcolarne il gruppo fondamentale.
   b) Scrivere un insieme di generatori del gruppo fondamentale di X.
   c) Trovare il rivestimento universale di X.

2. Date due rette disgiunte R_1, R_2, e quattro punti distinti $x_1, x_2 \in R_1$ e $x_3, x_4 \in R_2$, calcolare il gruppo fondamentale di $X := (R_1 \cup R_2)/\sim$ nei seguenti casi:
   a) $\sim$ è la relazione di equivalenza che identifica x_1 con x_3;
   b) $\sim$ è la relazione di equivalenza che identifica x_1 con x_3 e x_2 con x_4;
   c) $\sim$ è la relazione di equivalenza che identifica i punti $x_1, \dots, x_4$.

3. Utilizzando il metodo dei residui calcolare $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta}{2+\cos\theta}\, d\theta$.

4. Si consideri la funzione meromorfa
$$f(z) := e^z + \frac{4}{(z-2)^3}\ .$$
   a) Determinare il numero di zeri di f contenuti nel semipiano $A := \{\operatorname{Re} z > 0\}$.
   b) Dimostrare che tali zeri sono tutti semplici.

Scritto del terzo appello, 8 settembre 2008

1. Sia X lo spazio quoziente $\mathbb{R}^2/\sim$ dove $\sim$ è la relazione di equivalenza che identifica i punti $a_+ := (1,0)$ e $a_- := (1,0)$, e sia p la corrispondente proiezione. Detto J il segmento chiuso di estremi a_+ e a_-, far vedere che $p(J)$ è un retratto di deformazione forte di X. Dimostrare quindi che X è connesso per archi e calcolarne il gruppo fondamentale.

2. Dati m, n interi positivi con $m \geq 2$ e $n \geq 1$, si consideri lo spazio
$$X := \{(x,y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n : (|x|-2)^2 + |y|^2 = 1\} .$$
Dimostrare che lo spazio X è connesso per archi e calcolarne il gruppo fondamentale nei seguenti casi:
a) $m = 2$ e $n = 1$;
b) $m \geq 2$ e $n = 1$;
c) $m \geq 2$ e $n > 1$.

3. Utilizzando il metodo dei residui calcolare
$$\int_0^\infty \frac{\sqrt[3]{x}}{1+x^2}\, dx .$$

4. Sia $A := \{z : |z| \geq 1\}$ e si consideri la funzione meromorfa
$$f(z) := z^3 - 8z^2 + 18z + \frac{2}{z} .$$
a) Determinare il numero di zeri di f contenuti in A (contando la molteplicità).
b) Far vedere che tali zeri sono semplici.

Scritto del quarto appello, 9 gennaio 2008

1. a) Sia X il sottospazio del piano dato dall'unione di tre dischi chiusi di raggio 1 a due a due tangenti (quindi i cui centri sono i vertici di un triangolo equilatero di lato 2). Calcolare il gruppo fondamentale di X.
   b) Dire che cosa succede se al posto di tre dischi si considerano tre circonferenze.

2. Sulla sfera S^3 si consideri la mappa $\varphi : S^3 \to S^3$ definita da $\varphi : x \mapsto Mx$ dove M è la matrice
$$M := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$
   a) Verificare che φ porta effettivamente S^3 in se ed è un omeomorfismo.
   b) Dimostrare che il gruppo G delle trasformazioni di S^3 generato da φ è ciclico e calcolarne quindi l'ordine.
   c) Dimostrare che G agisce in maniera propriamente discontinua su S^3; determinare quindi il gruppo fondamentale dello spazio delle orbite S^3/G.

3. Utilizzando il metodo dei residui calcolare $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1 + 2\sin\theta}{2 + \cos^2\theta}\, d\theta$.

4. Sia $I(n)$ il numero di zeri della funzione olomorfa
$$f_n(z) := e^{z+n} + z^3$$
   contenuti nel disco aperto D di centro 0 e raggio 1 (contati con la loro molteplicità). Calcolare il limite di $I(n)$ per $n \to +\infty$ e per $n \to -\infty$.

Scritto del quinto appello, 30 gennaio 2008

1. Preso un intero $d \geq 2$, sia T il sottoinsieme di $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ definito da

$$T := \{(x, y) : (|x| - 1)^2 + |y|^2 = 1/4\} .$$

Dimostrare che T è omeomorfo al prodotto $S^{d-1} \times S^1$.

2. Sia X il piano proiettivo reale $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$ privato di un punto. Dimostrare che X è connesso per archi e calcolarne il gruppo fondamentale.

3. Utilizzando il metodo dei residui, calcolare $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos x}{4 + x^4}\, dx$.

4. Data una funzione $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ed un numero reale y positivo, per calcolare l'integrale di $f(x + iy)$ con x che varia da $-\infty$ a $+\infty$, si può applicare formalmente il cambio di variabile $t = x + iy$, ottenendo la seguente identità:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x + iy)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt \ . \tag{1}$$

a) Far vedere con un'esempio che la (1) non vale se f è una funzione continua a supporto compatto in $\mathbb{C}$.

b) Dimostrare che la (1) vale se l'integrale improprio di destra è ben definito, f è olomorfa su tutto $\mathbb{C}$ e $f(x + si)$ tende a 0 per $x \to \pm\infty$, uniformemente in $s \in [0, y]$.

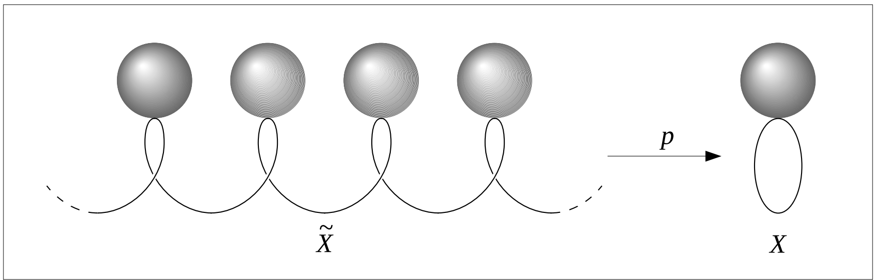
c) Far vedere con un esempio che nel punto precedente non si può sostituire l'ipotesi che f sia olomorfa con l'ipotesi che sia meromorfa.

Soluzioni

PRIMO COMPITINO, 24 APRILE 2008

1. La circonferenza C di centro l'origine e raggio 1 che giace sul piano di equazione $x_1 = 0$ è un retratto di deformazione forte di X. Una deformazione è la mappa $f : I \times X \to X$ data da
$$f(t, x) := \frac{((1-t)x_1, x_2, x_3)}{\big|((1-t)x_1, x_2, x_3)\big|} \ .$$
Ne consegue che X è omotopicamente equivalente ad una circonferenza e quindi il gruppo fondamentale di X è isomorfo a $\mathbb{Z}$. Prendendo come punto base $(0, 1, 0)$, un generatore di tale gruppo è il cammino
$$g : s \mapsto (0, \cos(2\pi s), \sin(2\pi s)) \ .$$

2. Indichiamo come al solito con $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ e $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ la circonferenza e la sfera standard. Possiamo supporre che X sia ottenuto a partire da $S^1 \cup S^2$ identificando i punti $e := (1, 0)$ ed $e' := (1, 0, 0)$ – indichiamo allora con q la proiezione di $S^1 \cup S^2$ sullo spazio quoziente X. Sia ora $\tilde{X}$ lo spazio ottenuto a partire da $\mathbb{R} \cup (S^2 \times \mathbb{Z})$ identificando ogni punto $n \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ con $(e', n) \in S^2 \times \mathbb{Z}$, ed indichiamo con $\tilde{q}$ la proiezione di $\mathbb{R} \cup (S^2 \times \mathbb{Z})$ sul quoziente $\tilde{X}$. Infine sia $p : \tilde{X} \to X$ la mappa definita da:
$$\begin{cases} p : [s] \mapsto [(\cos(2\pi s), \sin(2\pi s))] & \text{per ogni } s \in \mathbb{R}, \\ p : [(x, n)] \mapsto [x] & \text{per ogni } (x, n) \in S^2 \times \mathbb{Z}. \end{cases}$$



