Università di Pisa
Corso di laurea in Matematica

Appunti ed esercizi per il corso di

Calcolo Differenziale e Integrazione

a.a. 2003/04

Giovanni Alberti

Giovanni Alberti
Dipartimento di Matematica
Università di Pisa
largo Pontecorvo 5
56127 Pisa
www.dm.unipi.it/~alberti

Introduzione

Questa è una raccolta di appunti per i corsi di "Calcolo Differenziale" e "Integrazione" dell'anno accademico 2003-04. Sono intesi come complemento, per alcuni particolari argomenti, del libro di testo. Per quanto mi sia sforzato di evitarlo, ho inevitabilmente omesso alcune delle definizioni più standard. Le dimostrazioni sono spesso solo accennate, ed i dettagli lasciati come esercizio. L'asterisco * indica gli esercizi *presumibilmente* difficili.
Nella lista sottostante sono riportati in corsivo gli argomenti non fondamentali.

Programma di Calcolo Differenziale

1. Successioni di punti nello spazio n-dimensionale. Convergenza delle successioni di Cauchy, Teorema di Bolzano-Weierstrass.
2. Insiemi aperti, chiusi, compatti, densi; frontiera. Funzioni di n variabili reali: definizione di limite e continuità, proprietà delle funzioni continue, esistenza di massimo e minimo su insiemi compatti, uniforme continuità. Funzioni a valori vettoriali (mappe).
3. Derivate parziali di una funzione di n variabili, gradiente. Differenziabilità e sviluppo di Taylor all'ordine 1. Teorema del differenziale totale. Derivate parziali seconde e matrice Hessiana, teorema di Schwartz, sviluppo di Taylor all'ordine 2. Mappe derivabili. Regole di calcolo delle derivate.
4. Massimi, minimi e punti critici. Forme quadratiche, segnatura, condizioni necessarie e sufficienti di massimalità e minimalità locale.
5. *Funzioni convesse.*
6. Integrale secondo Riemann-Peano-Jordan di una funzione limitata (integrali multipli). Calcolo degli integrali: teorema di Fubini, formula di cambio di variabile. Integrabilità delle funzioni continue. Approssimazione con somme finite. Misura di un insieme limitato. L'integrale come volume del sottografico.
7. *Topologia in spazi metrici, completezza e compattezza, equivalenze delle diverse definizioni di continuità. Connessione e connessione per archi.*
8. Teorema delle contrazioni. Norma del sup e completezza dello spazio delle funzioni continue. Completezza dello spazio delle funzioni k-derivabili. Serie di funzioni e serie di potenze.
9. Sistemi di equazioni differenziali del primo ordine: teorema di esistenza e unicità della soluzione del problema di Cauchy in ipotesi generali. Teorema di esistenza e unicità per equazioni differenziali di ordine k.
10. Classi di equazioni differenziali risolubili esplicitamente (equazioni a variabili separabili, di Eulero, di Bernoulli, ecc.).
11. Equazioni lineari di ordine k. Struttura dello spazio delle soluzioni. Soluzione esplicita delle equazioni omogene a coefficienti costanti. Metodo di riduzione dell'ordine. Metodo di variazione delle costanti. Teorema degli annichilatori.

Programma di Integrazione

12. Sistemi di equazioni lineari del primo ordine. Esponenziale di matrici e metodi di calcolo.
13. Lemma di Gronwall e teoremi di confronto. Studio qualitativo delle soluzioni delle equazioni differenziali non lineari.
14. *Completezza: Teorema di Baire ed applicazioni.*

15. *Equivalenza delle diverse definizioni di compattezza in spazi metrici. Teorema di Ascoli-Arzelà. Teorema di Peano per le equazioni differenziali ordinarie.*
16. Curve e superfici come equazioni: struttura geometrica dell'insieme delle soluzioni di un sistema di k equazioni in n incognite: il teorema della funzione implicita (teorema del Dini).
17. Teorema di invertibilità locale per le funzioni vettoriali.
18. Spazio tangente ad un insieme in un punto. Spazio tangente ad una superficie definita tramite equazioni. Massimi e minimi di una funzione differenziabile su una superficie definita tramite equazioni. Metodo dei moltiplicatori di Lagrange.
19. Curve in forma parametrica. Curve regolari: retta tangente ed orientazione. Definizione intrinseca di lunghezza e formula per il calcolo. Lavoro di un campo di vettori lungo una curva. Calcolo per curve parametrizzate.
20. Potenziale di un campo di vettori. Calcolo del potenziale. Condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza del potenziale.
21. I grafici di funzioni reali come ipersuperfici. Piano tangente ed orientazione. Formula dell'area (e giustificazione per funzioni affini). Flusso di un campo di vettori.
22. Teorema della divergenza. Teorema di Gauss-Green.
23. Superfici parametrizzate regolari nello spazio. Prodotto vettoriale nello spazio. Piano tangente ed orientazione. Calcolo dell'area. Flusso di un campo di vettori. Rotore di un campo di vettori. Teorema di Stokes (senza dimostrazione). *Potenziale vettore.*
24. Serie di Fourier reale e complessa per funzioni di una variable 2π-periodiche. Teorema di convergenza totale della serie di Fourier per funzioni di classe C^1. Estensioni del teorema di convergenza.
25. *Derivazione dell'equazione del calore in dimensione qualunque, e dell'equazione delle onde in dimensione (spaziale) uguale a uno. Soluzione dell'equazione del calore e delle onde in dimensione uno con condizioni di periodicità al bordo tramite serie di Fourier (separazione delle variabili).*

Capitolo 1. Sviluppi di Taylor per funzioni in più variabili

[versione: 22 dicembre 2003]

1.1. Definizione. - Un polinomio di n variabili reali $x_1, \dots, x_n$ è una qualunque funzione della forma
$$P(x) := \sum_{(i_1,\dots,i_n)} a_{i_1\dots i_n} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$$
dove la somma viene fatta su tutti i (multi-) indici $(i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^n$, ed i coefficienti $a_{i_1\dots i_n}$ sono nulli tranne che per un numero finito di indici. Il grado del polinomio è il massimo valore della somma $i_1 + \dots + i_n$ per cui $a_{i_1\dots i_n} \neq 0$.

1.2. Proposizione. - *Un polinomio P è nullo come funzione, vale a dire $P(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, se e solo se tutti i coefficienti di P sono nulli.*

Dimostrazione. - Per $n = 1$ si tratta di un enunciato ben noto, e segue dal teorema di fattorizzazione (per cui un polinomio di grado d può avere al più d zeri distinti).
Il caso generale si dimostra per induzione su n.
Ci limitiamo a dimostrare il caso $n = 2$. Sia dato dunque
$$P(x, y) := \sum_{i,j} a_{ij} x^i y^j$$
tale che $P(x, y) = 0$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$. Fissato $x \in \mathbb{R}$, abbiamo allora che il polinomio della sola variabile y dato da $P_x(y) := P(x, y)$ è nullo, ovvero
$$P_x(y) = \sum_j \underbrace{\Big(\sum_i a_{ij} x^i\Big)}_{a_j(x)} y^j = 0 \quad \text{per ogni } y \in \mathbb{R},$$
da cui si deduce che i coefficienti $a_j(x)$ devono essere tutti nulli. Siccome questo vale per ogni x, se ne deduce che pure i coefficienti di ciascun polinomio $a_j(x)$ devono essere tutti nulli, ovvero che $a_{ij} = 0$ per ogni i e per ogni j. □

1.3. Definizione. - Si dice che $f(x) = o(g(x))$ per $x \to \bar{x}$ se
$$\lim_{x\to\bar{x}} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$
(si assume che f e g siano definite in un qualche intorno di $\bar{x}$, escluso $\bar{x}$ stesso, e che g sia una funzione reale strettamente positiva).
Si dice che $f(x) = O(g(x))$ per $x \to \bar{x}$ se, nelle stesse ipotesi,
$$\limsup_{x\to\bar{x}} \frac{|f(x)|}{g(x)} < +\infty \ ,$$
ovvero se esiste un intorno U di $\bar{x}$ ed una costante C tale che $|f(x)| \leq C\, g(x)$ per ogni $x \in U$.

1.4. Proposizione. - *Se P è un polinomio di grado minore o uguale a k su $\mathbb{R}^n$ e $P(x) = o(|x|^k)$ per $x \to 0$, allora P è nullo.*

Dimostrazione. - Per $n = 1$ il fatto è noto, infatti, se P non fosse nullo si avrebbe $P(x) \sim a_i x^i$ dove i è il più piccolo indice per cui $a_i \neq 0$.
Dimostriamo il caso n qualunque. Preso $x \in \mathbb{R}^n$, si consideri il polinomio di una variabile $Q_x(t) := P(tx)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Si verifica che Q_x è un polinomio di grado minore o uguale a k (ma non necessariamente lo stesso di P) e $Q(t) = o(t^k)$ per $t \to 0$. Quindi Q deve essere nullo, ed in particolare $0 = Q_x(1) = P(x)$. □

1.5. Definizione. - Sia A un aperto di $\mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}$, x un punto di A e k un numero naturale. Si dice che f ammette sviluppo di Taylor all'ordine k in x se vale la decomposizione

$$f(x + h) = P_{x,k}(h) + R_{x,k}(h) \tag{1.1}$$

dove $P = P_{x,k}$ è un polinomio di grado minore o uguale a k ed il resto $R = R_{x,k}$ soddisfa

$$R_{x,k}(h) = o(|h|^k) \quad \text{per } h \to 0. \tag{1.2}$$

1.6. Osservazioni. - (i) Per essere precisi, alla formula (1.2) andrebbe aggiunta la condizione $R_{x,k}(0) = 0$, che a ben vedere non è implicata dalla definizione di "o" piccolo. La condizione è superflua se si suppone, com'è naturale, che f sia continua in x, perché in tal caso avremmo che il resto $R_{x,k}$ deve essere continuo – e quindi nullo – in 0.
(ii) Se tale P esiste, allora è unico. Supponendo infatti di avere due polinomi P e $\tilde{P}$ di grado minore o uguale a k tali che $f(x + h) = P(h) + o(|h|^k)$ e $f(x + h) = \tilde{P}(h) + o(|h|^k)$, si deduce che $(P - \tilde{P})(h) = o(|h|^k)$, e quindi, per via della Proposizione 1.4, che il polinomio $P - \tilde{P}$ è nullo.
(iii) f ammette uno sviluppo di ordine 0 se e solo è continua in x.
(iv) f ammette uno sviluppo di ordine 1 se e solo è differenziabile in x.

1.7. Teorema. - *Se f è di classe C^k in A allora ammette uno sviluppo di Taylor all'ordine k in x, ed il polinomio $P_{x,k}$ è dato da*

$$P_{x,k}(h) := \sum_{i_1+\ldots+i_n \leq k} \frac{\big(D_1^{i_1} \cdots D_n^{i_n} f\big)(x)}{i_1! \cdots i_n!}\, h_1^{i_1} \cdots h_n^{i_n} \tag{1.3}$$

(la somma viene fatta su tutte le possibili n-uple $(i_1, \ldots, i_n)$ di numeri naturali tali che $i_1 + \cdots + i_n \leq k$).
Inoltre, se f è di classe C^{k+1} allora il resto $R_{x,k}$ soddisfa

$$R_{x,k}(h) = O(|h|^{k+1})$$

e più precisamente, preso h tale che il segmento $[x, x+h]$ è contenuto in A, esiste $t \in [0, 1]$ tale che

$$R_{x,k}(h) = \sum_{i_1+\ldots+i_n = k+1} \frac{\big(D_1^{i_1} \cdots D_n^{i_n} f\big)(x + th)}{i_1! \cdots i_n!}\, h_1^{i_1} \cdots h_n^{i_n} \ . \tag{1.4}$$

1.8. Osservazioni. - (i) La formula (1.4) è il cosiddetto resto di Lagrange. Per dimostrare che $R_{x,k}(h) = O(|h|^{k+1})$ basta osservare che le derivate parziali di f, essendo continue, sono limitate in un intorno di x, ed inoltre ogni monomio della forma $x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$ con $i_1 + \cdots + i_n = k + 1$ risulta essere $O(|h|^{k+1})$.

(ii) Applicando le formule (1.3) e (1.4) per $k = 0$ si ottiene che per ogni x ed ogni h tale che $[x, x + h]$ è contenuto in A esiste $t \in [0, 1]$ tale che

$$f(x + h) = f(x) + Df(x + th) \cdot h \ . \tag{1.5}$$

Questo enunciato può essere interpretato come un'estensione a più variabili del Teorema di Lagrange. Questo risultato non vale per funzioni vettoriali, neanche di una sola variabile (cfr. Esercizio 1.9).
(iii) Per $k = 1$, il polinomio di Taylor dato in (1.3) può essere riscritto nella forma seguente:

$$P_{x,1}(h) := f(x) + Df(x) \cdot h \ ,$$

e per $k = 2$

$$P_{x,2}(h) := f(x) + Df(x) \cdot h + \frac{1}{2}\big(D^2 f(x)\, h\big) \cdot h \ .$$

(iv) Si può parlare di sviluppo di Taylor anche per una funzione vettoriale, e questo consiste semplicemente nell'applicare il Teorema 1.7 a ciascuna componente. Si osservi che non è possibile scegliere il valore t nella formula (1.4) uguale per tutte le componenti (cfr. Esercizio 1.9).

Dimostrazione. - Dimostriamo prima la formula di Taylor all'ordine k con resto di Lagrange per funzioni C^{k+1}. Dati dunque x ed h tali che $[x, x + h] \subset A$ definiamo la funzione di una variabile $g(t) := f(x + th)$ per ogni $t \in [0, 1]$. L'idea è di usare lo sviluppo di Taylor all'ordine k con resto di Lagrange della funzione g nel punto 0 per esprimere $f(x + h) = g(1)$:

$$f(x + h) = g(1) = \underbrace{\sum_{0 \le i \le k} \frac{1}{i!} D^i g(0)}_{\text{polinomio di Taylor}} + \underbrace{\frac{1}{(k + 1)!} D^{k+1} g(t)}_{\text{resto di Lagrange}} \tag{1.6}$$

Per procedere, abbiamo bisogno di esprimere le derivate di g in termini di quelle di f. La formula generale è la seguente

$$D^i g(t) = \sum_{i_1 + \ldots + i_n = i} \frac{i!}{i_1! \cdots i_n!} \big(D_1^{i_1} \cdots D_n^{i_n} f\big)(x + th)\, h_1^{i_1} \cdots h_n^{i_n} \ . \tag{1.7}$$

Sostituendo la (1.7) nel termine a destra della (1.6), la sommatoria diventa il polinomio di Taylor in (1.3), mentre il pezzo restante diventa la formula (1.4) per il resto di Lagrange.
Supponiamo ora che la funzione f sia solo di classe C^k. Per questa possiamo scrivere la formula di Taylor all'ordine $k - 1$ con resto di Lagrange. Aggiungendo e sottraendo tutti i monomi di grado k otteniamo la formula con resto di Peano. Per chiarire, vediamo cosa succede per $k = 1$: usando la formula con resto di Lagrange all'ordine 0 otteniamo

$$\begin{aligned}
f(x + h) &= f(0) + \sum_j D_j f(x + th) h_j \\
&= f(0) + \sum_j D_j f(x) h_j + \sum_j \big(D_j f(x + th) - D_j f(x)\big) h_j \\
&= f(0) + \sum_j D_j f(x) h_j + \sum_j o(1) h_j \\
&= f(0) + \sum_j D_j f(x) h_j + o(|h|) \ .
\end{aligned}$$

Nella terza uguaglianza abbiamo usato il fatto che essendo $D_j f$ continua nel punto x (ed essendo $t = t(h)$ compreso tra 0 e 1), allora $D_j f(x + th) - D_j f(x)$ è infinitesima per $h \to 0$. $\square$

Dimostrazione della formula (1.7). - Si dimostra facilmente per induzione su i che

$$D^i g(t) = \sum_{j_1,\dots,j_i} \big(D_{j_1} \dots D_{j_i} f\big)(x + th)\, h_{j_1} \dots h_{j_i}$$

dove gli indici $j_1, \dots, j_i$ assumono tutti i valore tra 1 ed n. Si osservi ora che il termine generico della sommatoria $\big(D_{j_1} \dots D_{j_i} f\big)(x + th)\, h_{j_1} \dots h_{j_i}$ può essere riscritto nella forma

$$\big(D_1^{i_1} \dots D_n^{i_n} f\big)(x + th)\, h_1^{i_1} \cdots h_n^{i_n} \tag{1.8}$$

dove i_1 è il numero di indici j_m che sono uguali a 1, i_2 è il numero di indici j_m che sono uguali a 2, e così via; in particolare si tratta di monomi in h di grado i. Per ottenere la formula (1.7) basta osservare che il monomio (1.8) appare tante volte quanto sono i modi di ripartire i oggetti in n gruppi distinti contenenti i_1, i_2, ..., i_n oggetti ciascuno. E questo numero è (cfr. Esercizio 1.11)

$$\frac{i!}{i_1! \cdots i_n!} \ . \qquad \square$$

Esercizi

1.9. - Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ data da $f(x) := (\cos x, \sin x)$. Verificare che per ogni $x \in R$ ed ogni $h \neq 0$, l'identità (1.5) non vale per alcuna scelta di t. Quindi il Teorema di Lagrange non vale per funzioni vettoriali, anche di una sola variabilie.

