Versione: 31 marzo 2007

Università di Pisa
Corso di laurea in Scienze Biologiche Molecolari

Raccolta di esercizi per il corso di

Matematica e Statistica (corso C)

a.a. 2006/07

Giovanni Alberti

Giovanni Alberti
Dipartimento di Matematica
Università di Pisa
largo Pontecorvo 5
56127 Pisa
www.dm.unipi.it/~alberti

Introduzione

Questa è una raccolta degli esercizi assegnati durante il corso di Matematica e Statistica C per il corso di laurea triennale in Scienze Biologiche Molecolari nell'a.a. 2006/07. Gli esercizi sono divisi in "fogli" corrispondenti grosso modo ad argomenti distinti.

Programma del corso.

Gli argomenti appena accennati o non fondamentali sono riportati in corsivo.

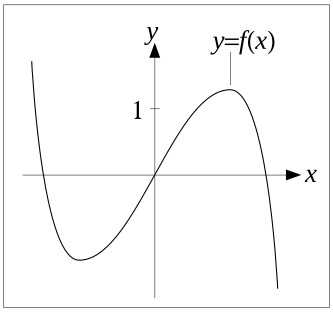
1. Calcolo differenziale ed integrale, equazioni differenziali
   - 1.1 Funzioni e grafici di funzioni: dominio, immagine, funzione inversa. Funzioni elementari: potenze, esponenziali, logaritmi, funzioni trigonometriche (seno, coseno, tangente) e funzioni trigonometriche inverse. Operazioni sui grafici di funzioni. Interpretazione di equazioni e disequazioni in termini di grafici di funzioni.
   - 1.2 Numeri complessi. Notazione cartesiana e trigonometrica. Soluzioni complesse di un'equazione algebrica di secondo grado. *Calcolo delle radici di un numero complesso.*
   - 1.3 Derivata di una funzione: significato geometrico ed interpretazione fisica. Regole per il calcolo delle derivate. Derivate delle funzioni elementari. Studio dei grafici di funzioni.
   - 1.4 Teorema di de l'Hôpital. Notazione di Landau ("o" piccoli e "o" grandi). Sviluppo di Taylor di una funzione. Sviluppi di Taylor delle funzioni elementari. Parte principale di un infinito e di un infinitesimo. Calcolo dei limiti.
   - 1.5 Definizione di integrale definito di una funzione in termini di area del sottografico. Teorema fondamentale del calcolo integrale. Primitive (integrale indefinito) delle funzioni elementari; regole per il calcolo delle primitive. *Interpretazione dell'integrale come lavoro di una forza. Calcolo di aree e volumi.*
   - 1.6 Esempi di equazioni differenziali. Significato dei dati iniziali. Equazioni a variabili separabili. Equazioni lineari del primo ordine (formula risolutiva generale). Equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti omoogenee e non. *Il moto dell'oscillatore armonico (semplice, forzato, smorzato). Il fenomeno della risonanza. Le piccole oscillazioni del pendolo.*
2. Elementi di probabilità e statistica descrittiva
   - 2.1 Permutazioni, combinazioni, disposizioni. Coefficienti binomiali. Fattoriale. *Formula di Stirling (senza dimostrazione).* Applicazione alla risoluzione di alcuni problemi di probabilità elementare.
   - 2.2 Definizione di probabilità su uno spazio di eventi elementari finito. Eventi indipendenti. Probabilità condizionata. Formula di Bayes. Esempi classici di probabilità classici (lancio di due dadi, lancio di n monete).
   - 2.3 Variabili aleatorie. Valor medio e varianza. Indipendenza e covarianza. Valor medio e varianza per la somma di due o più variabili aleatorie (indipendenti e non). Media campionaria e versione debole del teorema dei grandi numeri. Distribuzione di Bernoulli e distribuzione binomiale.
   - 2.4 Esempi di probabilità su spazi di eventi elementari infiniti (continui). Probabilità associata ad una funzione di densità. Definizione di media e varianza di una variabile aleatoria. Distribuzione normale (o Gaussiana). *Teorema del limite centrale (senza dimostrazione).*
   - 2.5 Valor medio e varianza per un insieme finito di dati. Classe mediana e classe modale. Relazione tra media e media di un campione casuale.
3. Vettori e matrici
   - 3.1 Vettori in $\mathbb{R}^n$: somma, prodotto per costante, prodotto scalare. Interpretazione geometrica della somma (regola del parallelogrammo) e del prodotto scalare (senza dimostrazioni).

3.2 Matrici. Somma e prodotto di matrici, prodotto di una matrice per un vettore. Determinante e calcolo dell'inversa di una matrice (in particolare per le matrici 2×2 e 3×3, senza dimostrazioni). *Interpretazione geometrica del determinante come area e come volume.*

3.3 Impostazione e risoluzione dei sistemi di n equazioni lineari in n incognite in termini di matrici e vettori.

1. Determinare il dominio di definizione della funzione $f(x) := \log(e^x - 1)$.

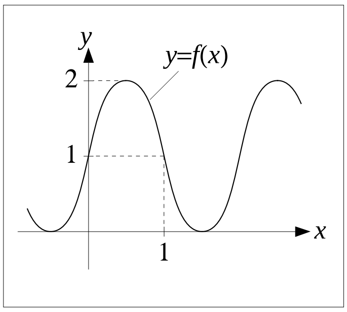
2. Sia f la funzione data nella figura accanto. Individuare graficamente le soluzioni delle seguenti equazioni e disequazioni:
a) $f(x) = 0$;
b) $f(x) = 1$;
c) $f(x) < 0$;
d) $f(x) > 1$.

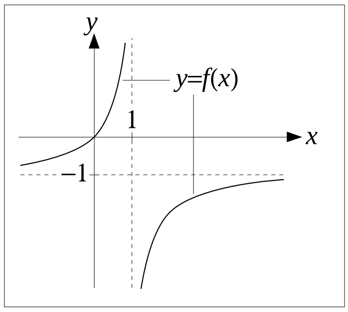


3. Disegnare il grafico delle seguenti funzioni:

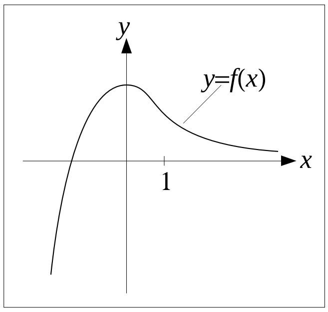
$$\text{a) } e^{-x}\ , \qquad \text{b) } \frac{1}{(x+1)^2}\ , \qquad \text{c) } \frac{1}{x^2}+1\ , \qquad \text{d) } \frac{1}{x-2}-1\ .$$

4. Trovare una possibile formula per le due funzioni nelle figure sottostanti

a) 

b) 

5. Sia f la funzione data nella figura accanto. Disegnare il grafico delle seguenti funzioni:
a) $f(-x)$;
b) $-f(-x)$;
c) $f(x-1)$.