Si verifica che la definizione di p è ben posta, che p è un rivestimento (si omettono i dettagli), ed infine che $\tilde{X}$ è connesso per archi e semplicemente connesso, da cui segue che $\tilde{X}$ è il rivestimento universale di X.
Riguardo a quest'ultima asserzione, per un noto argomento basta dimostrare che gli aperti
$$X_{m,n} := \tilde{q}(\mathbb{R} \cup (S^2 \times \{m, \dots, m+n-1\})$$
sono connessi per archi e semplicemente connessi per ogni coppia di interi m, n con $n \geq 1$. Procedendo per induzione su n, il punto chiave è osservare che $X_{m,n+1} = X_{m,n} \cup X_{n,1}$: siccome $X_{m,n}$ e $X_{n,1}$ sono connessi per archi e semplicemente connessi per ipotesi induttiva, e $X_{m,n} \cap X_{n,1} = \tilde{q}(\mathbb{R})$ è connesso per archi, allora anche $X_{n,m+1}$ deve essere connesso per archi e semplicemente connesso (per il teorema di van Kampen).
Per calcolare il gruppo fondamentale di X si può osservare che X è omeomorfo a $\tilde{X}/G$ dove G è il gruppo degli omeomorfismi $g_m : \tilde{X} \to \tilde{X}$ dati da $g_m : [(x, n)] \mapsto [(x, m+n)]$ per ogni $m \in \mathbb{Z}$. L'omeomorfismo è la mappa φ che ad ogni $[y] \in \tilde{X}/G$ associa $p(y) \in X$ – si vede facilmente che φ è ben definita, continua, bigettiva ed aperta. Si verifica inoltre che G agisce in modo propriamente discontinuo su $\tilde{X}$, da cui segue che il gruppo fondamentale di X è isomorfo a G, che a sua volta è isomorfo a $\mathbb{Z}$.

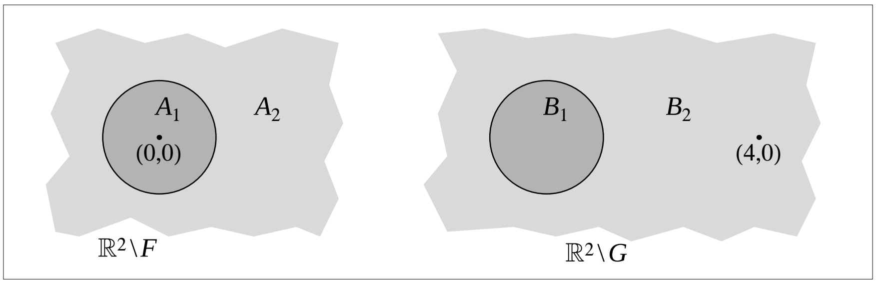
3. Non esiste alcun omeomorfismo φ di $\mathbb{R}^2$ tale che $\varphi(F) = G$. Se un tale φ esistesse, allora la sua restrizione a $\mathbb{R}^2 \setminus F$ sarebbe un omeomorfismo in $\mathbb{R}^2 \setminus G$. Dimostriamo quindi che non

esiste alcun omeomorfismo $\varphi : \mathbb{R}^2 \setminus F \to \mathbb{R}^2 \setminus G$ (si noti che questo enunciato è leggermente più forte di quello di partenza).
Supponiamo dunque per assurdo che tale φ esista. Osserviamo allora che le componenti connesse di $\mathbb{R}^2 \setminus F$ sono

$$A_1 := \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1, \, x \neq (0,0)\} \quad \text{e} \quad A_2 := \{x \in \mathbb{R}^2 : 1 < |x|\} \ ,$$

mentre le componenti connesse di $\mathbb{R}^2 \setminus G$ sono

$$B_1 := \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\} \quad \text{e} \quad B_2 := \{x \in \mathbb{R}^2 : 1 < |x|, \, x \neq (4,0)\} \ .$$



Essendo $\varphi(A_1)$ e $\varphi(A_2)$ insiemi connessi e contenuti in $B_1 \cup B_2$, devono essere contenuti in B_1 oppure in B_2. Inoltre, essendo φ una bigezione, si deve per forza verificare uno dei seguenti casi: (i) $\varphi(A_1) = B_1$ e $\varphi(A_2) = B_2$, oppure (ii) $\varphi(A_1) = B_2$ e $\varphi(A_2) = B_1$.
Possiamo tuttavia escludere entrambe le possibilità: infatti sia A_1 che A_2 sono omotopicamente equivalenti a S^1 (le circonferenze di raggio $1/2$ e 2 sono retratti di deformazione forti di A_1 ed A_2 rispettivamente), quindi non sono semplicemente connessi e non possono essere omeomorfi a B_1, che invece è semplicemente connesso (è contraibile).

Commenti.

- Esercizio 1. In alternativa si può utilizzare il fatto che la sfera meno un punto è omeomorfa al piano, e quindi il problema si riduce a quello di calcolare il gruppo fondamentale del piano meno un punto, che a sua volta è omotopicamente equivalente ad una circonferenza.
- Esercizio 2. Si può calcolare il gruppo fondamentale di X utilizzando il teorema di van Kampen. Posto infatti $U_1 := X \setminus q(-1,0,0)$ ed $U_2 := X \setminus q(-1,0)$, si vede facilmente che a) U_1 ed U_2 sono aperti in X; b) $q(S^1)$ è un retratto di deformazione forte di U_1, quindi U_1 è omotopicamente equivalente a S^1 e pertanto $\pi_1(U_1) \cong \mathbb{Z}$; c) $q(S^2)$ è un retratto di deformazione forte di U_2, quindi U_2 è omotopicamente equivalente a S^2 e pertanto è semplicemente connesso; d) il punto $[e]$ è un retratto di deformazione forte di $U_1 \cap U_2$, e quindi $U_1 \cap U_2$ è semplicemente connesso. Ne segue che $\pi_1(X) \cong \mathbb{Z}$.
- Esercizio 2. È possibile calcolare il gruppo fondamentale di X usando solo il rivestimento $p : \tilde{X} \to X$ e il fatto che $\tilde{X}$ è semplicemente connesso. Detto infatti f_0 il cammino in $\tilde{X}$ che va da $[0]$ a $[1]$, si vede subito che $g_0 := pf_0$ è un cammino chiuso in X con punto base $p(0) = [e]$. Consideriamo ora la mappa $\psi : \pi_1(X, [e]) \to p^{-1}([e])$ che ad ogni $[g]$ associa $\tilde{g}(1)$, dove $\tilde{g}$ è il sollevamento di g tale che $\tilde{g}(0) = [0]$. Si vede subito che $\psi : [g_0]^n \mapsto [n]$, da cui segue che il sottogruppo di $\pi_1(X, [e])$ generato da $[g_0]$ è libero e viene portato da ψ su tutta la fibra $p^{-1}([e])$. Siccome $\tilde{X}$ è semplicemente connesso, ψ è una bigezione e quindi questo sottogruppo – che è isomorfo a $\mathbb{Z}$ – coincide con $\pi_1(X, [e])$.
- Esercizio 3. Di questo esercizio sono state date svariate soluzioni.