1.10. - Dato un intero $k \geq 2$, dimostrare che la funzione

$$f(x) := \begin{cases} |x|^k \sin(|x|^{-k}) & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

è di classe C^∞ in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e soddisfa $f(h) = O(|h|^k) = o(|h|^{k-1}$, In particolare, f ammette uno sviluppo di Taylor all'ordine $k - 1$ in 0 con P il polinomio nullo. Tuttavia tutte le derivate prime di f sono discontinue (anzi, illimitate) in 0, ed in particolare non esistono le derivate di ordine superiore.

1.11*. - Siano dati n numeri naturali $i_1, \dots, i_n$ con somma $i_1 + \cdots + i_n = i$. Dimostrare (per induzione su n) che il numero di modi di ripartire i oggetti distinti in n gruppi contenenti i_1 $\dots i_n$ oggetti ciascuno è

$$\frac{i!}{i_1! \cdots i_n!} \ .$$

1.12*. - Dimostrare la seguente generalizzazione del binomio di Newton:

$$(a_1 + \cdots + a_n)^i = \sum_{i_1+\cdots+i_n=i} \frac{i!}{i_1! \cdots i_n!} a_1^{i_1} \cdots a_n^{i_n} \ .$$

1.13*. - Dimostrare che

$$\sum_{i_1+\cdots+i_n \leq i} \frac{i!}{i_1! \cdots i_n!} = \frac{n^{i+1} - 1}{n - 1} \ .$$

Capitolo 2. Formula di cambiamento di variabile per gli integrali multipli

[versione: 10 marzo 2004]

Ricapitoliamo alcune definizioni e risultati fondamentali.

2.1. MISURA ED INSIEMI MISURABILI SECONDO RIEMANN-PEANO-JORDAN. - Per *rettangolo* (chiuso) in $\mathbb{R}^n$ is intende un insieme del tipo $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, e cioè quello che andrebbe più propriamente chiamato un parallelepipedo con assi paralleli agli assi coordinati. Il volume ad esso associato è, ovviamente,

$$\mathrm{vol}(R) := (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n) \ . \tag{2.1}$$

La *misura esterna* (secondo R-P-J) di un insieme limitato $E \subset \mathbb{R}^n$ è

$$\overline{m}(E) := \inf \left\{ \sum_i \mathrm{vol}(R_i) \right\} \ , \tag{2.2}$$

dove l'estremo inferiore viene preso su tutte la famiglie finite $\{R_i\}$ di rettangoli chiusi la cui unione *contiene* E e le cui parti interne sono a due a due disgiunte. La *misura interna* di E è invece

$$\underline{m}(E) := \sup \left\{ \sum_i \mathrm{vol}(R_i) \right\} \ , \tag{2.3}$$

dove l'estremo superiore viene preso su tutte la famiglie finite $\{R_i\}$ di rettangoli chiusi la cui unione *è contenuta* in E e le cui parti interne sono a due a due disgiunte. Se le due misure coincidono, l'insieme E si dice *misurabile* (secondo R-P-J), e la misura si indica semplicemente con $m(E)$.

2.2. OSSERVAZIONI. - (i) Diverse proprietà della misura che uno riterrebbe ovvie non sono in realtà così facili da dimostrare a partire dalla definizione data sopra. Per esempio il fatto (essenziale) che per ogni insieme limitato E si ha (cfr. Esercizio 2.13)

$$\overline{m}(E) \geq \underline{m}(E) \ . \tag{2.4}$$

(ii) Ogni rettangolo R è misurabile e la misura coincide proprio con il volume definito in (2.1). Infatti, usando come famiglia test $\{R_i\}$ in (2.2) e (2.3) quella che consiste del solo rettangolo R, otteniamo subito che $\overline{m}(R) \leq \mathrm{vol}(R) \leq \underline{m}(R)$, e per concludere basta usare la disuguaglianza (2.4).
(iii) Nelle definizioni (2.2) e (2.3) abbiamo usato rettangoli chiusi solo per ragioni di convenienza: nulla sarebbe cambiato se avessimo usato invece rettangoli semiaperti, o anche semplicemente cubi.
(iv) Si può far vedere senza troppa fatica che la misura interna di un insieme E coincide con la misura interna della sua parte interna, mentre la misura esterna coincide con la misura esterna della chiusura. La misurabilità di E equivale al fatto che la misura esterna della frontiera ∂E è zero.

(v) Esistono insiemi non misurabili. Ad esempio ogni insieme numerabile che sia denso in una rettangolo R di misura positiva: in tal caso, infatti, la misura interna coincide con quella della sua parte interna, e cioè dell'insieme vuoto (per cui vale 0), mentre la misura interna coincide con quella della chiusura, e cioè R (e quindi vale un numero positivo).
(vi) Una proprietà fondamentale della misura m è l'*additività*: data una famiglia finita di insiemi misurabili E_i a due a due disgiunti si ha

$$\sum_i m(E_i) = m\Big(\bigcup_i E_i\Big) .$$

2.3. Integrale secondo Riemann-Peano-Jordan. - Sia R un rettangolo in $\mathbb{R}^n$ e sia f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione reale limitata. L'*integrale superiore* di f è

$$\int_R^* f(x)\,dx := \inf\Big\{\sum_i \sup_{x\in R_i} f(x)\cdot m(R_i)\Big\} , \tag{2.5}$$

dove l'estremo inferiore viene preso su tutte le partizioni finite $\{R_i\}$ di R, vale a dire la famiglie di rettangoli chiusi la cui unione è R e le cui parti interne sono a due a due disgiunte. Analogamente, l'*integrale inferiore* di f è

$$\int_{*R} f(x)\,dx := \sup\Big\{\sum_i \inf_{x\in R_i} f(x)\cdot m(R_i)\Big\} , \tag{2.6}$$

dove l'estremo superiore viene preso su tutte le partizioni finite $\{R_i\}$ di R. Se integrale superiore ed inferiore coincidono, allora f si dice *integrabile* (secondo R-P-J), ed il valore dell'integrale viene indicato semplicemente con $\int_R f(x)\,dx$.

2.4. Osservazioni. - (i) Se f è una funzione su un dominio limitato D che non sia un rettangolo, l'integrale $\int_D f(x)\,dx$ si definisce come l'integrale su un rettangolo R che contiene D della funzione $\tilde f$ ottenuta estendo f a 0 su $R\setminus D$.
(ii) Dato un insieme limitato $E\subset\mathbb{R}^n$, la sua funzione indicatrice 1_E risulta integrabile se e solo se E è misurabile, e l'integrale coincide con la misura di E.
(iii) Si dimostra, ma non è semplicissimo, che per ogni funzione f si ha

$$\int_{*R} f(x)\,dx \le \int_R^* f(x)\,dx . \tag{2.7}$$

(iv) Lo spazio delle funzioni integrabili su un dato rettangolo R è uno spazio vettoriale, e l'integrale è un funzionale lineare. Inoltre questo spazio è chiuso rispetto alla moltiplicazione di funzioni.
(v) Come già visto nel caso di funzioni di una variabile, ogni funzione continua definita su un rettangolo chiuso è integrabile. Lo stesso vale per le funzioni continue su un dominio D chiuso *e misurabile.*

Richiamiamo ora l'enunciato del teorema di Fubini (senza dimostrazione).

2.5. Teorema di Fubini. - *Sia f una funzione continua su $R = I_1\times\cdots\times I_k$. Allora l'integrale di f su R può essere calcolato tramite una successione di n integrali unidimensionali:*

$$\int_R f(x)\,dx = \int_{I_n}\Big(\cdots\int_{I_2}\Big(\int_{I_1} f(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\Big)dx_2\cdots\Big)dx_n .$$

In particolare il risultato non dipende dall'ordine delle integrazioni.

2.6. Osservazione. - Il teorema di Fubini vale anche per f funzione misurabile. In tal caso andrebbe completato dicendo che ad ogni passo le funzioni da integrare sono effettivamente ben definite ed integrabili. Più precisamente, $x_1 \mapsto f(x_1, \dots, x_n)$ risulta integrabile su I_1 per tutti i punti $(x_2, \dots, x_n)$ eccetto al più un insieme di misura nulla (per cui l'integrale può essere sostituito da un valore arbitrario), la funzione $x_2 \mapsto \int_{I_1} f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1$, risulta integrabile su I_2 per tutti i punti $(x_3, \dots, x_n)$ eccetto al più un insieme di misura nulla, e così via.

2.7. Teorema di cambio di variabile negli integrali multipli. - *Siano A, A' aperti di $\mathbb{R}^n$, e sia $\Phi : A \to A'$ una funzione C^1 con inversa di classe C^1. Dato D dominio compatto e misurabile contenuto in A ed $f : \phi(D) \to \mathbb{R}$ funzione continua, si ha*

$$\int_{\phi(D)} f(y)\, dy = \int_D f(\Phi(x)) \left| \det(D\Phi(x)) \right| dx\ . \tag{2.8}$$

La dimostrazione di questo teorema si basa sul seguente fatto fondamentale.

2.8. Proposizione. - *Sia $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una funzione affine della forma $\Phi(x) := Mx + y_0$ con M matrice $n \times n$ ed y_0 vettore in $\mathbb{R}^n$. Allora*

$$m(\Phi(E)) = |\det M| \cdot m(E) \quad \textit{per ogni insieme misurabile } E. \tag{2.9}$$

Prima dimostrazione (traccia). - Con un po' di fatica si riesce a far vedere che basta dimostrare la (2.9) quando E è un rettangolo; si nota poi che la dimostrazione per un rettangolo è la stessa che per il cubo $Q := [0,1]^n$. Non resta che dimostrare che $m(\Phi(Q)) = |\det M|$. Indichiamo con $v_1, \dots, v_n$ i vettori colonna della matrice M, e definiamo la funzione

$$d(M) = d(v_1, \dots, v_n) := \begin{cases} m(\Phi(Q)) & \text{se } \det M > 0, \\ 0 & \text{se } \det M = 0, \\ -m(\Phi(Q)) & \text{se } \det M < 0. \end{cases}$$

Il punto è che d è una funzione *multilineare alternante* nelle variabili $v_1, \dots, v_n$. Dimostrato-questo, siccome $d(I)$ è chiaramente uguale a 1, non possiamo che concludere che d coincide con il determinante, e quindi $m(\phi(Q)) = |d(M)| = |\det M|$.
Per far vedere che d è multilineare alternante basta dimostrare che valgono le seguenti proprietà (cfr. Esercizio 2.20):
(i) scambiando due colonne di M, il valore di $d(M)$ cambia di segno;
(ii) per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, $d(\lambda v_1, v_2, \dots, v_n) = \lambda d(v_1, v_2, \dots, v_n)$;
(iii) per ogni $i > 1$, $d(v_1 + v_i, v_2, \dots, v_n) = \lambda d(v_1, v_2, \dots, v_n)$.
La proprietà (i) segue direttamente dalla definizione di d e dal fatto che scambiando due colonne di una matrice, il determinante cambia di segno. Le proprità (ii) ed (iii) hanno un chiaro significato geometrico, ma la dimostrazione completa è lunga e noiosa, e preferisco evitarla. □

Seconda dimostrazione (traccia). - Usando il teorema di Fubini e la formula di cambio di variabile per gli integrali unidimensionali, è relativamente semplice dimostrare (cfr. Esercizio 2.21) che la (2.9) vale quando M è una matrice della forma

$$I + a\epsilon_{ij}$$

con a un numero reale e ϵ_{ij} la matrice che ha tutti i coefficienti nulli tranne quello in riga i e colonna j, che invece vale 1. È inoltre ovvio che date due matrici M_1 ed M_2 per cui la (2.9) vale, allora vale anche per il prodotto $M_1 M_2$. Per concludere, basta quindi utilizzare il fatto che ogni matrice $n \times n$ si scrive come prodotto di matrici del tipo $I + a\epsilon_{ij}$ (Proposizione 2.9). $\square$

2.9. Proposizione. - *Ogni matrice $n \times n$ si scrive come prodotto di $n^2 + n - 1$ matrici della forma $I + a\epsilon_{ij}$, con a un numero reale e ϵ_{ij} la matrice che ha tutti i coefficienti nulli tranne quello di coordinate ij, che è uguale a 1.*

Dimostrazione. - L'unica dimostrazione che ho trovato di questo enunciato è complicata, e la riporto solo per completezza. Chi ne trovasse una migliore è pregato di comunicarmela.
Chiamiamo elementari le matrici della forma $I + a\epsilon_{ij}$, e dimostriamo per induzione su n che ogni matrice $n \times n$ si scrive come prodotto di $n^2 + n - 1$ matrici elementari. Per $n = 1$ tutte le matrici sono elementari. Supponiamo l'enunciato vero per $n - 1$, e dimostriamola per n.
Passo 1. Data A matrice $n \times n$, il prodotto $\epsilon_{ij}A$, è la matrice con tutte le righe nulle tranne la i-esima, che coincide con la j-esima riga di A, ed in particolare $\epsilon_{ij}A = 0$ quando la j-esima riga di A è nulla.
Passo 2. Si dimostra per induzione su n che, presi $a_1, \ldots, a_{n-1}$,

$$\prod_{i=1}^{n-1}(I + a_i\epsilon_{in}) = I + \sum_{i=1}^{n-1} a_i\epsilon_{in} = \begin{pmatrix} 1 & & & a_1 \\ & 1 & & a_2 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dove I è ora la matrice identità $(n-1) \times (n-1)$ ed a il vettore colonna di dimensione $n - 1$ e coordinate a_i. Analogamente, presi $b_1, \ldots, b_{n-1}$,

$$\prod_{j=1}^{n-1}(I + b_j\epsilon_{nj}) = I + \sum_{j=1}^{n-1} b_j\epsilon_{jn} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ b_1 & b_2 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$$

dove b è il vettore riga di coordinate b_j.
Passo 3. Siano a, b come al passo precedente, e prendiamo X matrice $(n-1) \times (n-1)$ e c un numero reale. Allora

$$\begin{pmatrix} I & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X + a \otimes b & ca \\ b & c \end{pmatrix}, \tag{2.10}$$

dove $a \otimes b$ è la matrice $(n-1) \times (n-1)$ ottenuta moltiplicando il vettore colonna a ed il vettore riga b come se fossero matrici.
Passo 4. Tornando all'equazione (2.10), osserviamo che la prima e la terza matrice nel prodotto a sinistra dell'uguale si scrivono come prodotto di $n-1$ matrici elementari (Passo 2), la quarta è la matrice elementare $I + (c-1)\epsilon_{nn}$, ed infine la seconda matrice si scrive sempre come prodotto di $n^2 - n - 1$ matrici elementari per ipotesi induttiva. Pertanto ogni matrice del tipo

$$M = \begin{pmatrix} X + a \otimes b & ca \\ b & c \end{pmatrix}$$

si scrive come prodotto di $n^2 + n - 2$ matrici elementari. Siccome ogni matrice M tale che $M_{nn} \neq 0$ può essere rappresentata in questo modo prendendo

$$\begin{cases} c := M_{nn} & \\ a_i := M_{in}/c = M_{in}/M_{nn} & \text{per } i = 1, \ldots, n-1, \\ b_j := M_{nj} & \text{per } j = 1, \ldots, n-1, \\ X_{ij} := M_{ij} - a_ib_j = M_{ij} - M_{in}M_{nj}/M_{nn} & \text{per } i, j = 1, \ldots, n-1, \end{cases}$$

ne consegue che M si può scrivere come prodotto di n^2+n-2 matrici elementari. Ovviamente lo stesso vale per le matrici per cui $M_{ii} \neq 0$ per qualche $i = 1, \dots, n$.