6. Trovare le soluzioni dell'equazione $|\tan x| = 1$.

7. Trovare le soluzioni della disequazione $2\sin(2x) \geq 1$.

8. Calcolare $\dfrac{4}{1+3i} + \dfrac{4}{3-i}$.

9. Trovare le soluzioni complesse dell'equazione $z^2 - 4z + 5 = 0$.

10. Determinare le coordinate *polari* dei seguenti punti del piano, dati in coordinate *cartesiane*:

$$\text{a) } P_1 := (1,-1)\ , \quad \text{b) } P_2 := (-2,0)\ , \quad \text{c) } P_3 := (-1,\sqrt{3})\ .$$

11. Determinare le coordinate *cartesiane* dei seguenti punti del piano, dati in coordinate *polari*:

a) $\begin{cases} r = 1 \\ \alpha = 2\pi/3 \end{cases}$, b) $\begin{cases} r = 2^{3/2} \\ \alpha = -7\pi/4 \end{cases}$, c) $\begin{cases} r = 2 \\ \alpha = 3\pi \end{cases}$.

12. Per i seguenti numeri complessi z, scrivere il coniugato $\bar{z}$, il modulo $|z|$ e l'argomento α:

 a) $z_1 := -2 - 2i$, b) $z_2 := -3 + i\sqrt{3}$, c) $z_3 := -4i$.

13. a) Scrivere in forma trigonometrica il numero complesso $1 - i\sqrt{3}$.
 b) Determinare la forma trigonometrica e quella cartesiana di $(1 - i\sqrt{3})^8$.

14. Disegnare l'insieme dei numeri complessi z tali che $|z + 1| \geq |z - i|$.

15. a) Scrivere in forma trigonometrica il numero complesso $4i$.
 b) Trovare le soluzioni dell'equazione $z^3 = 8i$.

16. Disegnare l'insieme dei punti (x, y) tali che $1 - x^2 \leq y \leq x^2 - 1$.

FOGLIO DI ESERCIZI N. 2 – 9/11/2006

1. Determinare il dominio di definizione e la derivata delle seguenti funzioni:
$$\text{a) } \frac{1}{\sqrt{\log x}}\ , \quad \text{b) } \log(\log x)\ , \quad \text{c) } \frac{\log(\cos x)}{\log(\sin x)}\ , \quad \text{d) } (\sin x^2)^2\ , \quad \text{e) } \frac{1+x^2}{1-x^2}\ .$$

2. Determinare il dominio di definizione e la derivata delle seguenti funzioni:
$$\text{a) } e^{2\log x}\ , \quad \text{b) } \log(x^2+2x^4)-\log(x+2x^3)\ , \quad \text{c) } 2^{1-2x}4^x\ , \quad \text{d) } \log\left(\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}\right)\ .$$

3. a) Dimostrare che $x^x = e^{x\log x}$.
   b) Calcolare la derivata di x^x.
   c) Calcolare la derivata di $(x^x)^x$.

4. Trovare i punti in cui si annulla la derivata delle seguenti funzioni e dire se si tratta di punti di massimo locale, di minimo locale, o altro:
$$\text{a) } x^2-2x+3\ , \quad \text{b) } 2-\log(x^2-2x+3)\ , \quad \text{c) } x^4-2x^2+3\ .$$

5. Per ciascuna delle seguenti funzioni, dire se sono crescenti, decrescenti, o nessuna delle precedenti:
$$\text{a) } e^{1-2x}\ , \quad \text{b) } x^3+x\ , \quad \text{c) } \log(1+x^2)\ , \quad \text{d) } \arctan(1-x^3)\ , \quad \text{e) } e^{\sin x}\ .$$

6. Per ciascuna delle seguenti funzioni, dire se sono convesse, concave, o nessuna delle precedenti:
$$\text{a) } x-e^x\ , \quad \text{b) } e^{(x^2)}\ , \quad \text{c) } \sin x\ , \quad \text{d) } e^x+e^{-x}\ .$$

7. Disegnare approssimativamente il grafico delle funzioni nell'esercizio 4.

8. Disegnare approssimativamente il grafico della funzione $y = x^3 - 3x - 1$.

9. Tra tutti i triangoli rettangoli di perimetro 1 trovare quello di area massima.

10. Tra tutti i triangoli rettangoli di area 1 trovare quello di perimetro minimo.

11. Disegnare il grafico di $f(x) := \dfrac{1}{1+x^4}$.

12. Trovare la retta tangente al grafico della funzione $y = e^x$ che passa per l'origine.

13. a) Determinare il numero di soluzioni dell'equazione $x^3 - 3x - 1 = 0$ comprese tra -2 e 3;
    b) Determinare, al variare di $a \in \mathbb{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione $x^3 - 3x - 1 = a$ comprese tra -2 e 3.

14. Dimostrare che se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione convessa pari, allora 0 è un punto di minimo di f.

15. a) Dato il numero reale $a \geq 0$, scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di $y = e^{-x}$ nel punto di ascissa a, e quindi calcolare l'area del triangolo delimitato da tale retta e dagli assi cartesiani.
    b) Determinare per quale valore di a tale area risulta essere massima.
    c) Determinare per quale valore di a tale area risulta essere minima.

16. a) Dimostrare che $t^3 - 3t + 2 \geq 0$ per ogni numero reale positivo t.
    b) Dimostrare che $x^3 + 2y^3 \geq 3xy^2$ per ogni coppia di numeri reali positivi x, y. [*Suggerimento: dividere la disuguaglianza per y^3 e usare quanto dimostrato al punto precedente.*]

1. Dire se esistono ed eventualmente calcolare i seguenti limiti:

$$\text{a) } \lim_{x\to 0} e^{1/\sin x} \ ; \quad \text{b) } \lim_{x\to 1} \arctan\left(\frac{x^x}{(x-1)^2}\right) \ ; \quad \text{c) } \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2\log x} \ ;$$

$$\text{d) } \lim_{x\to 0} \cos(\pi e^x) \ ; \quad \text{e) } \lim_{x\to\pi} \tan(x/2) \ ; \quad \text{f) } \lim_{x\to 0} \sin(\log x) \ ; \quad \text{g) } \lim_{x\to 0^+} \log(\sqrt{x}) \ .$$

2. Calcolare, al variare di $a \in \mathbb{R}$ i seguenti limiti:

$$\text{a) } \lim_{x\to 0} x^a \log x \ ; \quad \text{b) } \lim_{x\to+\infty} x^a e^x \ ; \quad \text{c) } \lim_{x\to+\infty} e^{ax}\log x \ ; \quad \text{d) } \lim_{x\to+\infty} \frac{(\log x)^a}{\log\log x} \ .$$