1. a) Sia $\sum_n a_n z^n$ la serie di Taylor di f in 0. Allora l'ipotesi ii) implica $a_0 = 0$, mentre l'ipotesi i) implica che f' è dispari (segue dalle definizione di derivata) e quindi $f'(0) = 0$, ovvero $a_1 = 0$. Pertanto la funzione olomorfa

$$g(z) := \frac{f(z)}{z^2}$$

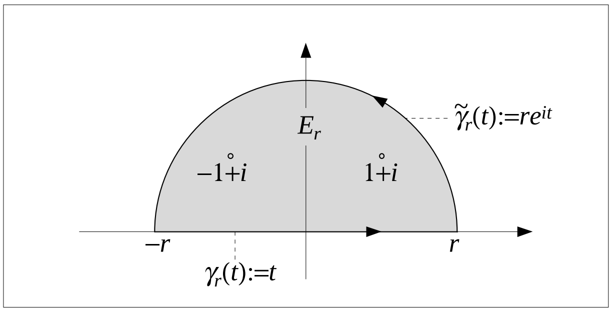
ha una singolarità eliminabile in 0. Applicando il principio del massimo modulo a g e tenendo conto dell'ipotesi (iii) otteniamo che per ogni $z \in D$

$$|g(z)| \le \sup_{w \in \partial D} |g(w)| = \sup_{|w|=1} \left| \frac{f(w)}{w^2} \right| = \sup_{|w|=1} |f(w)| \le 1 \ , \tag{1}$$

da cui segue che $|f(z)| = |g(z)|\,|z|^2 \le |z|^2$.

b) Se $|f(z_0)| = |z_0|^2$ allora $|g(z_0)| = 1$, e per via della (1) questo significa che z_0 è un punto di massimo di $|g|$ interno a D. Sempre per il principio del massimo modulo si ha che g assume un valore costante a (e chiaramente $|a| = |g(z_0)| = 1$), per cui $f(z) = g(z)\, z^2 = az^2$.

2. Cominciamo con il calcolare $I(a)$ per $a \ge 0$. Dato $r > 0$, indichiamo con E_r il semi-disco dato dall'intersezione di $\{|z| < r\}$ con il semipiano $\{\operatorname{Im} z > 0\}$, e prendiamo γ_r e $\tilde\gamma_r$ come nella figura sottostante.



Siccome per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{\cos(ax)}{4 + x^4} = \operatorname{Re}(f(x)) \quad \text{dove} \quad f(z) := \frac{e^{iaz}}{4 + z^4} \ ,$$

si ha allora

$$I(a) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ax)}{4 + x^4}\, dx = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\lim_{r \to +\infty} \int_{\gamma_r} f(z)\, dz \right] \tag{1}$$

D'altra parte nel semipiano $\{\operatorname{Im} z \ge 0\}$ si ha $|e^{iaz}| = e^{-ay} \le 1$ perché abbiamo supposto $a \ge 0$, e dunque $|f(z)| \le |4 + z^4|^{-1} \sim |z|^{-4}$ per $|z| \to \infty$, da cui segue (per un lemma noto) che

$$\lim_{r \to +\infty} \int_{\tilde\gamma_r} f(z)\, dz = 0 \ . \tag{2}$$

Infine il teorema dei residui dice che

$$\int_{\gamma_r * \tilde\gamma_r} f(z)\, dz = 2\pi i \sum \operatorname{Res}(f(z), z_i)$$

dove la somma viene fatta su tutti gli z_i poli (o meglio i punti singolari) di f contenuti in E_r. In particolare, essendo $\pm 1 + i$ gli unici due poli di f nel semipiano $\{\operatorname{Re} z \geq 0\}$, per ogni $r > \sqrt{2}$ si ha che

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_r * \tilde{\gamma}_r} f(z)\, dz &= 2\pi i \left[\operatorname{Res}(f(z), 1+i) + \operatorname{Res}(f(z), -1+i)\right] \\ &= 2\pi i \left[\frac{e^{iaz}}{4z^3}\bigg|_{z=1+i} + \frac{e^{iaz}}{4z^3}\bigg|_{z=-1+i} \right] = \frac{\pi}{4} e^{-a}(\cos a + \sin a)\ . \qquad (3)\end{aligned}$$

Mettendo insieme le formule (1), (2) e (3) otteniamo infine $I(a) = \frac{\pi}{8} e^{-a}(\cos a + \sin a)$ per ogni $a \geq 0$, e siccome $I(a)$ è una funzione pari

$$I(a) = \frac{\pi}{8} e^{-|a|}(\cos|a| + \sin|a|) \quad \text{per ogni } a \in \mathbb{R}.$$

3. a) Per calcolare il numero di zeri di f contenuti in $D_4 := \{|z| < 4\}$ applichiamo il teorema di Rouché alla scomposizione

$$f(z) = \underbrace{z^3}_{f_1} + \underbrace{2z^2 + 5z + 1}_{f_2}\ .$$

Infatti che per $z \in \partial D_4$ si ha

$$|f_2(z)| \leq 2 \cdot 4^2 + 5 \cdot 4 + 1 < 4^3 = |f_1(z)|$$

e quindi

$$\#\{\text{zeri di } f \text{ in } D_4\} = \#\{\text{zeri di } f_1 \text{ in } D_4\} = 3\ . \qquad (4)$$

Per calcolare il numero di zeri di f contenuti in $D_1 := \{|z| < 1\}$ applichiamo il teorema di Rouché alla scomposizione

$$f(z) = \underbrace{5z}_{f_1} + \underbrace{z^3 + 2z^2 + 1}_{f_2}\ .$$

Infatti che per $z \in \partial D_1$ si ha

$$|f_2(z)| \leq 1^3 + 2 \cdot 1^2 + 5 \cdot 4 + 1 < 5 \cdot 1 = |f_1(z)|$$

e quindi

$$\#\{\text{zeri di } f \text{ in } \overline{D}_1\} = \#\{\text{zeri di } f \text{ in } D_1\} = \#\{\text{zeri di } f_1 \text{ in } D_1\} = 1\ . \qquad (5)$$

Dalla (4) e dalla (5) deduciamo infine che

$$\#\{\text{zeri di } f \text{ in } A = D_4 \setminus \overline{D}_1\} = 2\ .$$

b) Osserviamo che $f'(x) = 3x^2 + 4x + 5$ è strettamente positiva per ogni $x \in \mathbb{R}$ da cui segue che f è strettamente crescente e quindi ammette un unico zero reale. Inoltre $f(-1) = -3$ ed $f(1) = 9$ e quindi tale zero deve essere compreso tra -1 ed 1, e pertanto non appartiene ad A.

COMMENTI.

- Esercizio 1. La serie di Taylor in 0 di una funzione olomorfa pari ha solo i termini di grado pari. Infatti
$$0 = f(z) - f(-z) = \sum_{n \text{ dispari}} 2a_n z^n$$
e quindi il principio del prolungamento analitico implica $a_n = 0$ per ogni n dispari.
- Esercizio 1. Una soluzione alternativa consiste nell'osservare che poiché la serie di Taylor di f in 0 ha solo i termini di grado pari, allora f si scrive come $f(z) = g(z^2)$ con g funzione olomorfa su D; si ottiene quindi la tesi applicando il lemma di Schwarz a g.
- Esercizio 1. Un'altra soluzione la si ottiene applicando il lemma di Schwarz a $g(z) := f(z)/z$.
- Esercizio 1. Il fatto che la parità di f implica $f'(0) = 0$ richiede un minimo di giustificazione, che però molti non hanno dato.
- Esercizio 2. Siccome la parte immaginaria di $f(x)$ è una funzione dispari, al posto della (1) si poteva scrivere direttamente
$$I(a) = \frac{1}{2} \lim_{r \to +\infty} \int_{\gamma_r} f(z)\, dz \; .$$
- Esercizio 2. Dopo aver scritto $I(a)$ come un integrale da $-\infty$ a $+\infty$, molti hanno trovato utile applicare il cambio di variabile $s = ax$, ma purtroppo hanno tralasciato di osservare che, per $a < 0$, dopo il cambio di variabile si ottiene un integrale da $+\infty$ e $-\infty$ e non da $-\infty$ a $+\infty$. Questo implica un errore di segno nel resto della soluzione.
- Esercizio 3a). Alcuni si sono sentiti in dovere di giustificare il fatto che f non ha radici sulla frontiera di D_1. In realtà le ipotesi del teorema di Rouché implicano automaticamente che non ci sono zeri né di f né di f_1 sulla frontiera dell'insieme considerato (in questo caso D_1).
- Esercizio 3b). Una soluzione alternativa è la seguente: siccome $f(x)$ è strettamente crescente syu $\mathbb{R}$, ammette un unico zero reale, inoltre tale zero è semplice perché f' non si annulla mai. Pertanto uno dei due zeri di f in A deve non essere reale, ma siccome anche il suo coniugato è uno zero di f ed è contenuto in A, ne consegue che nessuno dei due zeri di f in A è reale.
- Esercizio 3b). Molti hanno usato il seguente argomento: siccome f è strettamente crescente su $\mathbb{R}$ allora f ammette un solo zero reale x_0, ed i rimanenti due sono complessi. Il ragionamento non è del tutto corretto perché il fatto che f sia strettamente crescente non esclude che x_0 abbia molteplicità superiore a 1, come ad esempio succede per $f(z) = (x - x_0)^3$. Che x_0 sia uno zero semplice segue dal fatto che $f'(x_0) \neq 0$.