Passo 5. Supponiamo ora che M sia una matrice tale che $M_{ii} = 0$ per ogni i. Se $M \neq 0$, esistono i, j tali che $M_{ij} \neq 0$, e la matrice $M' := (1+\epsilon_{ji})M$ soddisfa $M'_{jj} = M_{ij} \neq 0$, e quindi si rappresenta come prodotto di n^2+n-2 matrici elementari. Ma essendo

$$M = (1+\epsilon_{ji})^{-1} M' = (1-\epsilon_{ji})M' \ ,$$

M si rappresenta come prodotto di n^2+n-1 matrici elementari. □

2.10. Proposizione. - *Siano A, A' aperti di $\mathbb{R}^n$, e sia $\Phi : A \to A'$ una funzione di classe C^1. Dato D insieme relativamente compatto in A ed $f : \phi(D) \to \mathbb{R}$ funzione limitata (non necessariamente integrabile), si ha*

$$\int^*_{\phi(D)} f(y)\, dy \leq \int^*_D f(\Phi(x)) \left|\det(D\Phi(x))\right| dx \ . \tag{2.11}$$

Dimostrazione (traccia). - Utilizzando il fatto che l'integrale superiore di una funzione limutata positiva coincide con la misura esterna del sottografico, la (2.11) segue dalla disuguaglianza

$$m^*(\phi(E)) \leq \int^*_E \left|\det(D\Phi(x))\right| dx \ . \tag{2.12}$$

per ogni insieme E relativamente compatto in A (cfr. Esercizio 2.22).
Fissiamo $\delta > 0$, e consideriamo ora una famiglia di cubi chiusi $\{Q_i\}$ di lato δ e con parti interne a due a due disgiunte che ricoprono l'insieme E, e per ogni i scegliamo un punto $x_i \in E \cap Q_i$. Poiché Φ è differenziabile in x_i,

$$\Phi(x) = \underbrace{\Phi(x_i) + D\Phi(x_i)(x - x_i)}_{L_i(x)} + o(\delta) \quad \text{per ogni } x \in Q_i. \tag{2.13}$$

Ne consegue che l'immagine di Q_i secondo la mappa Φ dista meno di $o(\delta)$ dall'immagine secondo la mappa affine L_i, ovvero $\Phi(Q_i)$ è contenuto in un $o(\delta)$-intorno di $L_i(Q_i)$. Siccome questo intorno differisce da $L_i(Q_i)$ per un insieme di misura di ordine $o(\delta) \cdot O(\delta^{n-1})$, otteniamo

$$m^*(\Phi(Q_i)) \leq m(L_i(Q_i)) + o(\delta^n) = \left|\det(D\Phi(x_i))\right| m((Q_i) + o(\delta^n) \ ,$$

dove l'uguaglianza segue dalla Proposizione 2.8. Pertanto, tenendo conto del fatto che gli insiemi $\Phi(Q_i)$ ricoprono $\phi(E)$ e che il numero dei cubi Q_i necessario a ricoprire E è dell'ordine di $O(\delta^{-n})$,

$$m^*(\Phi(E)) \leq \sum_i \left|\det(D\Phi(x_i))\right| m((Q_i) \ + o(1) \ . \tag{2.14}$$

Per ottenere la (2.12) basta infine osservare che scegliendo i cubi Q_i ed i punti x_i in modo opportuno, e prendendo δ abbastanza piccolo, il termine di destra della (2.14) può essere preso arbitrariamente vicino al valore dell'integrale in (2.12). □

Osservazione. - La dimostrazione precedente va limata in diversi punti. Ad esempio, l'errore nello sviluppo di Taylor (2.12) dipende ovviamente dal punto x_i e dal punto x, e nello scriverlo come $o(\delta)$ abbiamo implicitamente assunto di poterlo stimare in modulo con una funzione della sola δ di ordine $o(\delta)$; questo assunto è corretto, e può essere dimostrato utilizzando il fatto che $D\Phi$ è una funzione *uniformemente continua* sulla chiusura di E (cfr. Esercizio 2.23).

Dimostrazione del Teorema 2.10. - Applichiamo la formula (2.11) con Φ^{-1} al posto di Φ, $\tilde{f}(x) := f(\Phi)\,\big|\det(D\Phi)\big|$ al posto di f e $\tilde{D} := \Phi(D)$ al posto di D:

$$\int^*_{\phi^{-1}(\tilde{D})} \tilde{f}(x)\,dx \leq \int^*_{\tilde{D}} \tilde{f}(\Phi^{-1}(y))\,\big|\det(D\Phi^{-1}(y))\big|\,dy\ ,$$

ovvero

$$\int^*_D f(\Phi(x))\,\big|\det(D\Phi(x))\big|\,dx \leq \int^*_{\Phi(D)} \tilde{f}(y)\,\big|\det(D\Phi(\Phi^{-1}(y)))\big|\,\big|\det(D\Phi^{-1}(y))\big|\,dy\ .$$

Siccome le matrici $D\Phi(\Phi^{-1}(y))$ e $D\Phi^{-1}(y))$ sono una inversa dell'altra, il prodotto dei loro determinanti è 1, e quest'ultima disuguaglianza diventa

$$\int^*_D f(\Phi(x))\,\big|\det(D\Phi(x))\big|\,dx \leq \int^*_{\Phi(D)} \tilde{f}(y)\,dy\ ,$$

che insieme alla (2.11) dà l'identità (2.8). □

Esercizi

2.11. - In $\mathbb{R}^2$, si consideri il rettangolo chiuso $R = I \times I'$. Siano quindi $\{I_i\}$ ed $\{I'_j\}$ partizioni di I ed I' rispettivamente. Dimostrare che la famiglia di rettangoli $\{R_{ij} := I_i \times I'_j\}$ soddisfa

$$\sum_{ij} \mathrm{area}(R_{ij}) = \mathrm{area}(R)\ .$$

2.12*. - Siano $\{R_i\}$ e $\{\tilde{R}_j\}$ due famiglie finite di rettangoli nel piano chiusi con parti interne a due a due disgiunte e tali che l'unione degli R_i è contenuta nell'unione degli $\tilde{R}_j$. Dimostrare che

$$\sum_i \mathrm{area}(R_i) \leq \sum_j \mathrm{area}(\tilde{R}_j)\ .$$

[*Possiamo supporre che tutti questi rettangoli siano contenuti in un certo rettangolo $I \times I'$. Basta allora costruire $\{I_k\}$ ed $\{I'_h\}$ partizioni di I ed I' in modo tale che ogni R_i ed ogni $\tilde{R}_j$ si può scrivere come unione di un'opportuna sottofamiglia di rettangoli $I_i \times I_j$, e quindi usare quanto dimostrato nell'Esercizio 2.11.*]

2.13. - Dimostrare la diseguaglianza (2.4) per gli insiemi nel piano. [*Utilizzare l'Esercizio 2.12.*]

2.14*. - Dimostrare che dati E, F insiemi misurabili in $\mathbb{R}^n$, allora $E \cup F$, $E \cap F$ ed $E \setminus F$ sono misurabili, ed inoltre

$$m(E \cup F) = m(E) + m(F) - m(E \cap F)\ .$$

2.15*. - Dimostrare la affermazioni contenute nel Paragrafo 2.2.

2.16*. - Dimostrare la diseguaglianza (2.7).

2.17. - Una funzione g su un rettangolo R si dice *semplice* se si scrive come combinazione lineare di funzioni caratteristiche di rettangoli, ovvero $g = \sum_i \alpha_i 1_{R_i}$. Dimostrare che

$$\int_R g(x)\,dx = \sum_i \alpha_i m(R_i)\ .$$

Dimostrare quindi che per ogni funzioni limitata f si ha

$$\int_R^* f(x)\,dx = \inf \int_R g(x)\,dx \ ,$$

dove l'estremo inferiore viene preso su tutte le funzioni semplici g tali che $g \geq f$.

2.18. - Usando la caratterizzazione di integrale superiore (ed inferiore) data nell'Esercizio 2.17, dimostrare la seguente versione del teorema di Fubini per funzioni limitate non necessariamente misurabili:

$$\begin{aligned}\int_R^* f(x)\,dx &\geq \int_{I_n}^* \biggl(\cdots \int_{I_2}^* \biggl(\int_{I_1}^* f(x_1,\dots,x_n)\,dx_1 \biggr) dx_2 \cdots \biggr) dx_n \\ &\geq \int_{*I_n} \biggl(\cdots \int_{*I_2} \biggl(\int_{*I_1} f(x_1,\dots,x_n)\,dx_1 \biggr) dx_2 \cdots \biggr) dx_n \geq \int_{*R} f(x)\,dx \ .\end{aligned}$$

Usare questo risultato per dimostrare l'estensione del Teorema di Fubini nel Paragrafo 2.10.

2.19*. - Usando il teorema di Fubini, dimostrare che l'integrale su D di una funzione *positiva* f coincide con la misura del sottografico, ovvero dell'insieme dei punti $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ tali che $x \in D$ e $0 \leq y \leq f(x)$.

2.20. - Dimostrare che una funzione $d(v_1, \dots, v_n)$ che soddisfa gli assiomi (i), (ii) ed (iii) nella prima dimostrazione della Proposizione 2.8 è effettivamente multilineare e alternante.

2.21. - Sia $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una funzione della forma

$$\phi(x_1, \dots, x_n) := (x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + a x_j, x_{i+1}, \dots, x_n) \ .$$

Usando il teorema di Fubini e la formula di cambio di variabile per integrali di funzioni di una variabile, dimostrare che la funzione Φ soddisfa la (2.8), ovvero che per ogni D dominio chiuso ed ogni f funzione continua su D si ha

$$(1 + a\delta_{ij}) \int_D f(\Phi(x))\,dx = \int_{\phi(D)} f(y)\,dy$$

(al solito, δ_{ij} vale 1 se $i = j$ e 0 altrimenti).

2.22*. - Dimostrare che la formula (2.12) implica effettivamente la (2.11). [*Suggerimento: se f è positiva, l'integrale superiore di f su $\Phi(D)$ coincide con la misura esterna del suo sottografico $\bigl\{(y,t) : y \in \Phi(D),\, 0 \leq t \leq f(y)\bigr\}$. A sua volta, questo insieme è l'immagine secondo $\tilde\Phi(x,t) := (\Phi(x), t)$ di $E := \bigl\{(x,t) : x \in D,\, 0 \leq t \leq f(\Phi(x))\bigr\}$, e ora basta applicare la (2.12) con $\tilde\Phi$ al posto di Φ e poi usare il teorema di Fubini.*]

2.23*. - Sia A un aperto di $\mathbb{R}^n$, ed $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1. Dimostrare che dato K sottoinsieme compatto di A, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$\bigl|f(x) - f(y) - Df(y)\cdot(x-y)\bigr| \leq \varepsilon |x-y| \quad \text{per ogni } x \in A,\ y \in K \text{ con } |x-y| \leq \delta.$$

Capitolo 3. Il teorema di esistenza e unicità per il problema di Cauchy

[versione: 7 marzo 2004]

3.1. TERMINOLOGIA. - Una funzione reale f definita su un aperto A di $\mathbb{R}^k$ si dice *Lipschitziana* in A se esiste una costante finita C tale che

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq C|x_1 - x_2| \quad \text{per ogni } x_1, x_2 \in A. \tag{3.1}$$

Tra tutte le costanti C per cui vale la (3.1) ne esiste una minima, detta costante di Lipschitz di f ed indicata con $\mathrm{Lip}(f)$.
La funzione f si dice *localmente Lipschitziana* in A se per ogni punto di A ammette un intorno $U \subset A$ ed una costante $C = C(U)$ che dipende da U, tale che

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq C(U)\ |x_1 - x_2| \quad \text{per ogni } x_1, x_2 \in U.$$

3.2. TERMINOLOGIA. - Sia (X, d) uno spazio metrico. Ricordiamo le seguenti definizioni:
(i) il diametro di un insieme $D \neq \varnothing$ è $\mathrm{diam}(D) := \sup\big\{d(x,y) : x, y \in D\big\}$;
(ii) la distanza di un punto x da un insieme $D \neq \varnothing$ è $\mathrm{dist}\,(x, D) := \inf\big\{d(x,y) : y \in D\big\}$;
(iii) la distanza tra due insiemi $C, D \neq \varnothing$ è $\mathrm{dist}\,(C, D) := \inf\big\{d(x,y) : x \in C,\ y \in D\big\}$.

Si noti che la distanza tra insiemi definita nel punto (iii), pur corrispondendo ad un concetto intuitivo, non soddisfa gli assiomi della distanza (cfr. Esercizio 3.22).

3.3. DEFINIZIONE. - Sia $k \geq 1$ intero, sia A un aperto di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^k$, e sia $f : A \to \mathbb{R}^k$ una funzione continua. Si dice che $y : I = (a, b) \to \mathbb{R}^k$ risolve l'equazione differenziale

$$\dot{y} = f(x, y) \tag{3.2}$$

se y è di classe C^1 e per ogni $x \in I$ si ha $(x, y(x)) \in A$ e $\dot{y}(x) = f(x, y(x))$. Dato $(x_0, y_0) \in A$, si dice che y risolve il problema ai dati iniziali

$$\begin{cases} \dot{y} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{3.3}$$

se y risolve la (3.2) e soddisfa la condizione $y(x_0) = y_0$. Il problema (3.3) è anche noto come problema di Cauchy.
Una soluzione y si dice *prolungabile* se esiste un'altra soluzione $\tilde{y}$ definita su $\tilde{I}$ tale che $\tilde{I}$ include strettamente I e $\tilde{y} = y$ su I (in altre parole, se il grafico di $\tilde{y}$ include *strettamente* il grafico di y). Una soluzione y si dice *massimale* se non è prolungabile.

3.4. OSSERVAZIONI. - (i) Per semplificare la notazione, si omette di menzionare per quanto possibile la variabile libera x, scrivendo quindi y invece di $y(x)$ e così via. Questa convenzione, per quanto comoda, può talvolta generare confusione.

(ii) Nella definizione precedente, non c'è un motivo specifico per richiedere che A sia aperto, se non il fatto che questa scelta semplifica l'enunciato dei risultati che seguono.
(iii) Se scriviamo y ed f come $y = (y_1, \dots, y_k)$ ed $f = (f_1, \dots, f_k)$, la (3.2) diventa

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = f_1(x, y_1, \dots, y_k) \\ \dot{y}_2 = f_2(x, y_1, \dots, y_k) \\ \quad \vdots \\ \dot{y}_k = f_k(x, y_1, \dots, y_k) \end{cases}$$

e dunque per $k > 1$ la (3.2) è più propriamente un *sistema* di equazioni differenziali.