3. Calcolare i seguenti limiti:

$$\text{a) } \lim_{x\to\pi} \frac{1+\cos x}{\sin x} \ ; \quad \text{b) } \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^3)}{x^2} \ ; \quad \text{c) } \lim_{x\to+\infty} x(\pi - 2\arctan x) \ ;$$

$$\text{d) } \lim_{x\to 0^+} \log(2x) - \log x \ ; \quad \text{e) } \lim_{x\to\pi} \frac{\cos x}{\sin^2 x} \ ; \quad \text{f) } \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^3+2x^2-1}{-x^2+x+2} \ ;$$

$$\text{g) } \lim_{x\to+\infty} \frac{4^x}{1+3^x} \ ; \quad \text{h) } \lim_{x\to-\infty} \frac{4^x}{1+3^x} \ ; \quad \text{i) } \lim_{x\to+\infty} 2\log x - \log\log x \ .$$

4. Determinare lo sviluppo di Taylor (in 0) di ordine qualunque delle seguenti funzioni:

$$\text{a) } e^{2x} \ ; \quad \text{b) } e^{-x^2} \ ; \quad \text{c) } \frac{1}{1-x} \ ; \quad \text{d) } \frac{1}{1+x^2} \ ; \quad \text{e) } \arctan x \ .$$

5. Calcolare lo sviluppo di Taylor (in 0) all'ordine 3 di $(1+x)^a$ per ogni $a \in \mathbb{R}$.

6. Calcolare lo sviluppo di Taylor (in 0) all'ordine 6 delle seguenti funzioni:

$$\text{a) } \tan(x^2) \ ; \quad \text{b) } \sqrt{1+x^3} \ ; \quad \text{b) } \sin(x^2) - (\sin x)^2 \ ; \quad \text{d) } \sin(1-\cos(x^2)) \ .$$

7. Determinare la parte principale per $x \to 0$ delle seguenti funzioni:

$$\text{a) } e^{2x} - 1 \ ; \quad \text{b) } e^x + e^{-x} - 2 \ ; \quad \text{c) } \sin(x^4) - x^4 \ ; \quad \text{d) } \sqrt{1+x^2} - 1 \ ;$$

$$\text{e) } \frac{1}{\sin x} \ ; \quad \text{f) } \frac{1}{\cos x} - 1 \ ; \quad \text{g) } \frac{x^2}{2-x^2} \ ; \quad \text{h) } \sqrt{1+\frac{1}{x}} \ ; \quad \text{i) } (x-\sin x)^3 \ .$$

8. Determinare la parte principale per $x \to +\infty$ delle seguenti funzioni:

$$\text{a) } \frac{x+1}{x^2+2} \ ; \quad \text{b) } x\sin(1/x^2) \ ; \quad \text{c) } \sqrt{1+\frac{1}{x}} - 1 \ .$$

[*Un possibile approccio consiste nel considerate il cambio di variabile* $x = 1/t$ *e poi determinare con i metodi già visti la parte principale per* $t \to 0$ *della funzione di* t *così ottenuta.*]

9. Determinare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $f(x) := \dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x}$.

[*Scrivere* $f(x)$ *come un'unica frazione e calcolare separatamente le parti principali di numeratore e denominatore.*]

10. Determinare la parte principale per $x \to +\infty$ della funzione $f(x) := \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$
[*Mettere in evidenza* $\sqrt{x}$ *per ricondursi alla funzione nel punto c) dell'Esercizio 8.*]

11. Calcolare i seguenti limiti determinando le parti principali delle funzioni considerate:

$$\text{a) } \lim_{x\to 0} \frac{x\,\sin x}{1-\cos x}\ ; \quad \text{b) } \lim_{x\to +0} \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\ ; \quad \text{c) } \lim_{x\to +\infty} x \left[1 - \sqrt{1-\frac{1}{x}} \right] .$$

FOGLIO DI ESERCIZI N. 4 – 17/12/2006

1. Calcolare i seguenti integrali definiti utilizzando la tabella delle primitive elementari:
$$\text{a)} \int_0^2 e^x\,dx\ ; \quad \text{b)} \int_1^e \log x\,dx\ ; \quad \text{c)} \int_0^\pi \sin x\,dx\ ; \quad \text{d)} \int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2}\ .$$

2. Calcolare i seguenti integrali definiti utilizzando un cambio di variabile (a è un generico numero reale):
$$\text{a)} \int_0^2 e^{-x}\,dx\ ; \quad \text{b)} \int_0^\pi \sin(ax)\,dx\ ; \quad \text{c)} \int_0^1 (1+3x)^{-1/2}\,dx\ ; \quad \text{d)} \int_{-1}^1 \frac{dx}{1+4x^2}\ ;$$
$$\text{e)} \int_{-1}^1 x\,e^{1+x^2}\,dx\ ; \quad \text{f)} \int_0^1 \frac{\log^a x}{x}\,dx\ ; \quad \text{g)} \int_0^1 x^2\left(1+x^3\right)^a dx\ ; \quad \text{h)} \int_0^\pi \sin^3 x\,dx\ .$$

3. Calcolare i seguenti integrali definiti tramite un'integrazione per parti (a è un generico numero reale positivo):
$$\text{a)} \int_0^1 xe^x\,dx\ ; \quad \text{b)} \int_1^e (1+x)\log x\,dx\ ; \quad \text{c)} \int_0^\pi (1-x)^2 \sin x\,dx\ ; \quad \text{d)} \int_1^e \frac{\log x}{x^a}\,dx$$
.

4. Calcolare le seguenti primitive (a è un generico numero reale positivo):
$$\text{a)} \int x^2+e^{-x}\,dx\ ; \quad \text{b)} \int \sqrt{1-x}\,dx\ ; \quad \text{c)} \int \sqrt{1-4x^2}\,dx\ ; \quad \text{d)} \int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx\ ;$$
$$\text{e)} \int \log^2 x\,dx\ ; \quad \text{f)} \int \frac{x}{1+x^4}\,dx\ ; \quad \text{g)} \int \log(x^a)\,dx\ ; \quad \text{h)} \int \cos^3 x\,dx\ .$$

5. Calcolare i seguenti integrali definiti (a è un generico numero reale positivo):
$$\text{a)} \int_0^2 \log x\,dx\ ; \quad \text{b)} \int_0^\infty \frac{dx}{e^x}\ ; \quad \text{c)} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}\ ; \quad \text{d)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}\ ; \quad \text{e)} \int_1^\infty x^{-a}\,dx\ .$$

6. Calcolare la primitiva $\int \cos^2 x\,dx$. [*Usare l'identità* $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$.]

7. Calcolare la primitiva $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$. [*Usare il cambio di variabile* $x = \sin t$.]

8. Calcolare la primitiva $\int \sqrt{1+x^2}\,dx$. [*Usare il cambio di variabile* $x = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})$.]