1. E_1 è la sfera S^3, mentre E_2 è un ellissoide in $\mathbb{R}^4$ ed è quindi omeomorfo ad S^3. Pertanto E_1 ed E_2 sono connessi per archi, e poiché hanno intersezione non vuota anche la loro unione X è connessa per archi. Inoltre l'intersezione $E_1 \cap E_2$ è determinata dalle equazioni

$$x_1 = 0 \quad \text{e} \quad x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$$

e quindi è omeomorfa alla sfera S^2; in particolare è connessa per archi. Pertanto E_1 ed E_2 sono spazi connessi per archi e semplicemente connessi con intersezione connessa per archi, e dunque la loro unione X è semplicemente connessa per il teorema di van Kampen.
Ad essere precisi, si applica il teorema di van Kampen scomponendo X come unione degli aperti $U_1 := X \setminus \{p_1\}$ e $U_2 := X \setminus \{p_2\}$ dove $p_1 := (1/2, 0, 0, 0)$ e $p_2 := (1, 0, 0, 0)$, ed osservando che E_1, E_2 e $E_1 \cap E_2$ sono retratti di deformazione rispettivamente di U_1, U_2 e $U_1 \cap U_2$, da cui segue che U_1 ed U_2 sono connessi per archi e semplicemente connessi mentre l'intersezione $U_1 \cap U_2$ è connessa per archi.

2. Poniamo $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Si verifica che la mappa $\Phi : X \to \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$ definita da

$$\Phi(z_1, z_2) := (z_1, z_2 - f(z_1))$$

è un omeomorfismo. Abbiamo dunque la seguente catena di equivalenze omotopiche

$$X \sim \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \sim \{0\} \times \mathbb{C}^* \sim \mathbb{C}^* \sim S^1 \ .$$

In particolare X è connesso per archi e

$$\pi_1(X) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z} \ .$$

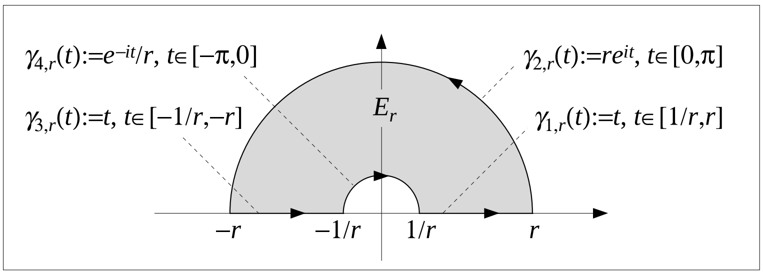
3. a) La serie di Laurent di f centrata in 0 si ottiene sviluppando in serie e^{iz}:

$$f(z) = \frac{1 - e^{iz}}{z^2} = \frac{1}{z^2}\left[1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!}\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-i^n}{n!} z^{n-2} \ .$$

Ne segue che 0 è un polo di ordine 1 con residuo $-i$.
b) Procedendo come al solito si ottiene che

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2}\, dx = \lim_{r \to +\infty} \operatorname{Re}\left[\int_{\gamma_{1,r}} f(z)\, dz + \int_{\gamma_{3,r}} f(z)\, dz\right] \tag{1}$$

dove i cammini γ_r^1 e γ_r^3 sono dati nella figura sottostante.



Poiché f non ha poli all'interno dell'insieme E_r (vedi figura), si ha che

$$\int_{\gamma_{1,r}} f(z)\, dz + \int_{\gamma_{3,r}} f(z)\, dz = -\int_{\gamma_{2,r}} f(z)\, dz - \int_{\gamma_{4,r}} f(z)\, dz \ . \tag{2}$$

Il terzo integrale in (2) tende a 0 per $r \to +\infty$ perché $|f(z)| \leq 2/|z|^2$ nel semipiano $\operatorname{Re} z \geq 0$; inoltre è un fatto noto che

$$\lim_{r \to +\infty} \int_{\gamma_{4,r}} f(z)\, dz = -\pi i \operatorname{Res}(f(z), 0) = -\pi \ . \tag{3}$$

Mettendo insieme $(1), (2), (3)$ si ottiene infine

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2}\, dx = \pi \ .$$

4. a) L'equazione $e^z + e^{-z} = 0$ equivale a $e^{2z} = -1$ ovvero $z = \pi i(\frac{1}{2} + k)$ con $k \in \mathbb{Z}$.
b) Vogliamo applicare il teorema di Rouché scomponendo $f(z)$ come somma delle funzioni $e^z + e^{-z}$ e z^{-2}. Verifichiamo dunque che per ogni $z \in \partial Q$ si ha

$$|e^z + e^{-z}| > |z^{-2}| \ . \tag{4}$$

Il lato superiore del quadrato è parametrizzato da $z = t + 2\pi i$ con $t \in [-2\pi, 2\pi]$, e dunque

$$|e^z + e^{-z}| = e^t + e^{-t} > 1 > \frac{1}{(2\pi)^2} \geq |z^{-2}| \ .$$

Il lato destro del quadrato è parametrizzato da $z = 2\pi + it$ con $t \in [-2\pi, 2\pi]$ e dunque

$$|e^z + e^{-z}| \geq |e^z| - |e^{-z}| \geq 2\pi - \frac{1}{2\pi} > \frac{1}{(2\pi)^2} \geq |z^{-2}| \ .$$

Per ragioni di simmetria la (4) deve valere anche sui lati rimanenti.
Applicando il teorema di Rouché (o meglio una sua variante) otteniamo

$$\#\{\text{zeri di } f \text{ in } Q\} - \#\{\text{poli di } f \text{ in } Q\} = \#\{\text{zeri di } e^z + e^{-z} \text{ in } Q\} = 4$$

(al solito, zeri e poli sono contati con le rispettive molteplicità) e quindi

$$\#\{\text{zeri di } f \text{ in } Q\} = 6 \ .$$

Commenti.

- Esercizio 2. Molti hanno applicato il teorema di van Kampen scomponendo X come unione di E_1 ed E_2. Questo non è corretto perché nelle ipotesi del teorema si richiede che gli elementi della scomposizione siano sottoinsiemi aperti di X, mentre E_1 ed E_2 sono chiusi.
- Esercizio 4. Si può dimostrare un enunciato molto più preciso di quello richiesto: gli zeri di $f(z)$ sono tutti semplici, puramente immaginari e simmetrici rispetto all'asse delle x; inoltre il segmento $[0, \pi i]$ ne contiene 2 (all'interno) mentre per $k \geq 1$ il segmento $[k\pi i, (k+1)\pi i]$ ne contiene 1 (all'interno).