3.5. Osservazione. - Ogni soluzione y di (3.2) può essere prolungata ad una soluzione massimale, e per questo motivo da qui in poi assumeremo tacitamente che le soluzioni di cui parliamo siano massimali. Per dimostrare questo fatto, consideriamo la famiglia $\mathscr{F}$ di tutte le soluzioni di (3.2) che prolungano y, e definiamo su $\mathscr{F}$ questo ordinamento parziale: date $y_1, y_2 \in \mathscr{F}$, diciamo che $y_1 \succ y_2$ se y_i estende y_2. Non è difficile vedere che ogni catena in $\mathscr{F}$ ammette un maggiorante, e quindi esistono elementi massimali per via del Lemma di Zorn (attenzione, anche più di uno).

3.6. Terminologia (cfr. §3.1). - Una funzione $f = f(x, y)$ definita su un aperto A di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^k$ si dice Lipschitziana in y se esiste una costante C tale che

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le C\,|y_1 - y_2| \quad \text{per ogni } (x, y_1), (x, y_2) \in A;$$

f si localmente Lipschitziana in y se per ogni punto di A esiste un intorno U ed una costante $C = C(U)$ che dipende da U, tale che

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le C(U)\,|y_1 - y_2| \quad \text{per ogni } (x, y_1), (x, y_2) \in U.$$

3.7. Osservazione. - Supponiamo che f sia differenziabile in ogni punto rispetto alla variabile y. Allora f è Lipschitiziana in y se $|D_y f|$ è una funzione limitata, ed è localmente Lipschitziana in y se $|D_y f|$ è una funzione localmente limitata. Quest'ultima condizione è automaticamente verificata se f è di classe C^1.

3.8. Teorema di esistenza e unicità delle soluzioni massimali. - *Siano dati A ed f come nella Definizione 3.3, e supponiamo che f sia localmente Lipschitziana su A (cfr.* §3.6*). Allora:*

(i) Esistenza: *per ogni dato iniziale* $(x_0, y_0) \in A$ *il problema di Cauchy* (3.3) *ammette una soluzione massimale;*

(ii) Unicità: *due soluzioni massimali dell'equazione* (3.2) *che coincidono in un punto coincidono ovunque;*

(iii) Comportamento agli estremi: *ogni soluzione massimale $u : (a, b) \to \mathbb{R}^k$ dell'equazione* (3.2) *"tende alla frontiera di A o all'infinito" per $x \to a^+$ e per $x \to b^-$, vale a dire che per ogni insieme limitato $D \subset A$ con distanza strettamente positiva dal bordo di A (cfr.* §3.2*), esiste $\delta > 0$ tale che $(x, y(x)) \notin D$ per $x \le a + \delta$ e $x \ge b - \delta$.*

3.9. Osservazioni. - (i) Questo teorema è essenzialemtne dovuto a Cauchy.
(ii) L'enunciato (i) può essere riassunto dicendo che due soluzioni massimali dell'equazione (3.2) hanno grafici disgiunti oppure coincidono.
(iii) È possibile dimostrare l'esistenza di soluzioni del problema di Cauchy (3.3) anche nelle sola ipotesi di continuità di f (Teorema di Peano). L'ipotesi di Lipschitzianità locale è necessaria

per l'unicità. Ad esempio, le soluzioni massimali dell'equazione $\dot{y} = 2|y|^{1/2}$ sono tutte (e sole) le funzioni del tipo

$$y := \begin{cases} -(x-\alpha)^2 & \text{per } x < \alpha, \\ 0 & \text{per } \alpha \le x \le \beta, \\ (x-\beta)^2 & \text{per } \beta < x, \end{cases}$$

dove α e β sono una qualunque coppia di numeri tali che $-\infty \le \alpha \le \beta \le +\infty$, e quindi il problema di Cauchy (3.3) ammette infinite soluzioni per ogni dato iniziale $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.
(iv) Un modo equivalente, ma per molti versi fuorviante, di formulare l'enunciato (iii) del Teorema 3.8 è dire che il grafico di ogni soluzione massimale della (3.2) è chiuso in A.
(v) Anche quando A è una "striscia" della forma $I \times \mathbb{R}^k$ con I intervallo aperto, non è detto che le soluzioni dell'equazione (3.3) siano definite su tutto I. Ad esempio, le soluzioni massimali dell'equazione $\dot{y} = -y^2$ sono tutte e sole le funzioni della forma $y := (x-\alpha)^{-1}$ definite su $(-\infty, \alpha)$ oppure su $(\alpha, +\infty)$ (si tratta di due soluzioni distinte!) con $\alpha \in \mathbb{R}$. Quindi le soluzioni non sono definite su tutto $\mathbb{R}$ anche se l'equazione lo è.

Nel teorema che segue si mostra che sotto ipotesi appena più forti su f le soluzioni dell'equazione sono definite su tutto I.

3.10. Teorema di esistenza globale. - *Sia un A un aperto della forma $I \times \mathbb{R}^k$ con I intervallo aperto di $\mathbb{R}$ (non necessariamente limitato), ed f una funzione continua e Lipschitziana in y su $J \times \mathbb{R}^n$ per ogni intervallo chiuso J contenuto in I. Allora ogni soluzione massimale dell'equazione* (3.2) *è definita su tutto l'intervallo I.*

3.11. Osservazione. - Con un po' di fatica si può dimostrare che la condizione di Lipschitzianità nel teorema precedente è equivalente alla seguente: esiste una funzione continua $C : I \to [0, +\infty)$ tale che

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le C(x)\, |y_1 - y_2| \quad \text{per ogni } x \in I,\ y_1, y_2 \in \mathbb{R}^k.$$

Se f è differenziabile in ogni punto rispetto alla variabile y, allora questa condizione è soddisfatta se (e solo se) esiste una funzione continua $L : I \to [0, +\infty)$ tale che $|D_y f|(x, y) \le L(x)$ per ogni $(x, y) \in I \times \mathbb{R}^k$.

La dimostrazione dei Teoremi 3.8 e 3.10 si basa sul seguente lemma fondamentale:

3.12. Teorema di esistenza e unicità locale. - *Sia (x_0, y_0) un punto di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^k$, sia U un insieme chiuso della forma $[x_0 - \rho, x_0 + \rho] \times B_r(y_0)$ dove $\rho > 0$ e $\overline{B}_r(y_0)$ è una palla chiusa di $\mathbb{R}^k$ di centro y_0 e raggio r (ammettiamo anche il caso $r = +\infty$, ovvero $\overline{B}_r = \mathbb{R}^k$), e sia $f : U \to \mathbb{R}^k$ una funzione continua e Lipschitziana in y.*
Allora esiste $\delta > 0$ tale che il problema di Cauchy (3.3) *ammette una ed una sola soluzione $y : [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \to \overline{B}_r(y_0)$. Più precisamente, basta prendere un qualunque δ che soddisfa*

$$\begin{cases} \delta < \min\left\{\rho, \frac{1}{L}\right\} & \textit{per } r = +\infty, \\ \\ \delta < \min\left\{\rho, \frac{1}{L}, \frac{r}{M}\right\} & \textit{per } r < +\infty, \end{cases} \tag{3.4}$$

dove L è la costante di Lipschitz di f rispetto alla variabile y ed M il massimo di $|f|$ su U.

Dimostrazione. - Cominciamo con il caso $r = +\infty$. Il punto fondamentale è osservare che $y : [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \to \mathbb{R}^k$ risolve il problema di Cauchy (3.3) se e solo se y soddisfa

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt \quad \text{per ogni } x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta], \tag{3.5}$$

ovvero è un punto fisso dell'operatore $T : X \to X$ definito da

$$[Ty](x) := y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt \quad \text{per ogni } x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta], \tag{3.6}$$

con X lo spazio delle funzioni continue da $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ in $\mathbb{R}^k$. Più precisamente, se y è una funzione C^1 tale che $y(x_0) = y_0$, integrando l'equazione $\dot{y} = f(x, y)$ otteniamo la (3.5), e viceversa, se y é una funzione *continua* che soddisfa la (3.5), allora $y(x_0) = y_0$ e per il teorema fondamentale del calcolo y è di classe C^1 e la derivata $\dot{y}$ è uguale a $f(x, y)$.
Siccome lo spazio X dotato della distanza del sup è completo, non ci resta che far vedere che T è una contrazione, almeno per opportuni valori di δ. Date dunque y_1 ed y_2, dobbiamo stimare $\|Ty_1 - Ty_2\|_\infty$: per ogni x si ha

$$[Ty_1](x) - [Ty_2](x) = \int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))\, dt$$

e quindi, ricordando che L è la costante di Lipschitz di f rispetto alla variabile y,

$$\begin{aligned} \big|[Ty_1](x) - [Ty_2](x)\big| &\le \int_{x_0}^{x} \big|f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))\big|\, dt \\ &\le \int_{x_0}^{x} L\, |y_1(t) - y_2(t)|\, dt \\ &\le (x - x_0)\, L \sup\big\{|y_1(t) - y_2(t)| : \ x_0 \le t \le x\big\} \\ &\le L\delta_0 \|y_1 - y_2\|_\infty \ . \end{aligned} \tag{3.7}$$

Quindi

$$\|Ty_1 - Ty_2\|_\infty \le L\delta_0 \|y_1 - y_2\|_\infty$$

e siccome l'assunto (3.4) implica $L\delta_0 < 1$, T è una contrazione.
Nel caso $r < +\infty$ la dimostrazione è la stessa, eccetto che lo spazio di funzioni X che consideriamo è quello delle funzioni continue da $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ in $\overline{B}_r(y_0)$. T resta ovviamente una contrazione, ma adesso dobbiamo anche dimostrare che T porta X in sé, ovvero che $[Ty](x) \in \overline{B}_r(y_0)$ per ogni x. Stimiamo dunque la distanza di $[Ty](x)$ da y_0:

$$\begin{aligned} \big|[Ty](x) - y_0\big| &= \left| \int_{x_0}^{x} f(t, y(t)\, dt \right| \\ &\le \int_{x_0}^{x} |f(t, y(t)|\, dt \\ &\le (x - x_0) \sup\big\{|f(t, y(t))| : \ x_0 \le t \le x\big\} \le M\delta_0 \ , \end{aligned} \tag{3.8}$$

e siccome la (3.4) implica $M\delta_0 \le r$, Ty ha valori in $\overline{B}_r(y_0)$. $\square$

3.13. Osservazioni. - (i) L'operatore integrale T in (3.6) è noto come operatore di Volterra. L'identità (3.5) è nota come forma integrale del problema di Cauchy (3.3).
(ii) L'enunciato del Teorema 3.12 resta valido anche prendendo U aperto (conformemente alla notazione precedente), ovvero della forma $(x_0 - \rho, x_0 + \rho) \times B_r(y_0)$ con $B_r(y_0)$ palla aperta. Questo avrebbe però richiesto una dimostrazione un po' più complicata.
(iii) Nella dimostrazione precedente, caso $r < +\infty$, abbiamo utilizzato il fatto che lo spazio delle funzioni continue su un intervallo I a valori nella palla $\overline{B}_r(y_0)$ è un sottoinsieme chiuso di dello spazio delle funzioni continue su I a valori in $\mathbb{R}^k$, ed è quindi uno spazio completo. Questo è vero perché $\overline{B}_r(y_0)$ è un insieme chiuso (Esercizio 3.28).

(iv) Nella dimostrazione precedente, le catene di disuguaglianze (3.7) e (3.8) sono corrette solo per $x \geq x_0$, e vanno opportunamente modificate nel caso $x \leq x_0$.

Dimostrazione del Teorema 3.8. - *Esistenza*: l'esistenza di una soluzione del problema (3.3) definita (almeno) in un intorno $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ segue dal Teorema 3.12.

Unicità: date due soluzioni massimali $y : I \to \mathbb{R}^k$ e $\tilde{y} : \tilde{I} \to \mathbb{R}^k$ dell'equazione (3.2) che coincidono in almeno un punto x_0, vogliamo dimostrare che coincidono ovunque. Sia dunque x_1 l'estremo superiore dei punti x tali che y ed $\tilde{y}$ coincidono nell'intervallo $[x_0, x)$. Chiaramente y ed $\tilde{y}$ coincidono anche nell'intervallo $[x_0, x_1)$, e vogliamo far vedere che x_1 è l'estremo superiore sia di I che di $\tilde{I}$. Se x_1 fosse l'estremo superiore di I ma non di $\tilde{I}$, potremmo usare $\tilde{y}$ per prolungare y a destra di x_1, e questo contraddirrebbe la massimalità di y. Analogamente, x_1 non può essere l'estremo superiore di $\tilde{I}$ ma non di I.

Non ci resta che escludere l'ultimo caso, e cioè che x_1 sia interno sia ad I che ad $\tilde{I}$. Se così fosse, y ed $\tilde{y}$ assumerebbero lo stesso valore y_1 in x_1, ed essendo (x_1, y_1) interno ad A, potremmo trovare $\rho > 0$ tali che $[x_1 - \rho, x_1 + \rho]$ è contenuto in I_1 ed I_2, $U := [x_1 - \rho, x_1 + \rho] \times \overline{B}_\rho(y_1)$ è contenuto in A ed infine f è Lipschitziana in y su U. Ma allora, applicando il teorema di Teorema 3.12) otterremmo che y e $\tilde{y}$ devono coincidere in un certo intorno di x_1, e questo contraddirrebbe la massimalità di x_1.

In modo analogo si definisce x_2 come l'estremo inferiore dei punti x tali che y ed $\tilde{y}$ coincidono nell'intervallo $(x, x_0]$, e si dimostra che x_2 è l'estremo inferiore sia di I che di $\tilde{I}$.

Comportamento agli estremi: sia $y : (a, b) \to \mathbb{R}^k$ una soluzione massimale della (3.2), e sia $D \subset A$ un insieme limitato con distanza positiva da ∂A. Allora la chiusura di D è compatta e contenuta in A. Consideriamo ora la famiglia $\mathscr{F}$ delle palle aperte B contenute in A tali che f è limitata e Lipschitziana in y sulla palla $\hat{B}$ di uguale centro e raggio doppio. $\mathscr{F}$ è un ricoprimento aperto di $\overline{D}$, e quindi ne possiamo estrarne un sotto-ricoprimento finito $\mathscr{F}'$.

Supponiamo ora per assurdo che $(x, y(x)) \in D$ per valori di x arbitrariamente vicini a b (o, equivalentemente, ad a). Siccome $\mathscr{F}'$ è un ricoprimento finito di D, deve esistere una palla $B \in \mathscr{F}'$ tale che $(x, y(x)) \in B$ per valori di x arbitrariamente vicini a b. Indichiamo con r il raggio di B, con M ed L rispettivamente il massimo di $|f|$ e la costante di Lipschitz di f su $\hat{B}$, e poniamo

$$\delta := \frac{1}{2} \min \left\{ \frac{r}{2}, \frac{1}{L}, \frac{r}{2M} \right\} .$$

Prendiamo ora $x_0 \in (a, b)$ tale che $(x, y(x)) \in B$ e

$$x_0 > b - \delta . \tag{3.9}$$

Posto $\rho := r/2$, si ha che $U := [x_0 - \rho, x_0 + \rho] \times \overline{B}_\rho(y(x_0))$ è contenuto in $\hat{B}$, per cui il massimo di $|f|$ e la costante di Lipschitz di f su U sono minori di M ed L rispettivamente. Quindi δ soddisfa l'ipotesi (3.4) del Teorema 3.12, e quindi possiamo trovare una soluzione massimale $\tilde{y}$ dell'equazione (3.2) definita *almeno* sull'intervallo $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ e che soddisfa la condizione iniziale $\tilde{y}(x_0) = y(x_0)$. Siccome $\tilde{y}$ e y concidono nel punto x_0, devono coincidere ovunque per il teorema di unicità (già dimostrato), e quindi il dominio di y deve contenere il segmento $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. Ne consegue che $x_0 + \delta \leq b$, ma questo contraddice la (3.9). $\square$

Dimostrazione del Teorema 3.10. - Questa dimostrazione è molto simile a quella della seconda parte del Teorema 3.8. Sia dunque $y : (a, b) \to \mathbb{R}^k$ una soluzione massimale di (3.2), e supponiamo per assurdo che b sia interno ad I. (L'altro caso, e cioè a interno a I, si tratta in modo analogo.)