9. Disegnare la figura piana A delimitata dai grafici delle funzioni $y = x^2 - 1$ e $y = 1 - x^2$ e calcolarne l'area.

10. Dimostrare che l'area dell'ellisse di semiassi a e b è uguale a πab.

11. Disegnare la figura piana A data dai punti (x, y) tali che $|y| \leq e^x$ e $x \leq 0$, e calcolarne l'area.

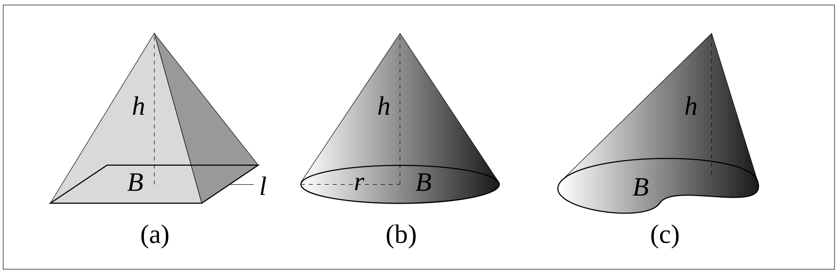
12. Disegnare la figura piana A data dai punti (x, y) tali che $1-\cos x \le y \le \cos x$ e $0 \le x \le 2\pi$, e calcolarne l'area.

13. a) Sia V una piramide retta con base quadrata B di lato l ed altezza h, cfr. la figura (a) immediatamente sotto. Dimostrare che il volume di V è dato dalla nota formula

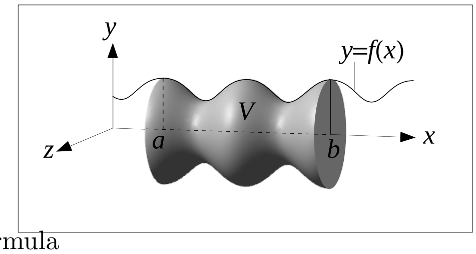
$$\mathrm{Vol}(V) = \frac{1}{3}\,\mathrm{Area}(B) \cdot h \ . \tag{1}$$

b) Dimostrare che la formula (1) vale anche per un cono retto, cfr. figura (b).

c) Dimostrare che la (1) vale anche per un cono con base non circolare, cfr. figura (c).



14 . Sia f una funzione positiva, e siano a, b numeri reali con $a < b$. Sia V il solido delimitato dalla superficie di rotazione ottenuta facendo ruotare il grafico $y = f(x)$ attorno all'asse x, e dai piani perpendicolari all'asse delle x passanti per il punto di ascissa a ed il punto di ascissa b (si veda la figura accanto).



a) Dimostrare che il volume di V è dato dalla formula

$$\mathrm{Vol}(V) = \pi \int_a^b \big(f(x)\big)^2\, dx \ . \tag{2}$$

b) Calcolare esplicitamente il volume di V nel caso in cui $f(x) := 2+\cos x$, $a := 0$, $b := 2\pi$.

c) Usare la formula (2) per calcolare il volume della sfera di raggio r.

d) Usare la formula (2) per calcolare il volume del cono retto di altezza h e raggio di base r.

Foglio di esercizi n. 5 – 26/12/2006

1. Risolvere le seguenti equazioni differenziali del primo ordine a variabili separabili:
$$\text{a) } \dot y = \frac{t}{y}\ ;\quad \text{b) } \dot y = y^2+1\ ;\quad \text{c) } \dot y = e^{t+y}\ ;\quad \text{d) } \dot y = y\cos t\ ;\quad \text{e) } \dot y = t^2y^2\ .$$

2. Per ciascuna delle equazioni differenziali nell'esercizio precedente trovare la soluzione che soddisfa la condizione iniziale $y(0)=1$.

3. Risolvere le seguenti equazioni differenziali lineari del primo ordine:
$$\text{a) } \dot y - 2ty = 0\ ;\quad \text{b) } \dot y + 2ty = 4t\ ;\quad \text{c) } \dot y + \frac{y}{t} = 4t^2\ ;\quad \text{d) } \dot y - y = e^t\ .$$

4. Per ciascuna delle equazioni differenziali nell'esercizio precedente trovare la soluzione che soddisfa la condizione iniziale $y(1)=2$.

5. Per ciascuna delle seguenti equazioni differenziali lineari omogenee a coefficienti costanti, scrivere il polinomio caratteristico, trovarne le radici, e quindi risolvere l'equazione:
$$\text{a) } \dot y + 2y = 0\ ;\quad \text{b) } \dot y - 3y = 0\ ;\quad \text{c) } \ddot y - 3\dot y + 2y = 0\ ;\quad \text{d) } \ddot y - 2\dot y - 3y = 0\ ;$$
$$\text{e) } \ddot y + 2\dot y + 5y = 0\ ;\quad \text{f) } \ddot y + 9y = 0\ ;\quad \text{g) } \ddot y + 4\dot y + 4y = 0\ ;\quad \text{h) } \ddot y - 4y = 0\ .$$

6. Risolvere i seguenti problemi ai dati iniziali:
$$\text{a) } \begin{cases} \dot y + y = 0 \\ y(0) = 2 \end{cases} ;\quad \text{b) } \begin{cases} \ddot y - 4y = 0 \\ y(0) = 2 \\ \dot y(0) = 0 \end{cases} ;\quad \text{c) } \begin{cases} \ddot y + y = 0 \\ y(0) = -2 \\ \dot y(0) = 1 \end{cases} ;\quad \text{d) } \begin{cases} \ddot y + 2\dot y + y = 0 \\ y(0) = 1 \\ \dot y(0) = 0 \end{cases} .$$

7. Dire per quali valori del parametro λ la funzione $y(t) := t^\lambda$ risolve l'equazione differenziale
$$\ddot y - \frac{2\dot y}{t} + \frac{2y}{t^2} = 0\ .$$

8. Dire per quali valori del parametro a la funzione $y(t) := ae^t$ risolve l'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti non omogenea
$$\ddot y - \dot y - 2y = 4e^t\ .$$

9. Dire per quali valori del parametro a la funzione $y(t) := ate^t$ risolve l'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti non omogenea
$$\ddot y + \dot y - 2y = e^t\ .$$

10. Si consideri l'equazione differenziale lineare non omogenea del primo ordine
$$\dot y + 4y = 16t \tag{1}$$
a) Trovare una soluzione particolare di (1). [*Cercare* $\bar y$ *della forma* $\bar y(t) = at + b$.]
b) Trovare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata alla (1).

c) Trovare tutte le soluzioni della (1).
d) Trovare la soluzione della (1) che soddisfa la condizione iniziale $y(0) = 1$.

11. Si consideri l'equazione differenziale lineare non omogenea del secondo ordine

$$\ddot{y} + y = e^{-2t} \tag{2}$$

a) Trovare una soluzione particolare di (2). [*Cercare* $\bar{y}$ *della forma* $\bar{y}(t) = ae^{-2t}$.]
b) Trovare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata alla (2).
c) Trovare tutte le soluzioni della (2).
d) Trovare la soluzione della (2) che soddisfa le condizioni iniziali $y(0) = 1$ e $\dot{y}(0) = 0$.