1. Posto $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$, si vede subito che $X = \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$, quindi X è connesso per archi (in quanto prodotto di due spazi connessi per archi) e

$$\pi_1(X) = \pi_1(\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*) \cong \pi_1(\mathbb{C}^*) \times \pi_1(\mathbb{C}^*) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \ .$$

b) Fissato il punto base $x_0 := (1,1)$, due generatori di $\pi_1(X, x_0)$ sono, ad esempio, i cammini $\gamma_1, \gamma_2 : I \to X$ dati da

$$\gamma_1(t) := (e^{2\pi i t}, 1) \quad \text{e} \quad \gamma_2(t) := (1, e^{2\pi i t}) \ .$$

c) Poiché la mappa $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ data da $f : w \mapsto e^w$ definisce un rivestimento universale di $\mathbb{C}^*$, allora un rivestimento universale di $X = \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ è dato dalla mappa $g : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to X$ definita da

$$g(w_1, w_2) := (f(w_1), f(w_2)) = (e^{w_1}, e^{w_2}) \ .$$

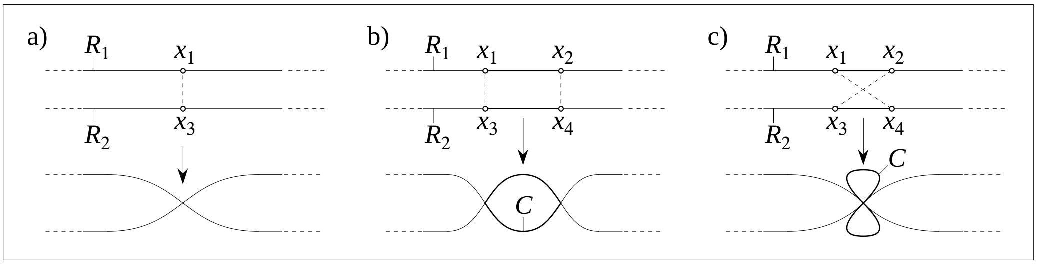
2. a) Il punto $[x_1]$ è un retratto di deformazione forte di X, che quindi è contraibile, ed in particolare semplicemente connesso (cfr. figura sotto).

b) Sia C il sottoinsieme di X dato dall'unione dei segmenti $[x_1, x_2]$ e $[x_3, x_4]$ (o, per essere precisi, delle loro proiezioni su X). Allora C è un retratto di deformazione forte di X, e poiché C è omeomorfo ad S^1 (cfr. figura sotto) si ha

$$\pi_1(X) \cong \pi_1(C) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z} \ .$$

c) Costruendo C come nel punto precedente, in questo caso si ottiene uno spazio omeomorfo al bouquet di due circonferenze (cfr. figura sotto) e quindi

$$\pi_1(X) \cong \pi_1(C) \cong \text{gruppo libero con due generatori.}$$



3. Dato $\theta \in \mathbb{R}$ e posto $z := e^{i\theta}$ si ha

$$\sin\theta = \frac{1}{2i}\Big(z - \frac{1}{z}\Big) \quad \text{e} \quad \cos\theta = \frac{1}{2}\Big(z + \frac{1}{z}\Big) \ .$$

Preso quindi il cammino chiuso

$$\gamma(\theta) := e^{i\theta} \quad \text{con } \theta \in [0, 2\pi]$$

si ha

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta}{2 + \cos\theta}\, d\theta = \int_\gamma \frac{-\frac{1}{4}(z - 1/z)^2}{2 + \frac{1}{2}(z + 1/z)}\, \frac{dz}{iz} = -\frac{1}{2i} \int_\gamma \underbrace{\frac{(z - 1/z)^2}{z^2 + 4z + 1}}_{f(z)}\, dz \ .$$

Osserviamo che all'interno del disco $D := \{|z| < 1\}$ la funzione $f(z)$ ha un polo semplice in $-2+\sqrt{3}$ ed un polo di ordine 2 in 0. Applicando il teorema dei residui otteniamo quindi

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta}{2+\cos\theta}\, d\theta &= -\pi \left[\operatorname{Res}\left(\frac{(z-1/z)^2}{z^2+4z+1}; -2+\sqrt{3}\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2}\frac{(z^2-1)^2}{z^2+4z+1}; 0\right)\right] \\
&= -\pi \left[\frac{(z-1/z)^2}{2z+4}\bigg|_{z=-2+\sqrt{3}} + \frac{d}{dz}\left(\frac{(z^2-1)^2}{z^2+4z+1}\right)\bigg|_{z=0}\right] \\
&= (4-2\sqrt{3})\pi\ .
\end{aligned}$$

4. a) Per ogni $r > 0$ sia A_r il semidisco aperto definito da

$$A_r := \{z : |z| < r,\ \operatorname{Re} z > 0\}\ .$$

Calcoliamo il numero di zeri di f contenuti in A_r per $r \geq 4$ scomponendo f come somma di e^z e di $4(z-2)^{-3}$ ed applicando quindi una nota variante del teorema di Rouché. Per ogni $z \in \partial A_r$ si ha infatti

$$|e^z| = \exp(\operatorname{Re} z) \geq 1 > \frac{1}{2} \geq \frac{4}{|z-2|^3}$$

(l'ultima disuguaglianza segue dal fatto che $r \geq 4$ e quindi $|z-2| \geq 2$ per ogni $z \in \partial A_r$). Pertanto

$$\#\{\text{zeri di } f \text{ in } A_r\} - \#\{\text{poli di } f \text{ in } A_r\} = \#\{\text{zeri di } f_1 \text{ in } A_r\} = 0$$

e dunque

$$\#\{\text{zeri di } f \text{ in } A_r\} = \#\{\text{poli di } f \text{ in } A_r\} = 3\ .$$

Ne consegue che nel semipiano A la funzione f ha tre zeri (contati con la loro molteplicità), tutti contenuti nel semidisco A_2.

b) Basta osservare che f e f' non si annullano mai contemporaneamente. Infatti se $f(z) = 0$ e $f'(z) = 0$ si ha necessariamente $f(z) = f'(z)$, che a sua volta implica $z = -1$. Ma si vede subito che f non si annulla in -1.

1. Si osservi innanzitutto che il segmento J è un retratto di deformazione (forte) di $\mathbb{R}^2$: si consideri ad esempio la deformazione $F : I \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ data da $F(t,x) := (1-t)x + t\,q(x)$ dove $q : \mathbb{R}^2 \to J$ è la proiezione definita da

$$q(x) = q(x_1, x_2) := \begin{cases} a_- = (-1,0) & \text{per } x_1 \le -1 \\ (x,0) & \text{per } -1 < x_1 < 1 \\ a_+ = (1,0) & \text{per } 1 \le x_1 \end{cases} .$$

Siccome $F(t,x) \sim F(t,x')$ per ogni $t \in I$ e $x, x' \in \mathbb{R}^2$ tali che $x \sim x'$, è possibile "passare" la deformazione F al quoziente, ovvero trovare una mappa $G : I \times X \to X$ tale che

$$G(t, p(x)) = p(F(t,x)) \quad \text{per ogni } t \in I,\ x \in \mathbb{R}^2.$$

Si vede subito che tale mappa è una deformazione forte di X su $p(J)$.
Per concludere l'esercizio basta osservare che X è omotopicamente equivalente a $p(J)$, che a sua volta è omeomorfo a S^1; pertanto X è connesso per archi e

$$\pi_1(X) \cong \pi_1(p(J)) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z} .$$

2. Risolviamo l'esercizio facendo vedere che X è omeomorfo a $S^{m-1} \times S^n$ per ogni $m \ge 2$ ed $n \ge 1$, da cui segue immediatamente che X è sempre connesso per archi e

$$\pi_1(X) \cong \pi_1(S^{m-1} \times S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} & \text{per } m = 2 \text{ e } n = 1 \\ \mathbb{Z} & \text{per } m = 2 \text{ e } n > 1 \\ \mathbb{Z} & \text{per } m > 2 \text{ e } n = 1 \\ \{0\} & \text{per } m > 2 \text{ e } n > 1 \end{cases} .$$