Allora esiste $r > 0$ tale che $[b - r, b + r]$ è contenuto in I ed f risulta Lipschitziana in y sulla striscia $[b - r, b + r] \times \mathbb{R}^k$, con costante di Lipschitz L. Poniamo

$$\delta := \frac{1}{2} \min \left\{ \frac{\rho}{2}, \frac{1}{L} \right\} ,$$

e prendiamo $x_0 \in (a, b)$ tale che

$$x_0 > b - \delta \ . \tag{3.10}$$

Posto $\rho := r/2$, si ha che $U := [x_0 - \rho, x_0 + \rho] \times \mathbb{R}^k$ è contenuto in $[b - r, b + r] \times \mathbb{R}^k$, per cui la costante di Lipschitz di f su U è minore di L. Poiché δ soddisfa l'ipotesi (3.4) del Teorema 3.12, possiamo trovare una soluzione massimale $\tilde{y}$ dell'equazione (3.2) definita *almeno* sull'intervallo $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ e che soddisfa la condizione iniziale $\tilde{y}(x_0) = y(x_0)$. Siccome $\tilde{y}$ e y concidono nel punto x_0, devono coincidere ovunque (Teorema 3.8), e quindi $x_0 + \delta \le b$, ma questo contraddice la seconda disuguaglianza in (3.10). □

3.14. Equazioni di ordine superiore. - Dato A aperto di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^k$, ed $f : A \to \mathbb{R}$ continua, consideriamo l'equazione differenziale di ordine k

$$D^k y = f(x, y, Dy, \dots, D^{k-1}) \ . \tag{3.11}$$

Si vede subito che se $y : I \to \mathbb{R}$ risolve la (3.11), allora la funzione vettoriale $u : I \to \mathbb{R}^k$ data da $u := (y, Dy, \dots, D^{k-1}y)$ risolve il sistema di equazioni

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = u_2 \\ \dot{u}_2 = u_3 \\ \quad \vdots \\ \dot{u}_{k-1} = u_k \\ \dot{u}_k = f(x, u_1, \dots, u_{k-1} \end{cases} \tag{3.12}$$

e viceversa, se $u : I \to \mathbb{R}^k$ risolve la (3.12), allora la funzione $y := u_1$ risolve la (3.11). In altre parole, c'è una perfetta equivalenza tra l'equazione di ordine k (3.11) ed il sistema di k equazioni del primo ordine (3.12). La corrispondenza si estende ai rispettivi problemi ai Cauchy: imporre su y la condizione iniziale

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ Dy(x_0) = y_1 \\ \quad \vdots \\ D^{k-1}y(x_0) = y_{k-1} \end{cases}$$

equivale ad imporre su u la condizione

$$u(x_0) = u_0$$

con $u_0 := (y_0, \dots, y_{n-1})$. Utilizzando questa corrispondenza è possibile derivare i teoremi di esistenza ed unicità per le equazioni di ordine k a partire dai Teoremi 3.8 e 3.10.

3.15. Sistemi ed equazioni lineari. - Sia A un'aperto della forma $I \times \mathbb{R}^k$ e sia $f : A \to \mathbb{R}^k$. L'equazione (3.3) si dice lineare se la funzione f risulta affine nella variabile y per ogni x, ovvero se si può scrivere come $f(x, y) = A(x)\, y + b(x)$ con $A : I \to \mathbb{R}^{k \times k}$ e $b : I \to \mathbb{R}^k$ funzioni continue. In altre parole, si tratta di equazioni – o più precisamente sistemi di equazioni – della forma

$$\dot{y} = Ay + b \ .$$

Si noti che le ipotesi del Teorem 3.10 sono verificate da questa equazione, e quindi le soluzioni massimali sono definite su tutto I.
Analogamente, diciamo che un'equazione di ordine k è lineare se si scrive nella forma

$$D^k y + a_{k-1} D^{k-1} y + \cdots + a_1 Dy + a_0 y = b$$

con $a_0, a_1, \dots, a_k, b$ funzioni reali continue su un dato intervallo aperto I. Queste equazioni possono essere riscritte come sistemi del primo ordine lineari (cfr. §3.14) e quindi le soluzioni massimali sono definite su tutto I.

Esercizi

3.16. - Dimostrare che f è localmente Lipschitziana in A se e solo se f è Lipschitziana su ogni insieme compatto K contenuto in A. (Quest'ultima proprietà viene talvolta data come definizione di Lipschitzianità locale.)

3.17. - Dimostrare che se A è un aperto convesso di $\mathbb{R}^k$ ed f è una funzione differenziabile ovunque su A, allora f è Lipschitiziana se (e solo se) il gradiente di f è limitato. Ne consegue che dato un aperto A qualunque, ogni funzione $f \in C^1(A)$ è localmente Lipschitziana.

3.18. - Fare vedere che per ogni f di classe C^1 su A aperto convesso vale

$$\mathrm{Lip}(f) = \sup_{x \in A} |Df(x)| \ . \tag{3.13}$$

[*Suggerimento: per ottenere la diseguaglianza* $\leq$ *usare (ben nota) identità*

$$f(y) - f(x) \leq \int_0^1 \nabla f((1-t)x + ty) \cdot (x-y)\, dt \ .$$

Per ottenere la disuguaglianza opposta prendere come x *il punto in cui* $|\nabla f(x)|$ *assume valore massimo (o quasi), e prendere come* y *punti del tipo* $x + t\nabla f(x)$ *con* t *piccolo.*]

3.19*. - Far vedere che se A è connesso ma non è convesso, allora la (3.13) non vale, ma si ha solo

$$\mathrm{Lip}(f) \geq \sup_{x \in A} |Df(x)| \ .$$

Dimostrare che se A è un aperto tale che la (3.13) vale per ogni f Lipschitziana di classe C^1, allora A è convesso.

3.20*. - Discutere l'estensione degli esercizi precedenti alle funzioni f vettoriali. In questo caso si deve prima dire cosa si intende per norma di una matrice $M \in \mathbb{R}^{k \times n}$: la scelta usuale è la norma euclidea, cioè

$$|M| := \Big(\sum_{ij} M_{ij}^2 \Big)^{1/2} \ ,$$

dove M_{ij} sono le coordinate della matrice M. Un'altra scelta di uso frequente è

$$\|M\| := \sup \big\{ |Mv| : \ v \in \mathbb{R}^n, \ |v| \leq 1 \big\} \ .$$

3.21*. - dare un esempio di insieme aperto connesso A in $\mathbb{R}^2$ per cui l'equivalenza "f Lipschitziana $\Leftrightarrow$ $|Df|$ è limitata" nom vale per tutte le funzioni f di classe C^1.

3.22. - Tenendo presenti le definizioni date in §3.2, dimostrare che:
(i) se la chiusure di C e D si intersecano allora $\mathrm{dist}\,(C, D) = 0$;
(ii) se C è chiuso e D è compatto, allora $\mathrm{dist}\,(C, D) = 0$ se e solo se $C \cap D \neq \varnothing$;
(iii) nel punto (ii), l'ipotesi che uno tra C e D sia compatto è necessaria.

3.23*. - Esiste una nozione di distanza tra insiemi, dovuta ad Hausdorff, che soddisfa gli assiomi della distanza: dati C, D sottoinsiemi non vuoti dello spazio metrico X, si ponga

$$\delta(C, D) := \sup_{x \in C} \ \mathrm{dist}\,(x, D) + \sup_{y \in D} \ \mathrm{dist}\,(y, C) \ .$$

Dimostrare che $\delta(C, D)$ è effettivamente una distanza sullo spazio $\mathscr{F}$ dei sottoinsiemi chiusi non vuoti di X (se si vuole una distanza che non assume il valore $+\infty$, basta sostituire $\delta(C, D)$

con la troncata $\delta'(C,D) := \min\{\delta(C,D),1\})$. Dimostrare poi che se X è compatto allora $\mathscr{F}$ è compatto.

3.24*. - Dimostrare quanto affermato nell'Osservazione 3.5 senza utilizzare il Lemma di Zorn né l'assioma della scelta.

3.25. - Dimostrare quanto affermato nelle Osservazioni 3.9(iii-v).

3.26. - Sia I un intervallo aperto di $\mathbb{R}$, ed $f : I \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ una funzione continua. Dimostrare che $f$soddisfa le ipotesi del Teorem 3.10 – ovvero f è Lipschitziana su $J \times \mathbb{R}^k$ per ogni intervallo chiuso J contenuto in I – se e solo se esiste una funzione continua $L : I \to [0,+\infty)$ tale che

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq L(x)\,|y_1 - y_2| \quad \text{per ogni } x \in I,\ y_1, y_2 \in \mathbb{R}^k.$$

3.27. - Dimostrare quanto affermato nell'Osservazione 3.11.

3.28*. - Sia E un qualunque sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$. Dimostrare che lo spazio X delle funzioni $f : E \to \mathbb{R}^k$ continue e *limitate*, dotato della norma del sup, è uno spazio di Banach. Dimostrare quindi che il sottoinsieme Y delle funzioni a valori in un insieme assegnato $C \subset \mathbb{R}^k$ è chiuso in X se e solo se C è chiuso in $\mathbb{R}^k$.

3.29. - Sia I un intervallo aperto di $\mathbb{R}$ e sia $\alpha : I \to (0,+\infty)$ una funzione continua e positiva. Indichiamo con X_α lo spazio delle funzioni continue $y : I \to \mathbb{R}^k$ tali che

$$\phi_\alpha(y) := \sup_{x\in I} \frac{|y(x)|}{\alpha(x)} < +\infty\ . \tag{3.14}$$

Dimostrare che ϕ_α è una norma completa su X_α.

3.30. - Prendiamo I ed f come nell'enunciato del Teorema 3.10, L come nell'Esercizio 3.26, e α, ϕ_α e X_α come nell'Esercizio 3.29.
(i) Dimostrare che l'operatore T definito in (3.6) soddisfa, per ogni $y_1, y_2 \in X_\alpha$,

$$\big|[Ty_1](x) - [Ty_2](x)\big| \leq \left[\int_{x_0}^{x} L(t)\,\alpha(t)\,dt\right]\phi_\alpha(y_1 - y_2) \quad \text{per ogni } x \geq x_0. \tag{3.15}$$

(ii)* Far vedere che è sempre possibile scegliere α in modo tale che T risulti una contrazine su X_a. Questo permette di ottenere una dimostrazione diretta del Teorema 3.10 a partire dal Teorema delle Contrazioni.

Capitolo 4. Lemma di Gronwall e applicazioni

[versione: 7 marzo 2004]

Il lemma di Gronwall è uno strumento fondamentale nello studio delle proprietà qualitative delle soluzioni delle equazioni differenziali, o dei sistemi di equazioni differenziali, del primo ordine. Da esso derivano il teorema di dipendenza continua dai dati iniziali (Teorema 4.4) ed il teorema di confronto (Teorema 4.7). Se ne può inoltre ricavare facilmente il teorema di unicità (Osservazione 4.5(ii)) ed il teorema di esistenza globale sotto ipotesi più generali di quello dato nel capitolo precedente (cfr. Esercizi 4.11 e 4.12).
Rimandiamo all'Esercizio 4.10 per una versione più generale del Lemma di Gronwall.

In tutto questo capitolo, I è un intervallo di $\mathbb{R}$, non necessariamente limitato né aperto.

4.1. Lemma di Gronwall (per funzioni reali). - *Sia $v : I \to \mathbb{R}$ una funzione reale di classe C^1. Supponiamo che esistano $x_0 \in I$ ed $a \in \mathbb{R}$ tali che*

$$\dot v \le av \quad \textit{per ogni } x \ge x_0. \tag{4.1}$$

Allora

$$v \le v(x_0)e^{a(x-x_0)} \quad \textit{per ogni } x \ge x_0. \tag{4.2}$$

Dimostrazione. - Si procede come per la risoluzione dell'equazione lineare $\dot v = av$: scrivendo la (4.1) come $\dot v - av \le 0$ e moltiplicando per il fattore integrante e^{-ax} otteniamo $e^{-ax}\dot v - ae^{-ax}v \le 0$, ovvero

$$D\big(e^{-ax}v\big) \le 0\ .$$

Integrando entrambi i termini di questa disequazione tra x_0 ed x e ricaviamo

$$e^{-ax}v(x) - e^{-ax_0}v(x_0) \le 0\ ,$$

che è proprio la (4.2). □

4.2. Lemma di Gronwall (per funzioni vettoriali). - *Sia $u : I \to \mathbb{R}^k$ una funzione di classe C^1. Supponiamo che esistano $x_0 \in I$ ed $a \in \mathbb{R}$ tali che*

$$|\dot u| \le a|u| \quad \textit{per ogni } x \ge x_0. \tag{4.3}$$

Allora

$$|u| \le |u(x_0)|e^{a(x-x_0)} \quad \textit{per ogni } x \ge x_0. \tag{4.4}$$

Dimostrazione. - L'idea è di applicare il Lemma 4.1 alla funzione reale $v := |u|$.
Vedendo v come la composizione della funzione $x \mapsto u(x)$ e della funzione $y \mapsto |y|$, che è continua su tutto $\mathbb{R}^k$ e differenziabile tranne che nell'origine, otteniamo che v è continua su I e derivabile in tutti i punti in cui u non si annulla. Siccome il gradiente di $|y|$ è $y/|y|$, per la regola di derivazione delle funzioni composte abbiamo

$$\dot v = \frac{u}{|u|}\cdot \dot u \le \left|\frac{u}{|u|}\right| |\dot u| = |\dot u|\ .$$

Pertanto la disuguaglianza (4.3) implica

$$\dot{v} \leq av \ ,$$

a applicando il Lemma 4.1 alla funzione v otteniamo la (4.2). □

4.3. Osservzioni. - (i) Nel caso che la disuguaglianza $|\dot{u}| \leq a|u|$ valga per ogni $x \leq x_0$ si ha

$$|u| \leq |u(x_0)|e^{a|x-x_0|} \quad \text{per ogni } x \leq x_0. \tag{4.5}$$

Per dimostrare la (4.5) basta osservare che, posto $w(x) := u(x_0 - x)$, si ha $|\dot{w}| \leq a|w|$ per $x \geq 0$, ed applicare quindi Lemma 4.2 alla funzione w (con 0 al posto di x_0).
(ii) La dimostrazione del Lemma 4.2 non è completa: per usare il Lemma 4.1 avremmo bisogno di sapere che $v = |u|$ è di classe C^1, ma per quanto ne sappiamo v è derivabile (con continuità) solo nell'insieme (aperto) dei punti in cui non si annulla. Tuttavia si può dimostrare (cfr. Esercizio 4.9) che se $v(x_1) = 0$ per qualche $x_1 \geq x_0$, allora $v(x) = 0$ per ogni $x \geq x_1$, ed è quindi facile vedere che la stima (4.4) vale anche quando v si annulla in qualche punto (anzi!).