12. Si consideri l'equazione differenziale lineare non omogenea del secondo ordine

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + 2y = \sin t \tag{3}$$

a) Trovare una soluzione particolare di (3). [*Cercare* $\bar{y}$ *della forma* $\bar{y}(t) = ae \sin t + b \cos t$.]
b) Trovare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata alla (3).
c) Trovare tutte le soluzioni della (3).

13. Si consideri l'equazione differenziale lineare omogenea del secondo ordine a coefficienti non costanti

$$\ddot{y} + \frac{\dot{y}}{t} - \frac{4y}{t^2} = 0 \tag{4}$$

a) Trovare le soluzioni della (4) della forma $y(t) = t^\lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.
b) Trovare tutte le soluzioni della (4).

14. Risolvere i seguenti problemi ai dati iniziali:

$$\text{a)} \begin{cases} \dot{y} = y \cos t \\ y(0) = 1 \end{cases} ; \quad \text{b)} \begin{cases} \ddot{y} - y = t \\ y(0) = 1 \\ \dot{y}(0) = 0 \end{cases} ; \quad \text{c)} \begin{cases} \dot{y} + 2ty = 0 \\ y(0) = 2 \end{cases} ; \quad \text{d)} \begin{cases} \dot{y} = 3t^2(1 + y^2) \\ y(0) = 1 \end{cases} .$$

FOGLIO DI ESERCIZI N. 6 – 5/3/2007

1. a) Quante sigle diverse di 4 caratteri posso scrivere usando solo le lettere A, B, C, D, E, F?
   b) Delle sigle di cui al punto a), quante sono quelle che non contengono due lettere uguali?
   c) Delle sigle di cui al punto a), quante sono quelle che non contengono due lettere uguali consecutive?

2. a) Quanti sono i numeri interi di 4 cifre di cui la prima non è zero?
   b) Tra questi, quanti sono quelli che non contengono due cifre uguali consecutive?

3. a) Quanti sono i numeri interi di 3 cifre distinte scelte tra $1, 2, \dots, 7$?
   b) Tra questi, quanti sono quelli le cui cifre sono in ordine crescente (da sinistra a destra)? [*Si noti che prese tre cifre distinte c'è un solo modo di disporle in ordine crescente.*]

4. Si considerino tutte le possibili sigle date da 2 lettere (prese dall'alfabeto italiano di 21 lettere) seguite da 4 cifre (scelte tra $1, 2, \dots, 9$).
   a) Quante sono tali sigle?
   b) Tra tali sigle, quante sono quelle con lettere diverse?
   c) Tra tali sigle, quante sono quelle con lettere diverse e cifre?
   d) Quante sono le sigle che contengono 2 lettere e 4 cifre (ma non necessariamente disposte in quest'ordine)?

5. a) Quanti sono i numeri interi n compresi tra 1 e 999 tali che ogni cifra è strettamente maggiore della successiva (leggendo da sinistra a destra)?
   b) Come sopra, supponendo però che n sia compreso tra 1 e 671.

6. Ho 9 palline numerate da uno a nove, e voglio suddividerle in tre gruppi, il primo di 4 palline, il secondo di 3 ed il terzo di 2. In quanti modi diversi posso farlo?

7. Siano dati tre numeri interi positivi n_1, n_2, n_3, e si ponga $n := n_1 + n_2 + n_3$. In quanti modi diversi posso ripartire n oggetti distinti in tre gruppi, in modo che il primo gruppo ne contenga n_2, il secondo n_2 ed il terzo n_3? [*Si proceda scegliendo prima n_1 oggetti tra gli n dati e poi scegliendo n_2 oggetti tra gli $n - n_1$ rimasti, contando in quanti modi diversi può essere fatta ciascuna operazione.*]

8. a) Quanti numeri diversi posso scrivere utilizzando solo la cifra due per 3 volte e la cifra sette per 5 volte?
   b) Quanti numeri diversi posso scrivere utilizzando solo la cifra due per 3 volte, la cifra sette per 3 volte e la cifra otto per 2 volte?

9. Dato n intero positivo, si considerino tutte le sequenze di n lettere prese tra A, B, C, D, E che soddisfano le seguenti condizioni: le lettere A e B sono sempre seguite da B, C o D, mentre C, D ed E sono seguite da A, D o E. Quante sono tali sequenze?

10. Calcolare la probabilità che, tirando due dadi, la somma sia: a) 3; b) 6; c) 10.

11. In un sacchetto sono contenute 8 biglie bianche e 4 nere.
    a) Se ne estraggono due; qual è la probabilità che siano entrambe bianche?
    b) Se ne estraggono tre; qual è la probabilità che siano due nere ed una bianca?

12. Si estraggono a caso 5 numeri tra quelli compresi tra 1 e 90 (estrazione del lotto).
a) Qual è la probabilità che i numeri siano $1, 2, 3, 4, 5$ (non necessariamente in questo ordine)?
b) Qual è la probabilità di ottenere una data altra cinquina, ad esempio $21, 28, 47, 62, 86$?
c) Qual è la probabilità che tra i cinque numeri ci siano $1, 2, 3$?
d) Qual è la probabilità che tra i cinque numeri ci sia 1?

13. Si estraggono 4 carte a caso da un mazzo di 52.
a) Qual è la probabilità che siano i quattro assi (poker d'assi)?
b) Qual è la probabilità che siano dello stesso valore (poker)?
c) Qual è la probabilità che siano dello stesso segno (colore)?
d) Qual è la probabilità che siano due di un valore e due di un altro (doppia coppia)?

14. Tirando tre dadi, quale somma è più probabile ottenere, e con quale probabilità?

15. Si estraggono 3 carte da un mazzo di 52.
a) Qual è la probabilità che escano il due, il tre ed il cinque di cuori in quest'ordine preciso?
b) Qual è la probabilità che escano il due, il tre ed il cinque di cuori anche se non in quest'ordine?
c) Qual è la probabilità che escano un due, un tre ed un cinque in quest'ordine?

16. Un sacchetto contiene 5 biglie nere ed un certo numero di biglie bianche. A esperimenti fatti si sa che estraendo a caso due biglie la probabilità che almeno una sia bianca è $P = 9/11$. Quante sono le biglie bianche?

17. Si estraggono due numeri a caso da un sacchetto che contiene tutti gli interi da 1 a 90.
a) Qual è la probabilità che i due numeri siano consecutivi?
b) Qual è la probabilità che il primo numero estratto sia il doppio del secondo?
c) Qual è la probabilità che i due numeri siano uno il doppio dell'altro?