Dimostriamo per la precisione che la mappa $\Phi : S^{m-1} \times S^n \to X$ data da

$$\Phi(v,w) := \big((2 + w_0)v, \widetilde{w}\big) \quad \text{per ogni } v \in S^{m-1},\ w \in S^n,$$

dove w_0 è la prima coordinata di $w = (w_0, \dots, w_n)$ mentre $\widetilde{w} = (w_1, \dots, w_n)$ è il vettore delle ultime n coordinate di w, è un omeomorfismo.
La mappa Φ è ovviamente continua, e resta quindi da verificare che è iniettiva e che la sua immagine coincide con l'insieme X. Per l'iniettività, si osservi che $\Phi(v,w) = \Phi(v',w')$ implica $(2+w_0)v = (2+w_0')v'$ e $\widetilde{w} = \widetilde{w}'$. Siccome $2 + w_0$ e $2 + w_0'$ sono numeri strettamente positivi e v, v' sono vettori unitari, la prima equazione è soddisfatta se e solo se $v = v'$ e $2 + w_0 = 2 + w_0'$, che insieme alla seconda equazione implica $w = w'$.
La verifica dell'inclusione $\Phi(S^{m-1} \times S^n) \subset X$ è un conto che non riserva sorprese. Per l'inclusione opposta si verifica altrettanto direttamente che per ogni $(x,y) \in X$ si ha

$$(x,y) = \Phi(v,w) \quad \text{con } v := \frac{x}{|x|},\ w := (|x| - 2, y)$$

(v appartiene ovviamente a S^{m-1}, mentre che w appartiene a S^n segue dal fatto che x e y soddisfano l'equazione $(|x| - 2)^2 + |y|^2 = 1$).

3. Definiamo innanzitutto la funzione

$$f(z) := \frac{\sqrt[3]{z}}{1 + z^2}$$

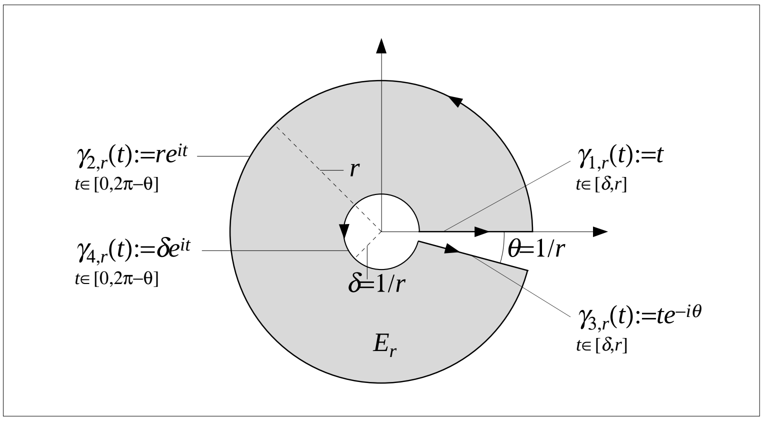
per ogni $z \neq 0$, dove $\sqrt[3]{z}$ indica la determinazione della radice cubica di z associata a quella determinazione del logaritmo complesso $\log z$ per cui l'argomento di z risulta compreso tra 0 e 2π, vale a dire

$$\sqrt[3]{z} := \exp\left(\tfrac{1}{3}\log z\right) = \rho^{1/3} e^{i\theta/3} \quad \text{per } z = \rho e^{i\theta} \text{ con } \rho > 0 \text{ e } 0 \leq \theta < 2\pi.$$

Procediamo come al solito considerando l'integrale di $f(z)$ sul cammino

$$\gamma_r := \gamma_{1,r} * \gamma_{2,r} * \overline{\gamma}_{3,r} * \overline{\gamma}_{4,r}$$

dove i cammini $\gamma_{i,r}$ sono dati nella figura sottostante avendo preso r numero reale strettamente maggiore di 1.



Il cammino γ_r parametrizza in senso antiorario la frontiera di E_r e la funzione $f(z)$ è meromorfa all'interno di E_r con poli *semplici* in i e $-i$, ed è continua sul bordo di E_r. Applicando il teorema dei residui abbiamo quindi che

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_r} f(z)\,dz &= 2\pi i\big[\mathrm{Res}(f,i) + \mathrm{Res}(f,-i)\big] \\ &= 2\pi i \left[\frac{\sqrt[3]{z}}{2z}\bigg|_{z=i} + \frac{\sqrt[3]{z}}{2z}\bigg|_{z=-i} \right] \\ &= 2\pi i \left[\frac{e^{\pi i/6}}{2i} + \frac{e^{\pi i/2}}{-2i} \right] = \frac{\pi}{2}(\sqrt{3} - i) \ . \end{aligned} \tag{1}$$

D'altra parte, calcoli di routine ci danno che

$$\lim_{r\to+\infty} \int_{\gamma_{1,r}} f(z)\,dz = \int_0^\infty \frac{\sqrt[3]{x}}{1+x^2}\,dx \ , \tag{2}$$

$$\lim_{r\to+\infty} \int_{\gamma_{3,r}} f(z)\,dz = e^{2\pi i/3} \int_0^\infty \frac{\sqrt[3]{x}}{1+x^2}\,dx \ , \tag{3}$$

$$\lim_{r\to+\infty} \int_{\gamma_{2,r}} f(z)\,dz = \lim_{r\to+\infty} \int_{\gamma_{4,r}} f(z)\,dz = 0 \ . \tag{4}$$

Mettendo insieme le formule (1)-(4) otteniamo infine che

$$\big(1 - e^{2\pi i/3}\big) \int_0^\infty \frac{\sqrt[3]{x}}{1+x^2}\,dx = \lim_{r\to+\infty} \int_{\gamma_r} f(z)\,dz = \frac{\pi}{2}(\sqrt{3} - i)$$

da cui segue

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt[3]{x}}{1+x^2}\,dx = \frac{\frac{\pi}{2}(\sqrt{3}-i)}{1-e^{2\pi i/3}} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}\ .$$

4. a) In $\mathbb{C}$ la funzione $f(z)$ ha lo stesso numero di zeri di $z\,f(z)$ e cioè 4, perché quest'ultima è un polinomio di grado 4 (si contano gli zeri con la loro molteplicità). Resta da determinare quanti di questi zeri sono contenuti nel disco aperto

$$\mathbb{C}\setminus A := \{z : |z| < 1\}\ .$$

Per fare questo scomponiamo $f(z)$ come

$$f(z) = \underbrace{18z}_{f_1(z)} + \underbrace{z^3 - 8z^2 + 2/z}_{f_2(z)}\ .$$

Tenuto conto del fatto che

$$|f_1(z)| = 18 > 1 + 8 + 2 \geq |f_2(z)|$$

per $|z| = 1$, cioè sulla frontiera di $\mathbb{C}\setminus A$, applicando il teorema di Rouché (o meglio per una sua nota variante) otteniamo

$$\#\{\text{zeri di } f \text{ in } \mathbb{C}\setminus A\} - \#\{\text{poli di } f \text{ in } \mathbb{C}\setminus A\} = \#\{\text{zeri di } f_1 \text{ in } \mathbb{C}\setminus A\} = 1\ .$$

Tenuto conto che f ha un unico polo semplice in 0 ricaviamo infine

$$\#\{\text{zeri di } f \text{ in } A\} = 4 - \#\{\text{zeri di } f \text{ in } \mathbb{C}\setminus A\} = 2\ .$$

b) Gli zeri di $f(z)$, ovvero quelli di $z\,f(z)$, sono tutti semplici. Infatti la derivata

$$(z\,f(z))' = 4z^3 - 24z^2 + 36z = 4z(z-3)^2$$

si annulla solo in 0 e 3, e si vede subito che nessuno di questi è uno zero di $z\,f(z)$.

COMMENTI.