4.4. Teorema di dipendenza continua dai dati iniziali. - *Sia I un intervallo aperto, e sia $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una funzione continua e Lipschitziana nella seconda variabile con costante di Lipschitz C. Date y_1, y_2 soluzioni dell'equazione $\dot{y} = f(x, y)$ e dato $x_0 \in I$, allora*

$$|y_1(x) - y_2(x)| \leq |y_1(x_0) - y_2(x_0)|\, e^{C|x-x_0|} \quad \textit{per ogni } x \in I. \tag{4.6}$$

Dimostrazione. - Poniamo $u := y_1 - y_2$. Allora $\dot{u} = \dot{y}_1 - \dot{y}_2 = f(x, y_1) - f(x, y_2)$ e quindi

$$|\dot{u}| \leq C|y_1 - y_2| = C|u| \ .$$

Pertanto $|u| \leq |u(x_0)|e^{C|x-x_0|}$ per ogni $x \in I$ per via del Lemma 4.2 (e dell'Osservazione 4.3(i)).
□

4.5. Osservazioni. - (i) Ogni soluzione massimale dell'equazione $\dot{y} = f(x, y)$ è definita su tutto I per via del Teorema di esistenza globale visto nel capitolo precedente.
(ii) Dalla stima (4.5) otteniamo che se y_1 e y_2 coincidono in x_0, allora coincidono su tutto I. Questa è una dimostrazione alternativa dell'enunciato di unicità (locale) per le equazioni differenziali ordinarie.
(iii) Il teorema di dipendenza continua dai dati iniziali è più noto nella seguente due versione: *Sia (z_n) una successione in $\mathbb{R}^k$ che converge a z_∞, e per ogni n sia $y_n : I \to \mathbb{R}^k$ la soluzione dell'equazione $\dot{y} = f(x, y)$ con dato iniziale iniziale $y(x_0) = z_n$. Allora y_n converge a uniformememente a y_∞ su ogni sottointervallo limitato di I.* Un altro modo di enunciarlo è questo: *sia $\Phi : I \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ la funzione ottenuta ponendo $\Phi(x, z)$ uguale a $y(x)$ soluzione dell'equazione con dato iniziale $y(x_0) = z$, ovvero*

$$\begin{cases} \partial_x \Phi(x, z) = f(x, \Phi(x, z)) & \textit{per ogni } x \in I,\ z \in \mathbb{R}^k, \\ \Phi(x_0, z) = z & \textit{per ogni } z \in \mathbb{R}^k. \end{cases}$$

Allora Φ è una funziona continua su $I \times \mathbb{R}^k$. Entrambi gli enunciati seguono dalla (4.6).
(iv) Il teorema di dipendenza continua dai dati vale in ipotesi più generali di quelle del Teorema 4.4. Si può infatti dimostrare quanto segue: *data $f : A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ funzione continua e localmente Lipschitziana nella seconda variabile, e dato x_0 appartenente alla proiezione di A su $\mathbb{R}$, costruiamo la funzione Φ come nel punto precedente, ponendo cioè $\Phi(x, z)$ uguale a $y(x)$*

soluzione dell'equazione con dato iniziale $y(x_0) = z$ per ogni z tale che $(x_0, z) \in A$ e per ogni x per cui tale soluzione esiste. Allora il dominio di definizione di Φ è un aperto di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^k$ e Φ è continua.

4.6. Teorema del confronto, I. - *Sia $f : A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ una funzione continua, siano y, z funzioni di classe C^1 su un intervallo I tali che*
(i) *y risolve l'equazione $\dot{y} = f(x, y)$;*
(ii) *z risolve la disequazione $\dot{z} > f(x, z)$;*
(iii) *$z(x_0) \geq y(x_0)$ per un qualche $x_0 \in I$.*

Allora $z(x) > y(x)$ per ogni $x > x_0$.

Dimostrazione. - L'idea è semplice: nel primo punto $x_1 > x_0$ in cui y e z assumono lo stesso valore dovremmo avere $\dot{y}(x_1) \geq \dot{z}(x_1)$, mentre (i) ed (ii) implicano la diseguaglianza opposta, e quindi tale x_1 non può esistere.
Passiamo ad una dimostrazione dettagliata, cominciando dal caso $z(x_0) > y(x_0)$. L'insieme dei punti $x \geq x_0$ tali che $z(x) \leq y(x)$ è chiuso, e se per assurdo non fosse vuoto, allora ammetterebbe un elemento minimo x_1. Siccome $z(x) > y(x)$ per $x \in (x_0, x_1)$, e $z(x_1) = y(x_1)$,

$$\frac{z(x_1) - z(x)}{x_1 - x} < \frac{y(x_1) - y(x)}{x_1 - x} \quad \text{per } x \in (x_0, x_1),$$

e passando al limite per $x \to x_1^-$ otteniamo

$$\dot{z}(x_1) \leq \dot{y}(x_1) \ .$$

Ma per via di (i) ed (ii) deve valere anche la disuguaglianza opposta: $\dot{z}(x_1) > f(x_1, z(x_1)) = f(x_1, y(x_1)) = \dot{y}(x_1)$.
Supponiamo ora che $z(x_0) = y(x_0)$. In tal caso $\dot{z}(x_0) > f(x_0, z(x_0)) = f(x_0, y(x_0)) = \dot{y}(x_0)$, quindi $z > y$ in un intorno destro di x_0 e possiamo ricondurci al caso precedente prendendo al posto di x_0 un punto in questo intorno. $\square$

4.7. Teorema del confronto, II. - *Sia $f : A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ una funzione continua e localmente Lipschitziana, siano y, z funzioni di classe C^1 su un intervallo I tali che*
(i) *y risolve l'equazione $\dot{y} = f(x, y)$;*
(ii) *z risolve la disequazione $\dot{z} \geq f(x, z)$;*
(iii) *$z(x_0) \geq y(x_0)$ per un qualche $x_0 \in I$.*

Allora $z(x) \geq y(x)$ per ogni $x > x_0$.

Dimostrazione. - L'insieme dei punti $x > x_0$ tali che $z(x) < y(x)$ è aperto, e se per assurdo non fosse vuoto, allora potremmo prenderne una componente connessa $(x_1, x_1 + \delta)$, ovvero un intervallo massimale in esso contenuto.
In un opportuno intorno U di $(x_1, y(x_1))$ la funzione f è Lipschitziana nella seconda variabile, e possiamo trovare $0 < \delta' \leq \delta$ tale che $(x, y(x))$ ed $(x, z(x))$ appartengono a U per $x \in [x_1, x_1 + \delta')$. Indichiamo con C la costante di Lipschitz di f in U, e poniamo $v := y - z$. Per ogni $x \in [x_1, x_1 + \delta')$ abbiamo quindi

$$\dot{v} = \dot{y} - \dot{z} \leq f(x, y) - f(x, z) \leq C|y - z| = C(y - z) = Cv \ ,$$

e siccome $v(x_1) = 0$, il Lemma 4.1 implica $v \leq 0$ in $[x_1, x_1 + \delta')$, vale a dire $z \geq y$, in contraddizione col fatto che $z < y$ in $(x_1, x_1 + \delta)$. $\square$

4.8. Osservazioni. - (i) Modificando appena la dimostrazione precedente, si riesce anche a far vedere che se $z(x_0) > y(x_0)$, allora $z(x) > y(x)$ per ogni $x \geq x_0$.

(ii) Una funzione $z : I \to \mathbb{R}$ tale che $\dot{z} \geq f(x, z)$ su I viene talvolta chiamata una *soprasoluzione* dell'equazione differenziale $\dot{y} = f(x, y)$. Viceversa, una funzione che soddisfa $\dot{z} \leq f(x, z)$ viene chiamata *sottosoluzione*. In particolare ogni soluzione è sia sopra- che sottosoluzione.
(iii) Il Teorema 4.7 può essere enunciato: in una forma leggermente più generale: *se z ed y sono una sopra- ed una sottosoluzione dell'equazione definite su I, e $z(x_0) \geq y(x_0)$ per qualche $x_0 \in I$, allora $z(x) \geq y(x)$ per ogni $x \geq x_0$ (e se $z(x_0) > y(x_0)$ allora $z(x) > y(x)$).* La dimostrazione è esattamente la stessa del Teorema 4.7.
(iv) La versione "per il passato" del teorema del confronto è questa: *se z ed y sono una sopra- ed una sottosoluzione dell'equazione, e $z(x_0) \leq y(x_0)$ allora $z(x) \leq y(x)$ per ogni $x \leq x_0$ (e se $z(x_0) < y(x_0)$ allora allora $z(x) < y(x)$).*

Esercizi

4.9. - Sia $v : I \to \mathbb{R}$ una funzione positiva e continua, derivabile con continuità nell'insieme $A := \{x : \ v(x) > 0\}$ e che ivi soddisfa $\dot{v} \leq av$, con $a \in \mathbb{R}$. Dimostrare che v se $v(x_1) = 0$ per qualche x_1, allora $v(x) = 0$ per ogni $x \geq x_1$.
[*Supponiamo per assurdo che esista $\bar{x} > x_1$ tale che $v(\bar{x}) > 0$. Prendiamo x_2 il massimo degli $x \leq \bar{x}$ tali che $v(x) = 0$. La funzione v è allora di classe C^1 su $(x_2, \bar{x}]$ e quindi per il Lemma 4.1 abbiamo che $v(\bar{x}) \leq v(x_0)e^{a(\bar{x}-x_0)}$ per ogni $x_0 \geq x_2$, e siccome $v(x_0)$ converge a $v(x_2) = 0$ per $x_0 \to x_2$, passando al limite nella disuguaglianza otteniamo infine $v(\bar{x}) = 0$.*]

4.10. - Dimostrare la seguenti generalizzazioni del lemma di Gronwall.
(i) Sia $v : I \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 che soddisfa

$$\dot{v} \leq av + b \quad \text{per } x \geq x_0,$$

dove $x_0 \in I$ e a, b sono funzioni continue su I. Allora

$$v \leq e^{A(x)} \left[v(x_0) + \int_{x_0}^{x} b(t)e^{-A(t)}\, dt \right] \quad \text{per } x \geq x_0,$$

dove A è una primitiva di a che vale 0 in x_0.
(ii) Sia $u : I \to \mathbb{R}^k$ una funzione vettoriale che soddisfa

$$|\dot{u}| \leq a|u| + b \quad \text{per } x \geq x_0 \text{ (risp., } x \leq x_0).$$

Allora

$$|u| \leq e^{A(x)} \left[|u(x_0)| + \int_{x_0}^{x} b(t)e^{-A(t)}\, dt \right] \quad \text{per } x \geq x_0.$$

4.11. - Sia I un intervallo aperto, e sia $f : I \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ una funzione continua e localmente Lipschitziana nella seconda variabile che soddisfa

$$|f(x, y)| \leq a(x)|y| + b(x) \quad \text{per ogni } x \in I,\ y \in \mathbb{R}^k,$$

con a, b funzioni continue e positive su I. Dimostrare che ogni soluzione massimale dell'equazione $\dot{y} = f(x, y)$ è definita su tutto I.
[*Sia $y : (c, d) \to \mathbb{R}^k$ una soluzione massimale, e supponiamo per assurdo che d sia strettamente più piccolo dell'estremo superiore di I – il caso in cui c è strettamente maggiore dell'estremo inferiore di I si tratta in modo analogo. Il teorema di esistenza ed unicità delle soluzioni massimali visto nel capitolo precedente ci dice allora che $|y(x)|$ tende a $+\infty$ per $x \to d^-$. D'altra parte questo contraddice la stima per $|y|$ che si ottiene tramite l'Esercizio 4.10(ii).*]

4.12. - Sia I un intervallo aperto, e sia $f : I \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ una funzione che soddisfa le ipotesi del Teorema di esistanza globale dimostrato nel capitolo precedente. Dimostrare che esistono delle funzioni continue e positive a e b su I tali che

$$|f(x, y)| \leq a(x)|y| + b(x) \quad \text{per ogni } x \in I,\ y \in \mathbb{R}^k.$$

Ne consegue che il risultato dimostrato nell'Esercizio 4.11 include come caso particolare il Teorema di esistenza globale.

4.13. - Dimostrare le varianti del teorema del confronto elencate nel Paragrafo 4.8.

Capitolo 5. Esponenziale di matrici

[versione: 9 marzo 2004]

Definiamo l'esponenziale e^A per tutte le matrici quadrate A come somma dell'usuale serie esponenziale. Usando questa funzione è possibile estendere la nota formula risolutiva per le equazioni lineari del primo ordine ai sistemi di equazioni lineari del primo ordine.

5.1. Definizione. - Sia k un intero positivo. Per ogni matrice quadrata $A \in \mathbb{R}^{k\times k}$ poniamo

$$e^A := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \ . \tag{5.1}$$

In questa definizione si segue la convenzione $A^0 = I$ per ogni A, con I la matrice identità.

Prima di determinare le proprietà dell'esponeziale di matrici, dobbiamo chiederci se la precedente definizione è ben posta. Per far questo, dobbiamo prima specficare alcuni dettagli riguardo alla norma nello spazio delle matrici.

5.2. Lo spazio delle matrici. - Indichiamo con $\mathbb{R}^{k\times k}$ lo spazio vettoriale delle matrici $k \times k$. Data $A \in \mathbb{R}^{k\times k}$, la coordinata A_{ij} di indici i, j, compresi tra 1 ed k, corrisponde come al solito al coefficiente nella riga i e colonna j. Su $\mathbb{R}^{k\times k}$ consideriamo la solita norma euclidea

$$|A| := \Big(\sum_{ij} |A_{ij}|^2 \Big)^{1/2} \ .$$

Oltre alle solite proprietà della norma, abbiamo che

$$|AB| \le |A|\,|B| \tag{5.2}$$

per ogni coppia di matrici A, B (Esercizio 5.9).

5.3. L'esponenziale è ben definito. - Come in tutti gli spazi normati completi, una serie di matrici $\sum A_n$ converge – cioè la successione delle somme parziali converge – se converge *assolutamente* – cioè se la serie dei moduli $\sum |A_n|$ è finita. In tal caso si ha anche $|\sum A_n| \le \sum |A_n|$. Nel caso specifico della serie (5.1) abbiamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{A^n}{n!} \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|A^n|}{n!} \le \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|A|^n}{n!} = e^{|A|} < +\infty \ .$$

Quindi la serie converge, ed inoltre

$$|e^A| \le e^{|A|} \ .$$

5.4. Continuità dell'esponenziale. - Le funzioni $A \mapsto A^n/n!$ sono tutte continue (Esercizio 5.10), e la loro serie converge *totalmente* su ogni palla B_r di centro l'origine e raggio r nello spazio delle matrici. Infatti la stessa stima di prima dà anche

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{|A|\le r} \left| \frac{A^n}{n!} \right| \le \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{n!} = e^r < +\infty \ .$$

Ne consegue che la funzione $A \mapsto e^A$ è continua su B_r per ogni $r > 0$, ed quindi è continua su tutto $\mathbb{R}^{k\times k}$.

La serie che definisce l'esponenziale di matrici è una serie di potenze con raggio di convergenza $+\infty$. In analogia con la teoria delle serie di potenze di numeri reali (o complessi), uno si aspetterebbe che la mappa $A \mapsto e^A$ fosse di classe C^∞ su tutto $\mathbb{R}^{k\times k}$. In effetti le cose stanno così, tuttavia per dimostralo bisognerebbe sviluppare la teoria delle serie di potenze sullo spazio delle matrici (o più in generale su un algebra normata).

Elenchiamo ora le proprietà fondamentali dell'esponenziale.

5.5. Proposizione. - *Se A e B sono matrici $k \times k$ che commutano, allora*

$$e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A \ . \tag{5.3}$$

Dimostrazione. - Si vede subito che

$$e^A\, e^B = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}\Big)\Big(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{B^m}{m!}\Big) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^n B^m}{n!m!} \ . \tag{5.4}$$

Inoltre, usando il binomio di Newton (Esercizio 5.11) e l'identità $\binom{h}{n} = \dfrac{h!}{n!(h-n)!}$,

$$e^{A+B} = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(A+B)^h}{h!} = \sum_{h=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{h} \frac{A^n B^{h-n}}{n!(h-n)!} \ . \tag{5.5}$$

Ora è facile convincersi che le somme in (5.4) e (5.5) hanno gli stessi addendi, e quindi coincidono. $\square$

Ad essere precisi, il fatto che le serie in (5.4) e (5.5) dipende dal fatto che convergono assolutamente, e quindi l'ordine di sommazione non conta. L'ipotesi che A e B commutano è necessario per utilizzare il binomio di Newton. Senza questa ipotesi, la (5.3) potrebbe non valere (cfr. Esercizio 5.4).