18. Lanciando due dadi, qual è la probabilità di ottenere come somma 10 o più?

19. Si costruiscono due dadi uguali a forma di parallelepipedo con base quadrata ed altezza leggermente diversa dal lato di base (quindi non sono cubi). Sulle due basi quadrate di ciascun dado ci sono i numeri $5, 6$ e sulle altre quattro facce i numeri $1, 2, 3, 4$. Tirando i due dadi più volte, si osserva che la probabilità di ottenere una somma pari ad 10 o più è esattamente $3/10$. Qual è la probabilità di ottenere 6 lanciando un solo dado?

20. Calcolare la probabilità che lanciando 10 monete si verifichino i seguenti eventi:
a) escono esattamente 6 teste;
b) escono almeno 9 teste;
c) escono almeno 2 teste;
d) escono almeno 5 teste.

FOGLIO DI ESERCIZI N. 7 – 9/3/2007

1. Dato l'insieme degli eventi elementari $X := \{a, b, c, d, e\}$ e due numeri reali p, q, si ponga $P(a) = P(b) := p$ e $P(c) = P(d) = P(e) := q$.
   a) Se $p = 1/4$, per quali q la funzione P definisce una distribuzione di probabilità su X?
   b) Per quali valori di p e q la funzione P definisce una distribuzione di probabilità su X?

2. Sia X l'insieme dei numeri interi compresi tra 1 e 24 (inclusi), e si ponga $P(x) = 1/36$ per ogni x pari e $P(x) = 1/18$ per ogni x dispari. Verificare che P è effettivamente una distribuzione di probabilità su X e calcolare la probabilità dei seguenti eventi:

   a) $\{x \text{ è dispari}\}$; b) $\{x \text{ è pari}\}$; c) $\{x = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;
   d) $\{x \text{ è un multiplo di } 4\}$; e) $\{x \text{ è un multiplo di } 6\}$.

3. Per ogni coppia di eventi elencati nell'Esercizio 2, dire quali sono quelli indipendenti.

4. Descrivere una situazione "reale" in cui lo spazio degli eventi elementari e la relativa distribuzione di probabilità sono quelle descritte nell'Esercizio 2.

5. Sia X uno spazio di eventi elementari finito dotato di una distribuzione di probabilità P, e siano A e B due eventi non elementari (cioè due sottoinsiemi di X).
   a) In quali casi A è indipendente da se stesso?
   b) Sapendo che B è contenuto in A, in quali casi A e B sono indipendenti?

6. Sia X uno spazio di eventi elementari finito dotato della distribuzione di probabilità P, e siano A, B due eventi non elementari; al solito, indichiamo con A^c l'evento complementare di A e cioè $A^c := \{x \in X : \ x \notin A\}$. Dimostrare che:
   a) $P(A^c) = 1 - P(A)$;
   b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$;
   b) se A e B sono disgiunti allora $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$;
   d) $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$;
   e) se A e B sono indipendenti allora anche A^c e B^c sono indipendenti.

7. Sia X l'insieme di tutte le possibili sigle composte da 5 lettere dell'alfabeto italiano (che conta 21 lettere in totale), dotato della probabilità uniforme. Calcolare la probabilità dei seguenti insiemi (eventi):

   a) sigle che iniziano con le lettere AE; b) sigle che terminano per Z;
   c) sigle che non contengono vocali; d) sigle con lettere tutte diverse.

8. Per ogni coppia di eventi elencati nell'Esercizio 7, dire quali sono quelli indipendenti.

9. Su tre facce di un dado perfettamente cubico è riportata la lettera a, su due la lettera b e sull'ultima la lettera c. Quale insieme di eventi elementari e quale distribuzione di probabilità conviene usare per descrivere i lanci di questo dado?

10. Si lanciano un dado ed una moneta. Quale insieme di eventi elementari e quale distribuzione di probabilità conviene usare per descrivere i risultati di tali lanci?

11. Si lanciano due dadi uguali a quello descritto nell'Esercizio 9. Quale insieme di eventi elementari e quale distribuzione di probabilità conviene usare per descrivere i risultati di tali lanci?

12. Dati due insiemi X e Y con n ed m elementi rispettivamente, indichiamo con Z l'insieme di tutte le coppie (x, y) con $x \in X$ ed $y \in Y$ (tale insieme viene chiamato *prodotto di X e Y* ed indicato di solito con il simbolo $X \times Y$). Dotiamo Z della probabilità uniforme. Inoltre, presi $x_0 \in X$ e $y_0 \in B$, indichiamo con $A(x_0)$ l'insieme delle coppie $(x, y) \in Z$ per cui $x = x_0$, e con B l'insieme delle coppie per cui $y = y_0$.
    a) Calcolare la probabilità di ogni evento elementare (x, y);
    b) Calcolare la probabilità di A e di B;
    c) Dimostrare che A e B sono indipendenti.

13. Siano X e Y spazi di eventi elementari con distribuzioni di probabilità P_X e P_Y, rispettivamente, e prendiamo Z, x_0, y_0, A e B come nell'Esercizio 12. Per ogni $(x, y) \in Z$ poniamo $P(x, y) = P_X(x) \cdot P_Y(y)$. Dimostrare i seguenti enunciati:
    a) P è una distribuzione di probabilità su Z;
    b) A e B sono eventi indipendenti rispetto a P a prescindere dalla scelta di x_0 e y_0;
    c) Data una distribuzione di probabilità P' su Z tale che A e B sono indipendenti rispetto a P' per ogni possibile scelta di x_0 e y_0, allora P' è uguale a P.

14. Dato n intero positivo e k intero compreso tra 0 e n, indichiamo con $P_{n,k}$ la probabilità di ottenere k teste lanciando n monete. Dimostrare i seguenti enunciati utilizzando la nota formula per $P_{n,k}$:
    a) $P_{n,k} = P_{n,n-k}$;
    b) $P_{n,k-1} < P_{n,k}$ per ogni k tale che $1 \leq k \leq n/2$;
    c) $P_{n,k} < P_{n,n/2}$ per ogni k diverso da $n/2$ (chiaramente si suppone che n sia pari);
    d) $P_{n,n/2}$ tende a 0 quando $n \to +\infty$;
    e) fissato un qualunque intero positivo m, la probabilità che il numero di teste sia compreso tra $n/2 - m$ ed $n/2 + m$ tende a 0 quando $n \to +\infty$;
    f) fissato un qualunque numero reale positivo δ, la probabilità che il numero di teste sia compreso tra $(1/2 - \delta)n$ ed $(1/2 + \delta)n$ tende a 1 quando $n \to +\infty$.
    [*Per i punti d), e), f) può servire la formula di Stirling per il fattoriale:* $n! \sim \sqrt{2\pi n}\,(n/e)^n$.]