- Esercizio 2. La soluzione data sopra è relativamente semplice, ma non trasparente, cioè non è chiaro come ci si dovrebbe arrivare. Ecco allora una soluzione più "costruttiva".
L'equazione che definisce l'insieme X può essere riletta dicendo che X è l'unione degli insiemi

$$X_p := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n :\ |x| = p_1,\ |y| = p_2\big\}$$

dove $p = (p_1, p_2)$ che varia nella semicirconferenza C di centro $(2,0)$ e raggio 1 che giace nel semipiano $p_2 \geq 0$. Siccome la semicirconferenza C può essere parametrizzata come l'insieme dei punti $p = (2+\cos t, \sin t)$ con $t \in [0,\pi]$ e ciascun X_p è il prodotto di due sfere di dimensioni $m-1$ ed $n-1$ e raggi p_1 e p_2 centrate nell'origine, è naturale pensare di parametrizzare i punti di X utilizzando come spazio di parametrizzazione $Y := [0,\pi] \times S^{m-1} \times S^{n-1}$. Per la precisione consideriamo la parametrizzazione $\Psi : Y \to X$ data da

$$\Psi(t,u,v) := ((2+\cos t)u, \sin t\, v)$$

Si vede subito che Ψ è una mappa continua e surgettiva ma non iniettiva quando $\sin t = 0$; per la precisione si ha che l'identità $\Psi(t,u,v) = \Psi(t',u',v')$ implica tre possibili casi: a) $t = t'$, $u = u'$ e $v = v'$; b) $t = 0$, $u = u'$ e v, v' qualunque; c) $t = \pi$, $u = u'$ e v, v' qualunque.

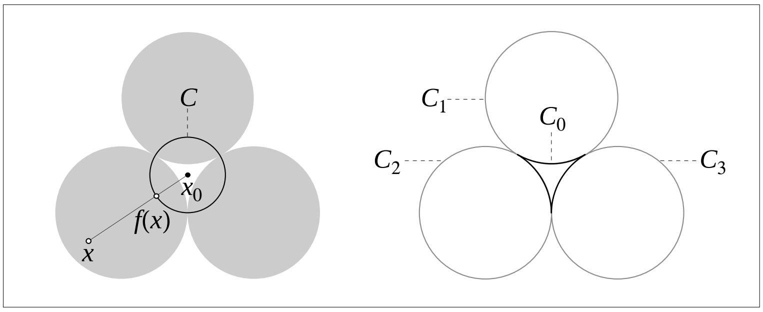
Pertanto, indicando con $\sim$ la relazione di equivalenza su Y che per ogni $t \in \{0, \pi\}$ ed ogni $u \in S^{m-1}$ identifica tra loro i punti dell'insieme $\{t\} \times \{u\} \times S^{n-1}$, è possibile passare la mappa Ψ al quoziente ottenendo una mappa $\Psi' : Y/\!\sim\, \to X$ continua, surgettiva ed *iniettiva*, ovvero un omeomorfismo. Ma si vede subito che $Y/\!\sim$ non è altro che il prodotto $S^{m-1} \times Z$ dove Z è il quoziente del prodotto $[0,\pi] \times S^{n-1}$ rispetto alla relazione di equivalenza che identifica ad un punto sia la sfera $\{0\} \times S^{n-1}$ che la sfera $\{\pi\} \times S^{n-1}$, ed è noto che Z è omeomorfo alla sfera S^n. Riassumendo X è omeomorfo a $Y/\!\sim$ che a sua volta è omeomorfo a $S^{m-1} \times S^n$.

- Esercizio 3. Una possibile alternativa consiste nel procedere come nella dimostrazione data sopra, rimpiazzando però l'insieme E_r con la sua intersezione con il semipiano $\operatorname{Im} z \geq 0$ (si tratterebbe quindi di una mezza corona circolare).

- Esercizio 3. Tutte le soluzioni presentate all'esame tranne una sono state viziate da errori relativi al significato da attribuire all'espressione $\sqrt[3]{z}$. Cosa questa piuttosto grave.

SCRITTO DEL QUARTO APPELLO, 9 GENNAIO 2008

1. a) Lo spazio X si retrae con deformazione su una circonferenza, e pertanto il gruppo fondamentale di X è isomorfo a $\mathbb{Z}$. Per la precisione, sia C la circonferenza che passa per i punti di tangenza dei tre cerchi (si veda la figura sotto, a sinistra) e si indichi con x_0 il suo centro e con r il suo raggio: si verifica che la proiezione radiale su C, vale a dire la mappa su X data da
$$f(x) := x_0 + r\frac{x - x_0}{|x - x_0|} \ ,$$
è una *retrazione* di X su C, mentre la mappa
$$F(t, x) := (1 - t)x + tf(x) \ ,$$
definita per $t \in [0, 1]$ e $x \in X$, è una *deformazione* di X su C. Il punto chiave è verificare che per ogni $x \in X$, $F(t, x)$ appartiene effettivamente ad X per ogni $t \in [0, 1]$, ovvero che il segmento di estremi x ed $f(x)$ è contenuto in X (si veda la figura sotto, a sinistra).



b) In questo caso il gruppo fondamentale di X è il gruppo libero con 4 generatori. Siano infatti C_1, C_2, C_3 le tre circonferenze, e indichiamo con C_0 l'unione degli archi di angolo $\pi/3$ individuati su ciascuna circonferenza dai punti di tangenza con le altre due (si veda la figura sopra, a destra). Siccome anche C_0 è omeomorfo ad una circonferenza, il gruppo fondamentale C_j con $j = 0, \dots, 3$ è isomorfo a $\mathbb{Z}$; indichiamo quindi con γ_j un suo generatore. Applicando iterativamente il teorema di van Kampen si ottiene
$$\begin{aligned}
&\pi_1(C_0 \cup C_1) = \langle \gamma_0, \gamma_1 | \varnothing \rangle \ , \\
&\pi_1(C_0 \cup C_1 \cup C_2) = \langle \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2 | \varnothing \rangle \ , \\
&\pi_1(X) = \pi_1(C_0 \cup C_1 \cup C_2 \cup C_3) = \langle \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 | \varnothing \rangle \ .
\end{aligned}$$
Il punto chiave è verificare che ad ogni applicazione del teorema di Van Kampen l'intersezione degli spazi considerati è semplicemente connessa (si omettono i dettagli).

2. L'applicazione lineare di $\mathbb{R}^4$ in sé associata alla matrice M è un'isometria (per la precisione è la composizione di due rotazioni di $\pi/2$, una avente come asse il piano $\{x_1 = x_2 = 0\}$ e l'altra il piano $\{x_3 = x_4 = 0\}$). Da questo segue immediatamente che la mappa φ porta la sfera S^3 in sé stessa in modo bigettivo – ed è ovviamente continua con inversa continua.
b) Un semplice conto dimostra che $M^2 = -I$ e quindi $M^4 = I$, dove I è la matrice identità di dimensione 4. Pertanto G è un gruppo ciclico di ordine 4.
c) Siccome G è un gruppo finito, per dimostrare che l'azione di G su S^3 è propriamente discontinua basta verificare che è libera, vale a dire che $\varphi^j(x) \neq x$ per ogni $x \in S^3$ e $j = 1, 2, 3$. Questa proprietà può essere dimostrata (per esempio) facendo vedere che le matrici $M - I$, $M^2 - I = -2I$ e $M^3 - I = -(M + I)$ sono tutte invertibili.
Infine, essendo S^3 semplicemente connesso, il gruppo fondamentale dello spazio delle orbite S^3/G è isomorfo a G, ovvero a $\mathbb{Z}_4$.