5.6. Proposizione. - *Sia A una matrici $k \times k$, allora la funzione che ad ogni $x \in \mathbb{R}$ associa la matrice e^{Ax} è derivabile per ogni $x \in \mathbb{R}$ e*

$$\frac{d}{dx} e^{Ax} = A\, e^{Ax} \ . \tag{5.6}$$

Dimostrazione. - Calcoliamo il rapporto incrementale della funzione in x:

$$\frac{e^{A(x+h)} - e^{Ax}}{h} = \frac{e^{Ah}e^{Ax} - e^{Ax}}{h} = \frac{e^{Ah} - I}{h} e^{Ax} = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n}{n!} h^{n-1}\Big) e^{Ax} \ ,$$

e quando $h \to 0$, la serie tra parentesi converge ad A perché si tratta di una funzione continua di h che in 0 vale A. $\square$

5.7. Teorema. - *Consideriamo il problema di Cauchy associato ad un generico sistema di k equazioni lineari del primo ordine a coefficienti costanti, ovvero*

$$\begin{cases} \dot y = Ay + b \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

con A matrice $k \times k$, $b : I \to \mathbb{R}^k$ funzione continua, $x_0 \in I$ e $y_0 \in \mathbb{R}^k$. La soluzione è data dalla formula

$$y(x) = e^{A(x-x_0)}\left[y_0 + \int_{x_0}^{x} e^{-A(t-x_0)} b(t)\, dt\right] \quad \textit{per ogni } t \in I. \tag{5.7}$$

DIMOSTRAZIONE. - Sicomme l'esponenziuale della matrice nulla è la matrice identità, si vede subito che $y(x_0) = y_0$. Calcoliamo ora la derivata di $y(x)$: applicando la regola di derivazione del prodotto (Esercizio 5.13) si ottiene

$$\begin{aligned}
\dot{y}(x) &= \frac{d}{dx}(e^{A(x-x_0)})\Big[y_0 + \cdots\Big] + e^{A(x-x_0)}\frac{d}{dx}\left[y_0 + \int_{x_0}^{x} e^{-A(t-x_0)} b(t)\, dt\right] \\
&= A\, e^{A(x-x_0)}\Big[y_0 + \cdots\Big] + e^{A(x-x_0)}\Big[e^{-A(x-x_0)} b(x)\Big] \\
&= Ay(x) + b(x)\ .
\end{aligned}$$

(La derivata dell'esponenziale è stata calcolata utilizzando la formula (5.6); la derivata dell'integrale segue dal teorema fondamentale del calcolo; nell'ultimo passaggio abbiamo usato l'identità $e^B e^{-B} = e^0 = I$, cfr. formula (5.3)). □

5.8. CALCOLO ESPLICITO DELL'ESPONENZIALE. - Calcolare l'esponenziale e^A direttamente a partire dalla definizione può essere molto complicato. Si cerca quindi di ricondursi tramite alcune riduzioni al calcolo dell'esponenziale di matrici più semplici. Per alcune matrici elementari, tuttavia, il calcolo viene fatto (una volta per tutte) a partire dalla definizione. Elenco qui di seguito la formula dell'esponenziale per alcune classi di matrici particolarmente significative, e le regole di calcolo più utili.

Matrici diagonali:

$$\exp\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_k} \end{pmatrix} .$$

Matrici nilpotenti: se $A^n = 0$ per qualche n, allora la serie nella definizione di e^A (ed anche di e^{Ax}) si riduce ad una somma finita.

Un caso particolarmente interessante sono le matrici sopradiagonali che appaiono nella forma canonica di Jordan:. Ad esempio

$$\exp\begin{pmatrix} 0 & t & & & \\ & 0 & t & & \\ & & 0 & t & \\ & & & 0 & t \\ & & & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 & t^3/3! & t^4/4! \\ & 1 & t & t^2/2 & t^3/3! \\ & & 1 & t & t^2/2 \\ & & & 1 & t \\ & & & & 1 \end{pmatrix} .$$

Matrici 2×2 antisimmetriche:

$$\exp\begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} .$$

Decomposizione in somma di matrici che commutano: se $A = A_1 + A_2$ e A_1 e A_2 commutano, allora $e^A = e^{A_1} e^{A_2}$ (Proposizione 5.5). Il calcolo di e^A si riduce quindi a quello di e^{A_1} e e^{A_2}. Ad esempio

$$\exp\begin{pmatrix} 3x & 2x & x^2 \\ & 3x & 2x \\ & & 3x \end{pmatrix} = \exp(3xI)\exp\begin{pmatrix} 0 & 2x & x^2 \\ & 0 & 2x \\ & & 0 \end{pmatrix} = e^{3x}\begin{pmatrix} 1 & 2x & 3x^2 \\ & 1 & 2x \\ & & 1 \end{pmatrix} .$$

Matrici diagonali a blocchi: quando A è una matrice $\mathbb{R}^{k\times k}$ della forma

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

con $A_1 \in \mathbb{R}^{k_1\times k_1}$ ed $A_2 \in \mathbb{R}^{k_2\times k_2}$ e $k_1 + k_2 = k$, allora

$$e^A = \begin{pmatrix} e^{A_1} & 0 \\ 0 & e^{A_2} \end{pmatrix} .$$

Usando quest'osservazione e le precedenti è possibile calcolare l'esponenziale di ogni matrice nella forma canonica di Jordan (complessa). Ad esempio

$$\exp\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ & 3 & 1 & 0 \\ & & 3 & 0 \\ & & & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^3 & e^3 & e^3/2 & 0 \\ & e^3 & e^3 & 0 \\ & & e^3 & 0 \\ & & & e^2 \end{pmatrix} .$$

Calcolo per coniugio: se A si scrive nella forma $A = R\tilde{A}R^{-1}$, allora $A^n = R\tilde{A}^nR^{-1}$ per ogni intero positivo n, e quindi $e^A = Re^{\tilde{A}}R^{-1}$. Inoltre $e^{Ax} = Re^{\tilde{A}x}R^{-1}$.
Qusta formula permette di calcolare l'esponenziale di A (e di Ax) a partire da quello della sua forma canonica di Jordan $\tilde{A}$. Un caso particolarmente semplice è quello della matrici diagonalizzabili, come ad esempio le matrici simmetriche o quelle il cui polinomio caratteristico ha soluzioni reali distinte. In tal caso R può essere costruita a partire dagli autovettori di A, che però vanno trovati esplicitamente (se A è simmetrica, allora è anche possibile prendere R ortonormale, ed in tal caso l'inversa di R coincide con la sua trasposta). Ad esempio, la matrice simmetrica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & -4 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

ha autovalori $1, 6, -4$, per cui

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 6 & \\ & & -4 \end{pmatrix} \quad , \quad e^{\tilde{A}x} = \begin{pmatrix} e^x & & \\ & e^{6x} & \\ & & e^{-4x} \end{pmatrix} .$$

Una possibile scelta per i corrispondenti autovettori è $(4, 0, -3)$, $(-3, 5, -4)$, e $(3, 5, 4)$. Rinormalizzandoli otteniamo le matrici di cambio di base

$$R = \frac{1}{5\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 4\sqrt{2} & -3 & 3 \\ 0 & 5 & 5 \\ -3\sqrt{2} & -4 & 4 \end{pmatrix} \quad , \quad R^{-1} = R^t = \frac{1}{5\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 4\sqrt{2} & 0 & -3\sqrt{2} \\ -3 & 5 & -4 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$e^{Ax} = Re^{\tilde{A}x}R^{-1} = \frac{1}{50} \begin{pmatrix} 32e^x + 9(e^{4x} + e^{6x}) & 15(e^{4x} - e^{6x}) & -24e^x + 12(e^{4x} + e^{6x}) \\ 15(e^{4x} - e^{6x}) & 25(e^{4x} + e^{6x}) & 20(e^{4x} - e^{6x}) \\ -24e^x + 12(e^{4x} + e^{6x}) & 20(e^{4x} - e^{6x}) & 18e^x + 16(e^{4x} + e^{6x}) \end{pmatrix} .$$

Esercizi

5.9. - Dimostrare la diseguaglianza (5.2). [*Per ogni i, j, il coefficiente $(AB)_{ij}$ è dato dal prodotto scalare del vettore riga A_i e del vettore colonna B^j, quindi*

$$|AB|^2 = \sum_{ij} |A_i \cdot B^j|^2 \leq \sum_{ij} |A_i|^2 |B^j|^2 = \Big(\sum_i |A_i|^2\Big)\Big(\sum_j |B^j|^2\Big) = |A|^2 |B|^2 \ ,$$

dove la disuguaglianza segue dalla disuguaglianza di Schwarz $|v \cdot w| \leq |v|\,|w|$.]

5.10. - Dimostrare che il prodotto di matrici, visto come funzione da $\mathbb{R}^{k\times k} \times \mathbb{R}^{k\times k}$ (dotato della topologia di spazio prodotto) in $\mathbb{R}^{k\times k}$, è continuo.

5.11. - Dimostrare che se A e B commutano, allora vale la solita formula del binomio di Newton:

$$(A+B)^h = \sum_{n=0}^{h} \binom{h}{n} A^n B^{h-n} \ .$$

5.12. - Siano A e B le matrici nilpotenti

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

Calcolare A^n, B^n e $(A+B)^n$ per ogni intero n, e scrivere esplicitamente e^A, e^B e e^{A+B}. Verificare che le matrici $e^A e^B$, $e^B e^A$, e^{A+B} sono tutte distinte.

5.13. - Siano $F : I \to \mathbb{R}^{n\times m}$ e $G : I \to \mathbb{R}^{m\times k}$ funzioni di classe C^1. Verificare che vale la solita regola di derivazione del prodotto per la funzione $FG : I \to \mathbb{R}^{n\times k}$:

$$(FG)' = F'G + FG' \ .$$

5.14. - Sia $F : I \to \mathbb{R}^{k\times k}$ una funzione di classe C^1. Dimostrare che se $F(x)$ e $F'(x)$ commutano per ogni $x \in I$ allora, dato n intero positivo,

$$(F^n)' = nF'F^{n-1} \ .$$

Dedurne la seguente generalizzazione della formula (5.6):

$$\big(e^F\big)' = F'\, e^F \ .$$

Verificare che la formula non vale per $F(x) := \begin{pmatrix} 0 & x \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

5.15. - Si consideri il problema di Cauchy associato ad un generico sistema di k equazioni lineari del primo ordine a coefficienti *non costanti*, vale a dire

$$\begin{cases} \dot{y} = Ay + b \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

con $A : I \to \mathbb{R}^{k\times k}$ e $b : I \to \mathbb{R}^k$ funzioni continue, $x_0 \in I$ e $y_0 \in \mathbb{R}^k$. Sia F una primitiva di A che vale 0 in x_0. Verificare che se $F(x)$ e $A(x)$ commutano per ogni $x \in I$ allora la soluzione del problema precedente è data dalla formula

$$y(x) = e^{F(x)}\left[y_0 + \int_{x_0}^{x} e^{-F(t)} b(t)\, dt\right] \quad \text{per ogni } t \in I.$$

5.16. - Calcolare e^{Ax} per $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$.

5.17. - Sia Φ l'applicazione da $\mathbb{C}$ in $\mathbb{R}^{2\times 2}$ che ad ogni numero complesso $z = x + iy$ associa la matrice

$$\Phi(z) = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} .$$

Verificare che Φ è un applicazione lineare che preserva il prodotto, ovvero $\Phi(z_1 z_2) = \Phi(z_1)\Phi(z_2)$. Verificare che $e^{\Phi(z)} = \Phi(e^z)$. Verificare infine che data $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olomorfa, allora la matrice $\Phi(f'(z))$ corrisponde alla matrice Hessiana di f, vista come mappa da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$, nel punto (x, y).

5.18*. - Dimostrare che la classe $\mathscr{F}$ delle matrici reali $k \times k$ diagonalizzabili in senso complesso è densa in $\mathbb{R}^{k\times k}$. Far vedere che questo non vale per la classe $\mathscr{G}$ delle matrici diagonalizzabili in senso reale. Qual è la chiusura di $\mathscr{G}$?

5.19*. - Dimostrare che per ogni matrice $A \in \mathbb{R}^{k\times k}$ si ha $\det(e^A) = e^{\mathrm{tr}(A)}$. [*Suggerimento: verificare che l'identità vale per le matrici diagonali, reali o complesse, ed estenderla per coniugio alle matrici diagonalizzabili. Estenderla quindi a tutte le matrici per densità.*]

5.20. - Verificare le asserzioni contenute nel Paragrafo 5.8.

Capitolo 6. Esercizi ed esempi

[versione: 4 aprile 2004]

Questa è una lista di esercizi sulle equazioni differenziali ordinarie, di cui alcuni sono in effetti importanti applicazioni della teoria. Per i più interessanti ho aggiunto una traccia delle soluzioni.

6.1. - Sia P un punto materiale nello spazio con massa m, velocità $\mathbf{v}$ e accelerazione $\mathbf{a}$. Supponiamo che P si muova secondo il campo di forza associato ad un dato potenziale V, vale a dire secondo l'equazione della dinamica $m\mathbf{a} = F$ con $F := -m\,\nabla V$. Dimostrare che l'energia meccanica

$$E := \frac{1}{2}m|\mathbf{v}|^2 + mV$$

si conserva nel tempo.

Soluzione. - Indichiamo con $x = x(t)$ la posizione di P al variare del tempo t. L'equazione della dinamica diventa allora

$$m\ddot{x} = -m\nabla V(x)$$

e prendendone il prodotto scalare per il vettore $\dot{x}$ si ottiene

$$\begin{aligned} 0 &= \big[m\ddot{x} + m\nabla V(x)\big] \cdot \dot{x} = m\dot{x} \cdot \ddot{x} + m\nabla V(x) \cdot \dot{x} \\ &= \frac{d}{dt}\Big[\frac{1}{2}m|\dot{x}|^2 + mV(x)\Big] = \frac{d}{dt}E \ . \end{aligned}$$ □

6.2. - Nelle stesse ipotesi dell'Esercizio 6.1, supponiamo che P sia anche sottoposto ad una forza di attrito lineare cioè una forza della forma $-m\alpha\mathbf{v}$, con α costante positiva. Dimostrare che in tal caso l'energia meccanica E decresce col tempo.

Soluzione. - L'equazione della dinamica è

$$m\ddot{x} = -m\nabla V(x) - m\alpha\dot{x} \ .$$

Procedendo come nell'Esercizio 6.1, si ottiene

$$\frac{d}{dt}E = -m\alpha|\dot{x}|^2 = -m\alpha|\mathbf{v}|^2 \ .$$ □

6.3. - Sia $f : I \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ una funzione localmente Lipschitziana nella seconda variabile, con $I = (a, b)$ intervallo aperto in $\mathbb{R}$, e sia $x : (a', b') \to \mathbb{R}^k$ una soluzione (massimale) del sistema di equazioni differenziali $\dot{x} = f(t, x)$. Dimostrare che se $b' < b$ (rispettivamente $a' > a$) allora $|x|$ tende ad infinito per $t \to b'$ (rispettivamente per $t \to a'$).

Soluzione. - Basta applicare il teorema di esistenza ed unicità delle soluzioni massimali. □

6.4. - Sia $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 che tende a $+\infty$ per $x \to \pm\infty$. Dimostrare ogni soluzione x dell'equazione

$$\ddot{x} + V'(x) = 0 \tag{6.1}$$

è definita su tutto $\mathbb{R}$ (cioè la soluzione esiste per tutti i tempi).