15. Da due statistiche fatta sugli abitanti adulti del centro e della periferia della città di K risulta che tra i primi il 50% possiede un'auto, mentre tra i secondi tale percentuale sale al 90%. Si sa inoltre che gli abitanti della periferia sono 5 volte quelli del centro. Del signor R si sa solo che possiede un'auto; qual è allora la probabilità che viva in centro? [*Si suggerisce di usare la formula di Bayes.*]

FOGLIO DI ESERCIZI N. 8 – 12/3/2007

1. Si consideri l'insieme di eventi elementari $X := \{a, b, c, d, e\}$ con la distribuzione di probabilità $P(a) = P(b) := 1/4$ e $P(c) = P(d) = P(e) := 1/6$. Su X è data la variabile aleatoria Y definita da $Y(a) = Y(b) = Y(c) := -1$ e $Y(d) = Y(e) := 3$.
a) Quali sono i valori assunti da Y?
b) Qual è la distribuzione di probabilità associata ai valori di Y?
c) Calcolare il valor medio e la varianza di Y.

2. Si consideri l'insieme di eventi elementari $X := \{1, 2, 3, 4\}$ con la distribuzione di probabilità uniforme. Su X sono definite come segue le variabili aleatorie Y_1 e Y_2: $Y_1(1) = Y_1(2) := 1$ e $Y_1(3) = Y_1(4) := -1$; $Y_2(1) := 2$, $Y_2(2) := a$, $Y_2(3) := -2$ e $Y_2(4) := -a$, dove a è un numero reale assegnato.
a) Calcolare valor medio e varianza sia per Y_1 che per Y_2.
b) Calcolare la covarianza di Y_1 e Y_2.
c) Dire per quali valori di a le variabili aleatorie Y_1 e Y_2 sono indipendenti.

3. Sia Y la variabile aleatoria data dalla somma del lancio di due dadi.
a) Quali sono i valori assunti da Y?
b) Qual è la distribuzione di probabilità associata ai valori di Y?
c) Calcolare il valor medio e la varianza di Y.

4. Sia X uno spazio di eventi elementari finito con distribuzione di probabilità P. Data Y variabile aleatoria su X e c un numero reale, indichiamo con Y^2, cY e $Y + c$ le variabili aleatorie ottenute rispettivamente elevando la funzione Y al quadrato, moltiplicando Y per c e sommando Y a c rispettivamente. Dimostrare che:
a) $\mathrm{E}(Y + c) = \mathrm{E}(Y) + c$ e $\mathrm{E}(cY) = c\mathrm{E}(Y)$;
b) $\mathrm{Var}(Y + c) = \mathrm{Var}(Y)$ e $\mathrm{Var}(cY) = c^2\mathrm{Var}(Y)$;
c) $\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Cov}(Y; Y)$;
d) $\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{E}(Y^2) - (\mathrm{E}(Y))^2$;
e) $\mathrm{Var}(Y) = 0$ se e solo se Y assume un qualche valore con probabilità 1.

5. La variabile aleatoria Y assume i valori 1 e 0 con probabilità p e $1-p$ rispettivamente, dove p è un numero reale compreso tra 0 e 1 (densità di Bernoulli). Calcolare il valor medio e la varianza di Y.

6. La variabile aleatoria Y assume i valori $1, 2, \ldots, 6$ con probabilità uniforme $1/6$. Calcolare il valor medio e la varianza di Y.

7. La variabile aleatoria Y assume i valori $1, 2, \ldots, n$ con probabilità uniforme $1/n$. Calcolare il valor medio e la varianza di Y. [*Possono servire le seguenti formule:* $1 + 2 + \cdots + n = n(n + 1)/2$ *e* $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = n(n + 1)(2n + 1)/6$.]

8. Sia Y la variabile aleatoria data dalla somma dei risultati che si ottengono lanciando un dado 6 volte. Calcolare il valor medio e la varianza di Y. [*Si suggerisce di scrivere Y come somma di variabili aleatorie indipendenti più semplici.*]

9. Sia Y la variabile aleatoria data dal numero di teste che si ottengono lanciando 5 monete.
a) Quali sono i valori assunti da Y?

b) Qual è la distribuzione di probabilità associata ai valori di Y?

c) Calcolare il valor medio e la varianza di Y. [*Si suggerisce di scrivere Y come somma di variabili aleatorie indipendenti più semplici.*]

10. Due giocatori A e B tirano tre monete, stabilendo che se vengono tre teste A riceve 3 euro da B, se vengono due teste A riceve 1 euro da B e negli altri casi A paga 2 euro a B. Qual è la vincita media di A?

11. Due giocatori A e B estraggono a caso una biglia da un sacchetto che ne contiene 10 bianche e 5 nere, stabilendo che se viene nera allora A riceve 2 euro da B mentre se viene bianca B riceve 1 euro da A.
    a) Qual è la vincita media di A?
    b) Qual è la vincita media di A se si fanno due estrazioni invece di una, e prima della seconda estrazione si rimette nel sacchetto la biglia estratta in precedenza?
    c) Qual è la vincita media di A se si fanno due estrazioni e non si rimette nel sacchetto la biglia estratta?

12. In un gioco a premi, il concorrente vince il premio scritto in un bussolotto estratto a caso da una scatola. Questa scatola contiene 90 bussolotti con una vincita di 1 euro, 9 con una vincita di 10 euro, ed 1 con una vincita di 800 euro. Qual è la vincita media?

13. In una variante del gioco descritto nell'Esercizio 12, al concorrente viene data la possibilità, sapendo il risultato dell'estrazione, di accettare quanto ha vinto oppure di chiedere la ripetizione dell'estrazione. A questo punto sono possibili diverse strategie: i) non chiedere mai la ripetizione, ii) chiedere la ripetizione se la prima estrazione dà una vincita di 1 euro, iii) chiedere la ripetizione se la prima estrazione dà una vincita di 1 o di 10 euro.
    a) Calcolare la vincita media per ciascuna strategia e stabilire quella ottimale.
    b) Cosa cambia se nel fare la seconda estrazione non viene reinserito nella scatola il bussolotto estratto in precedenza?

14. Date due variabili aleatorie Y e Z, dimostrare che:
    a) se $\mathrm{E}(Y) = 0$ allora $\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{E}(Y^2)$;
    b) se Y e Z sono indipendenti allora Y^2 e Z^2 sono indipendenti;
    b) se Y e Z sono indipendenti e $\mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}(Z) = 0$ allora $\mathrm{Var}(YZ) = \mathrm{Var}(Y) \cdot \mathrm{Var}(Z)$.

15. Su quattro facce di un dado è scritta la lettera a, mentre sulle altre due è scritta la lettera b. Per ogni intero positivo n, la variabile aleatoria Y_n indica quante a sono ottenute lanciando il dado n volte. Calcolare la media e la varianza di Y_n per ogni n.

FOGLIO DI ESERCIZI N. 9 – 30/3/2007

1. Si consideri come spazio degli eventi elementari l'intervallo $X := [0, 2]$. Dire per quali valori dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$ le seguenti funzioni sono delle distribuzioni di probabilità su X:

   a) $ax + b$; b) $ax^2 + b$; c) ax^b ; d) $-\log(ax)$; e) $a - \log x$.