3. La soluzione è standard: detta γ la circonferenza parametrizzata da $z = e^{i\theta}$ con $0 \le \theta \le 2\pi$, si ha
$$\sin\theta = \frac{z - 1/z}{2i} \ , \quad \cos\theta = \frac{z + 1/z}{2} \ , \quad d\theta = \frac{dz}{iz} \ ,$$
e quindi
$$\int_0^{2\pi} \frac{1 + 2\sin\theta}{2 + \cos^2\theta}\, d\theta = \int_\gamma \frac{1 + 2\frac{z-1/z}{2i}}{2 + \big(\frac{z+1/z}{2}\big)^2}\, \frac{dz}{iz} = -4 \int_\gamma \underbrace{\frac{z^2 + iz - 1}{z^4 + 10z^2 + 1}}_{f(z)}\, dz \ .$$
Si applica ora il teorema dei residui: all'interno della circonferenza γ la funzione $f(z)$ ha due poli semplici
$$z_{1,2} = \pm ia \quad \text{con } a := \sqrt{5 - \sqrt{24}}$$
e quindi
$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{1 + 2\sin\theta}{2 + \cos^2\theta}\, d\theta &= -8\pi i \big[\mathrm{Res}(f(z), z_1) + \mathrm{Res}(f(z), z_2)\big] \\ &= -8\pi i \left[\frac{z^2 + iz - 1}{4z^3 + 20z}\Big|_{z=z_1} + \frac{z^2 + iz - 1}{4z^3 + 20z}\Big|_{z=z_2} \right] \\ &= -8\pi i \left[\frac{-a^2 - a - 1}{-4ia^3 + 20ia} + \frac{-a^2 + a - 1}{4ia^3 - 20ia} \right] \\ &= \frac{4\pi}{5 - a^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}\pi \ . \end{aligned}$$

4. Si ricordi che $|e^{z+n}| = e^{x+n}$ dove x è la parte reale di z. Pertanto, se $n \ge 2$ e $z \in \partial D$,
$$|e^{z+n}| = e^{x+n} \ge e^{-1+n} \ge e > 1 = |z|^3 \ ;$$
applicando il teorema di Rouché si ottiene quindi
$$I(n) = \#\{\text{zeri di } e^{z+n} \text{ in } D\} = 0$$
e dunque $I(n) = 0$ per ogni $n \ge 2$.
Viceversa, se $n \le -2$ e $z \in \partial D$,
$$|e^{z+n}| = e^{x+n} \le e^{1+n} \le e^{-1} < 1 = |z|^3 \ ;$$
applicando il teorema di Rouché si ottiene quindi
$$I(n) = \#\{\text{zeri di } z^3 \text{ in } D\} = 3$$
e dunque $I(n) = 3$ per ogni $n \le -2$.

Commenti.

- Esercizio 3. Essendo l'integranda una funzione razionale di $\cos\theta$ e $\sin\theta$, è possibile calcolare questo integrale direttamente usando con un opportuno cambio di variabile, senza quindi ricorrere alla teoria delle funzioni olomorfe.
- Esercizio 4. Gli zeri di f_n hanno tutti molteplicità 1 (e quindi $I(n)$ è anche il numero di zeri di f_n contenuti in D contati senza molteplicità). Infatti se z fosse uno zero di f_n con molteplicità maggiore di 1 si avrebbe $0 = f_n(z) = f_n'(z)$ da cui segue $z^3 = 3z^2$, ovvero $z = 0$ oppure $z = 3$. Ma si verifica facilmente che f_n non si annulla né in 0 né in 3 per alcun n.

Scritto del quinto appello, 30 gennaio 2008

1. Un omeomorfismo è la mappa $h : S^{d-1} \times S^1 \to T$ definita da
$$h(x,y) := \Big(\Big(1 + \frac{y_1}{2}\Big)x \,,\, \frac{y_2}{2}\Big)$$
(la verifica è completamente standard e viene omessa).

2. Rappresentiamo il piano proiettivo $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$ come il quoziente $D/\!\sim$ dove D è il disco chiuso di centro 0 e raggio 1 nel piano e $\sim$ è la relazione di equivalenza che identifica i punti antipodali della frontiera di D. Supponiamo inoltre che il punto rimosso da $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$ corrisponda al centro 0 di D, per cui, posto $D' := D \setminus \{0\}$, lo spazio X è omeomorfo al quoziente $D'/\!\sim$.
Com'è noto, la mappa $F : [0,1] \times D' \to \partial D$ definita da
$$F(t,x) := (1-t)x + t\frac{x}{|x|}$$
è una deformazione di D' su ∂D, e passando al quoziente otteniamo una deformazione $\tilde F$ di $X \simeq D'/\!\sim$ su $\partial D/\!\sim$. Per la precisione, detta p la proiezione canonica di D' su $D'/\!\sim$, si deve far vedere che la mappa $p \circ F : [0,1] \times D' \to \partial D/\!\sim$ è il sollevamento di una mappa da $\tilde F : [0,1] \times D'/\!\sim \to \partial D/\!\sim$; questo segue dal fatto che $x \sim x'$ implica $F(t,x) \sim F(t,x')$ per ogni $t \in [0.1]$ e $x, x' \in D$.
Per concludere osserviamo che $\partial D/\!\sim$ è omeomorfo alla retta proiettiva $\mathbb{P}^1\mathbb{R}$, che a sua volta è omeomorfa a S^1. Pertanto X è omotopicamente equivalente a S^1. Da questo segue che X è connesso per archi e
$$\pi_1(X) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}\ .$$

3. La soluzione è standard. Per ogni r positivo sia $\gamma_{1,r}$ il cammino definito da $\gamma_{1,r}(t) := t$ con $t \in [-r, r]$; si ha allora
$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{4+x^4}\,dx = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{4+x^4}\,dx\right) = \lim_{r\to+\infty} \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\int_{\gamma_{1,r}} \underbrace{\frac{e^{iz}}{4+z^4}}_{f(z)}\,dz\right)\ . \tag{2}$$

Posto inoltre $\gamma_{2,r}(t) := re^{it}$ con $t \in [0,\pi]$, si ha
$$\lim_{r\to+\infty} \int_{\gamma_{2,r}} f(z)\,dz\ , \tag{3}$$
e siccome per $r > 1$ i poli di $f(z)$ racchiusi dal cammino $\gamma_{1,r} * \gamma_{2,r}$ sono $z_{1,2} = \pm 1 + i$, e si tratta di poli semplici, il teorema dei residui dà
$$\begin{aligned}\int_{\gamma_{1,r}} f(z)\,dz + \int_{\gamma_{2,r}} f(z)\,dz &= 2\pi i\big[\mathrm{Res}(f(z), z_1) + \mathrm{Res}(f(z), z_2)\big] \\ &= 2\pi i\left[\frac{e^{iz}}{4z^3}\Big|_{z=z_1} + \frac{e^{iz}}{4z^3}\Big|_{z=z_2}\right] \\ &= 2\pi i\left[\frac{z_1 e^{iz_1}}{4z_1^4} + \frac{z_2 e^{iz_2}}{4z_2^4}\right] \\ &= 2\pi i\left[\frac{(1+i)e^{i(1+i)}}{-16} + \frac{(-1+i)e^{i(-1+i)}}{-16}\right] \\ &= \frac{\pi}{4e}(\cos 1 + \sin 1)\ . \end{aligned} \tag{4}$$

Mettendo insieme le formule $(2-4)$ otteniamo infine

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{4+x^4}\,dx = \frac{\pi}{8e}(\cos 1 + \sin 1)\ .$$

4. a) Basta prendere $f(z) := \max\{y - |z|, 0\}$; in tal caso l'integrale di sinistra della (1) è 0 mentre quello di destra è y^2.
b) Preso $r > 0$, sia γ_r la parametrizzazione in senso antiorario della frontiera del rettangolo $R_r := [-r, r] \times [0, y]$. Siccome f non ha poli, per il teorema dei residui l'integrale di $f(z)$ su γ_r è zero. D'altra parte utilizzando le ipotesi fatte si dimostra facilmente che

$$0 = \lim_{r\to+\infty} \int_{\gamma_r} f(z)\,dz = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt - \lim_{r\to+\infty} \int_{-r}^{r} f(x+iy)\,dx\ ,$$

da cui segue che l'integrale improprio a sinistra della (1) esiste e coincide con quello di destra.
c) Basta prendere una funzione meromorfa f con un'unico polo semplice z_0 contenuto all'interno della striscia $\mathbb{R} \times [0, y]$, ad esempio

$$f(z) = \frac{1}{4z^2 + y^2}\ .$$

Ragionando infatti come al punto b) si ottiene che la differenza tra l'integrale di destra della (1) e quello di sinistra è pari $2\pi i \operatorname{Res}(f(z), z_0)$ ed è quindi diversa da zero.