2. Si consideri come spazio degli eventi elementari la semiretta $X := [0, +\infty)$. Dire per quali valori dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$ le seguenti funzioni sono distribuzioni di probabilità su X:

   a) e^{ax} ; b) be^{ax} ; c) $e^{ax} + b$; d) $ax^2 + b$; e) $\dfrac{a}{x^2}$; f) $\dfrac{1}{a^2 + x^2}$.

3. Si consideri la probabilità uniforme sullo spazio degli eventi elementari $X := [0, 2]$. Calcolare il valor medio e la varianza delle seguenti variabili aleatorie:

   a) x ; b) $2x + 1$; c) x^2 ; d) $3x^2 - 2$; e) 2^x ; f) $\sin(\pi x)$.

4. Sulla semiretta $X := [0, +\infty)$ si consideri la probabilità definita dalla densità e^{-x}.
   a) Qual è la probabilità che un numero x preso a caso in X sia inferiore a 1?
   b) Dato a numero reale positivo, si calcoli la probabilità che un numero x preso a caso in X sia inferiore ad a, e quindi trovare a per cui tale probabilità è uguale a 1/2.

5. Si prendono due numeri a caso x e y compresi tra 0 e 2. Calcolare la probabilità dei seguenti eventi:
   a) i numeri x e y sono entrambi minori di 1;
   b) la somma $x + y$ è minore di 1;
   c) il prodotto xy è minore di 1.
   [*Suggerimento: disegnare il quadrato dei punti* (x, y) *tali che* $0 \le x \le 2$ *e* $0 \le y \le 2$, *e quindi disegnare il sottoinsieme dei punti che soddisfano quanto richiesto in ciascun caso.*]

6. Dieci amici hanno le seguenti età (espresse in anni): 19, 20, 20, 18, 20, 22, 20, 25, 24, 22. Calcolare l'età media, la varianza e la classe mediana.

7. Gli unici dati a disposizione sull'età dei dipendenti di una certa ditta sono i seguenti:
   età inferiore a 20 anni: nessun dipendente;
   età compresa tra 21 e 30 anni: 2 dipendenti;
   età compresa tra 31 e 40 anni: 15 dipendenti;
   età compresa tra 41 e 50 anni: 19 dipendenti;
   età compresa tra 51 e 55 anni: 10 dipendenti;
   età compresa tra 56 e 60 anni: 9 dipendenti;
   età compresa tra 61 e 65 anni: 8 dipendenti;
   età superiore a 66 anni: nessun dipendente.
   a) Calcolare l'età media dei dipendenti supponendo che la distribuzione delle età all'interno di ciascun gruppo sia uniforme.
   b) Cosa si può dire di *certo* sull'età media dei dipendenti senza fare alcuna ipotesi sulla distribuzione delle età all'interno di ciascun gruppo?

8. Viene fatta una statistica del numero di incidenti d'auto che vedono coinvolti durante l'anno gli abitanti di un paese. I risultati sono riassunti nella seguente tabella:
   nessun incidente: 94% degli abitanti;
   un incidente: 5% degli abitanti;

due incidenti: 1% degli abitanti.

Calcolare il numero medio di incidenti per abitante e la varianza.

9. Supponiamo di sapere che all'interno di una certa popolazione l'altezza degli uomini adulti misurata in cm ha una varianza pari a 100 (cm^2). Vogliamo determinare l'altezza media della popolazione partendo da un campione di n elementi scelto a caso. Quanto dev'essere grande n per garantire con probabilità superiore al 95% che l'altezza media del campione differisce da quella della popolazione per meno di 1 (cm)?

10. Si lancia una moneta n volte e si osserva che esce testa nel 60% dei casi. Chiaramente, più è grande n e più è probabile che si tratti di una moneta truccata. Per i seguenti valori di n dare una stima dal basso della probabilità che la moneta sia truccata:

    a) $n = 10$; b) $n = 100$; c) $n = 1000$; d) $n = 10000$.

11. Un medicinale consigliato contro una certa malattia è efficace in una percentuale p (da determinare) di casi. Supponiamo di testarlo su un campione di n malati scelti a caso. Quanto si deve prendere grande n per essere sicuri (al 90%) che la percentuale p_n di malati nel campione per cui il farmaco si è rivelato efficace approssimi p con errore inferiore al 5%?

FOGLIO DI ESERCIZI N. 10 – 31/3/2007

1. Calcolare somma, prodotto scalare e norme per ciascuna delle seguenti coppie di vettori:

   a) $(1,0)$ e $(2,3)$; b) $(1,0,2,1)$ e $(-1,2,-3,4)$; c) $(0,a,-2a)$ e $(3,2,1)$.

2. Calcolare l'angolo compreso tra i vettori $(1,0,2,0)$ e $(3,-1,1,-3)$.

3. Per quali valori del parametro reale a le seguenti coppie di vettori sono ortogonali:

   a) $(a,2)$ e $(1,2-a)$; b) $(1,a,a+2)$ e $(a,a-1,1-a)$.

4. Calcolare la somma $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ -4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

5. Calcolare il prodotto $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

6. Calcolare $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

7. Calcolare il determinante, la matrice dei cofattori e l'inversa di $A := \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$.

8. Calcolare il determinante, la matrice dei cofattori e l'inversa di $A := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

9. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la matrice $A := \begin{pmatrix} -3 & a \\ 1-a & 2 \end{pmatrix}$ è invertibile, e calcolarne l'inversa.

10. Calcolare l'area del triangolo di vertici $(0,0)$, $(2,1)$ e $(1,2)$. [*Si tratta di metà dell'area del parallelogrammo costruito a partire dai vettori* $(2,1)$ *e* $(1,2)$*, e quest'ultima è uguale al valore assoluto del determinante di un'opportuna matrice.*]

11. Calcolare l'area del triangolo di vertici $(-2,3)$, $(2,1)$ e $(1,2)$.

12. Una matrice quadrata A di dimensioni $n \times n$ si dice diagonale se $A_{ij} = 0$ per tutte le coppie di indici i, j tali che $i \neq j$ (in altre parole, vedendo la matrice come una tabella quadrata, i coefficienti sono tutti uguali a zero tranne quelli sulla diagonale che va dall'angolo in alto a sinistra a quello in basso a destra).

    Dimostrare per $n = 2, 3, 4$ che il determinante di una matrice diagonale è uguale al prodotto dei coefficienti sulla diagonale (in realtà questo è vero per ogni intero n).

13. Scrivere in forma matriciale $Ax = b$ il seguente sistema di quattro equazioni (lineari) in

quattro incognite

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\ 5x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 1 \end{cases} .$$

14. a) Scrivere in forma matriciale $Ax = b$ il seguente sistema di tre equazioni (lineari) in tre incognite

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3 = 0 \\ 2 - x_1 + x_2 = 4 \\ x_2 = x_1 - x_3 \end{cases} .$$

b) Calcolare l'inversa di A e risolvere il sistema.