Soluzione. - Introducendo la variabile $y = \dot{x}$, si può scrivere l'equazione del secondo ordine (6.1) come un sistema di due equazioni del primo ordine:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \ , \\ \dot{y} = -V'(x) \ . \end{cases}$$

Si vede subito che la funzione ad esso associata, $f(t, x, y) = (y, -V'(x))$, è definita su tutto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ e di classe C^1. Tuttavia f non ha necessariamente crescita lineare in (x, y), ragion per cui non possiamo applicare il teorema di esistenza globale in nessune delle solite versioni.
Per quanto visto nell'Esercizio 6.3, ci basta però dimostrare che il modulo della funzione (x, y) non può tendere all'infinito in tempo finito, ovvero non ha asintoti verticali. Ora, per quanto visto nell'Esercizio 6.1, l'energia meccanica del sistema si conserva, ovvero la quantità

$$E := \frac{1}{2}\dot{x}^2 + V(x) = \frac{1}{2}y^2 + V(x) \tag{6.2}$$

risulta costante su tutto l'intervallo di definizione I della soluzione. Ne consegue che sia $|\dot{x}| = |y|$ che $V(x)$ sono limitate superiormente su I, ed utilizzando le ipotesi sul comportamento all'infinito di V ne deduciamo che anche $|x|$ è limitata. Quindi il modulo di (x, y) è maggiorato su tutto I da una costante, e non può mai tendere all'infinito. □

6.5. - Sia V come nell'Esercizio 6.4, ed α numero reale. Dimostrare ogni soluzione x dell'equazione

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} + V'(x) = 0 \tag{6.3}$$

è definita su tutto $\mathbb{R}$.

Soluzione. - Procedendo come per l'Esercizio 6.4, ci basta dimostrare che la funzione E in (6.2) non può tendere all'infinito in tempo finito, ovvero non ha asintoti verticali.
Ci limitiamo al caso $\alpha \leq 0$; il caso opposto è analogo. Possiamo supporre che V sia positiva: infatti V tende all'infinito a $\pm\infty$ e quindi deve essere limitata dal basso, ovvero esiste una costante c tale che $V + c$ è positiva, e sostituire V con $V + c$ non altera l'equazione (6.3).
Come abbiamo visto nella soluzione dell'Esercizio 6.2,

$$\frac{d}{dt}E = -\alpha\dot{x}^2 \ . \tag{6.4}$$

Quindi E è una funzione crescente, e preso t_0 nell'insieme di definizione di x,

$$E(t) \leq E(t_0) \quad \text{per } t \leq t_0. \tag{6.5}$$

Inoltre, tenuto conto della positività di V, la (6.4) implica

$$\frac{d}{dt}E = -\alpha\dot{x}^2 \leq -2\alpha\Big[\frac{1}{2}\dot{x}^2 + V(x)\Big] = -2\alpha E \ ,$$

e per il lemma di Gronwall

$$E(t) \leq e^{-2\alpha(t-t_0)}E(t_0) \quad \text{per } t \geq t_0. \tag{6.6}$$

Le stime (6.5) e (6.6) implicano che E non può avere asintoti verticali. □

6.6. - Generalizzare il risultato dell'Esercizio 6.5 alle soluzioni del sistema di equazioni differenziali

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \nabla V(x) = 0 \ ,$$

dove α è un numero reale e $V : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 tale che $V(x)$ tende a $+\infty$ per $|x| \to +\infty$.

6.7*. - Dato a numero reale positivo, consideriamo l'equazione del secondo ordine

$$\ddot{x} = -4a^2x^3 \ . \tag{6.7}$$

Dimostrare che per ogni soluzione x non nulla della (6.7) vale quanto segue:

(a) x è definita su tutto $\mathbb{R}$;

(b) x è periodica di periodo $T := \dfrac{C}{aL}$, dove L è l'ampiezza di oscillazione e

$$C := 2\sqrt{2}\int_{-1}^{1} \frac{ds}{\sqrt{1-s^4}} \ ;$$

(c) x è simmetrica rispetto all'asse delle t, ovvero $x(t+T/2) = -x(t)$.

Soluzione. - a) L'equazione (6.7) corrisponde alla (6.1) per $V(x) = a^2x^4$, e per quanto visto nell'Esercizio 6.4, le soluzioni di questa equazione esistono per tutti i tempi e soddisfano la conservazione dell'energia:

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 + a^2x^4 = c \text{ costante.} \tag{6.8}$$

b) Poiché x non è costante (atrimenti dovrebbe essere uguale a 0), possiamo prendere (t_0, t_1) intervallo aperto massimale in cui $\dot{x} \neq 0$, ovvero una componente connessa dell'insieme aperto $\{t : \ \dot{x}(t) \neq 0\}$. Pertanto $\dot{x}(t_0) = \dot{x}(t_1) = 0$ e la (6.8) implica

$$a^2x^4(t_0) = a^2x^4(t_1) = c \ .$$

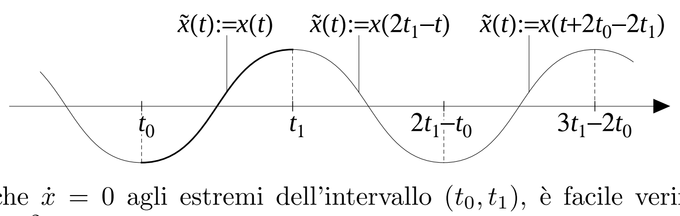
Possiamo inoltre supporre che $\dot{x}$ sia positiva in (t_0, t_1) – il caso opposto si tratta in modo analogo – e quindi, posto $M := x(t_1)$, si ha $x(t_0) = -M$ e $c = a^2M^4$. La (6.8) diventa allora

$$\dot{x} = a\sqrt{2(M^4 - x^4)} \ ,$$

da cui si ottiene

$$t_1 - t_0 = \int_{t_0}^{t_1} dt = \int_{-M}^{M} \frac{dx}{\dot{x}} = \int_{-M}^{M} \frac{dx}{a\sqrt{2(M^4 - x^4)}} = \frac{1}{aM\sqrt{2}}\int_{-1}^{1} \frac{ds}{\sqrt{1-s^4}} = \frac{C}{4aM} \ .$$

Costruiamo ora una funzione $\tilde{x}$ come segue: per cominciare, $\tilde{x}$ è posta uguale a x nell'intervallo $[t_0, t_1]$. Poi la estendiamo all'intervallo $[t_1, 2t_1 - t_0]$ per riflessione rispetto all'asse $t = t_1$, ponendo cioè $\tilde{x}(t) := x(2t_1 - t)$. Per successive riflessioni estendiamo $\tilde{x}$ a tutto $\mathbb{R}$.



Usando il fatto che $\dot{x} = 0$ agli estremi dell'intervallo (t_0, t_1), è facile verificare che $\tilde{x}$ è una funzione di classe C^2 con periodo

$$T = 2(t_1 - t_0) = \frac{C}{2aM} = \frac{C}{aL} \ ,$$

e soddisfa l'equazione (6.7). Poichè inoltre i valori di $\tilde{x}$ e x e delle loro derivate coincidono in un qualunque punto di $[t_0, t_1]$, per il teorema di unicità globale ne deduciamo che $\tilde{x} = x$.
c) Si verifica facilmente che la funzione $\hat{x}(t) := -x(t + T/2)$ soddisfa l'equazione (6.7), e che i valori di $\hat{x}$ e x e delle loro derivate coincidono nel punto t_0. Pertanto $\hat{x}$ e x coincidono ovunque, ovvero $x(t + T/2) = -x(t)$. $\square$

6.8*. - Sia $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione di classe C^2 tale che $V(x)$ tende a $+\infty$ per $x \to \pm\infty$. Dimostrare che ogni soluzione non costante x dell'equazione differenziale

$$\ddot{x} + V'(x) = 0$$

è definita su tutto $\mathbb{R}$ ed è periodica di periodo

$$T = \sqrt{2} \int_m^M \frac{dx}{\sqrt{V(M) - V(x)}} ,$$

dove M ed m sono rispettivamente il valore massimo e minimo di x. Inoltre $V(M) = V(m)$.

6.9*. - Sia f una funzione positiva di classe C^1 su $[0, +\infty)$ tale che f' è limitata e

$$\int_0^{+\infty} f(t)\, dt < +\infty.$$

Dimostrare che f tende a 0 per $t \to +\infty$.

6.10*. - Sia $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione strettamente convessa di classe C^2, con limite infinito a $\pm\infty$, e sia α un numero reale positivo. Dimostrare che ogni soluzione x dell'equazione differenziale

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} + V'(x) = 0 \tag{6.9}$$

è definita su tutto $\mathbb{R}$ e converge al punto di minimo di V per $t \to +\infty$, mentre $\dot{x}$ converge a 0.

Soluzione. - Abbiamo già visto nell'Esercizio 6.5 che ogni soluzione x è definita su tutto $\mathbb{R}$. Sappiamo inoltre che la funzione E definita in (6.2) soddisfa l'equazione (6.4), ed è quindi una funzione decrescente in t che ammette limite finito L a $+\infty$. Inoltre, fissato $t_0 \in \mathbb{R}$,

$$E(t_0) - L = \alpha \int_{t_0}^{+\infty} \dot{x}^2\, dt .$$

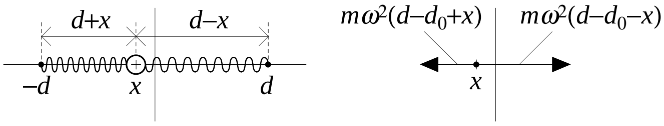
Siccome E è limitata sulla semiretta $[t_0, +\infty)$, sia $\dot{x}$ che x sono limitate (cfr. Esercizio 6.4), e dall'equazione (6.9) si deduce che anche $\ddot{x}$ è limitata. Possiamo applicare quanto visto nell'Esercizio 6.8 alla funzione $f(t) = \dot{x}^2(t)$, ottenendo che $\dot{x}$ converge a 0 per $t \to +\infty$.
Poiché $\dot{x}$ converge a 0, la convergenza di E a L implica la convergenza di $V(x)$ a L. Siccome V è strettamente convessa, $V^{-1}(L)$ consiste di al più due punti; se ne deduce che x deve convergere a uno di questi due punti (questa asserzione è delicato), che indichiamo con x_0. Passando ora al limite nell'equazione (6.9) si ottiene che $\ddot{x}$ converge a $-V'(x_0)$. Ma l'unico limite per $\ddot{x}$ che sia compatibile con il fatto che $\dot{x}$ tende a 0 è 0, e quindi $V'(x_0) = 0$. $\square$

6.11**. - Sia $V : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 con limite infinito per $|x| \to +\infty$, e sia α un numero reale positivo. Dimostrare che ogni soluzione x del sistema di equazioni differenziali

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \nabla V(x) = 0 \tag{6.10}$$

è definita su tutto $\mathbb{R}$ e, per $t \to +\infty$, converge a un punto x_0 tale che $\nabla V(x_0) = 0$, mentre $\dot{x}$ converge a 0.

6.12. - Si consideri una massa puntiforme m agganciata a due molle lineari identiche con frequenza propria ω e lunghezza a riposo d_0 fissate in due punti a distanza $2d$, con $d > d_0$, posti sull'asse delle x (vedi figura sotto). Scrivere l'equazione differenziale che descrive il movimento di questa massa, assumendo che sia vincolata a muoversi sull'asse delle x. Determinare la fraquenza delle piccole oscillazioni attorno ai punti di equilibrio.



Soluzione. - Scriviamo l'equazione della dinamica, ricordando che la forza esercitata (per unità di massa) da una molla con frequenza propria ω è in modulo uguale a $\omega^2\Delta$ dove Δ è l'allungamento rispetto alla lunghezza a riposo. Scegliendo l'origine dell'asse delle x a metà strada tra i due punti di aggancio delle molle come in figura, la forza esercitata dalla molla di sinistra è $-m\omega^2(d - d_0 + x)$, mentre quella esercitata dalla molla di destra è $m\omega^2(d - d_0 - x)$. Pertanto l'equazione della dinamica è

$$\ddot{x} = -2\omega^2 x \ . \tag{6.11}$$

Ovviamente $x = 0$ è l'unico punto di equilibrio (cioè $x = 0$ è lunica soluzione costante dell'equazione della dinamica), e la frequenza delle oscillazioni attorno al punto di equilibrio è $\sqrt{2}\omega$. $\square$

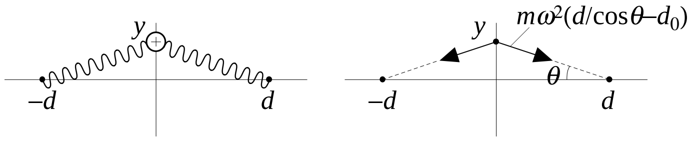
Osservazione. - L'equazione (6.11) può essere anche ottenuta a partire dalla legge di conservazione dell'energia meccanica: siccome l'energia potenziale (per unità di massa) di una molla con frequenza propria ω è pari a $\frac{1}{2}\omega^2\Delta^2$, abbiamo

$$\frac{1}{2}\omega^2\left[(d - d_0 + x)^2 + (d - d_0 - x)^2\right] + \frac{1}{2}\dot{x}^2 = \text{costante.}$$

Derivando rispetto al tempo e dividendo per $\dot{x}$ si ottiene nuovamente la (6.11).

Osservazione. - Consideriamo un'equazione differenziale del secondo ordine autonoma (cioè in cui t non appare esplicitamente) in forma generale: $\ddot{x} = F(x, \dot{x})$. Le soluzioni costanti nel tempo di questa equazione corrispondono ai valori di x tali che $F(x, 0) = 0$, detti quindi punti di *equilibrio*. Senza stare a dare definizione precise, diciamo che un punto di equilibrio x_0 è *stabile* se le soluzioni x dell'equazione con dati iniziali $(x(t_0), \dot{x}(t_0))$ vicini a $(x_0, 0)$ restano vicine a x_0 nel futuro, ed altrimenti diciamo che x_0 è un punto di equilibrio instabile.
Linearizzare l'equazione in x_0 significa sostituire ad F il suo sviluppo di Taylor all'ordine 1 nel punto $(x_0, 0)$, sostituzione che dà luogo ad un'equazione lineare omogenea del secondo ordine, detta equazione *linearizzata*. Il presupposto di questa operazione è che, in generale, la stabilità o instabilità di un punto di equilibrio x_0 si traduca in stabilità o instabilità di 0 per l'equazione linearizzata. Inoltre, ci aspettiamo che se x_0 è stabile, allora il comportamento qualitativo delle soluzioni dell'equazione con dati iniziali $(x(t_0), \dot{x}(t_0))$ molto vicini a $(x_0, 0)$ si possano desumere da quelle dell'equazione linearizzata – tipico esempio è la sosituzione dell'equazione del pendolo $\ddot{\theta} = -(g/\ell)\sin\theta$ con l'equazione linearizzata $\ddot{\theta} = -(g/\ell)\theta$.
Noi ci guardiamo bene dal dimostreremo alcun risultato rigoroso in questa direzione.

6.13. - Dato il sistema dell'Esercizio 6.12, scrivere l'equazione differenziale che descrive il movimento della massa, assumendo che sia vincolata a muoversi sull'asse delle y. Determinare la frequenza delle piccole oscillazioni attorno ai puunti di equilibrio.



Soluzione. - Introducendo l'angolo θ come in figura, si vede subito che la somma delle componenti delle forze lungo l'asse y è

$$-2m\omega^2\Big(\frac{d}{\cos\theta} - d_0\Big)\sin\theta\ .$$

Siccome $\tan\theta = \dfrac{y}{d}$ e $\sin\theta = \dfrac{y}{\sqrt{d^2+y^2}}$, l'equazione della dinamica diventa

$$\ddot{y} = -2\omega^2\left(1 - \frac{d_0}{\sqrt{d^2+y^2}}\right)y\ . \tag{6.12}$$

Chiaramente $y = 0$ è l'unico punto di equilibrio. Sostituendo alla funzione che costituisce il termine di destra della (6.12) il suo sviluppo di Taylor in 0 al primo ordine rispetto alla variabile y otteniamo l'equazione *linearizzata* attorno al punto di equilibrio 0:

$$\ddot{y} = -2\omega^2\Big(1 - \frac{d_0}{d}\Big)y\ .$$

Pertanto la frequenza delle piccole oscillazioni è

$$\omega\sqrt{2\Big(1 - \frac{d_0}{d}\Big)}\ . \qquad \square$$

Osservazione. - L'equazione (6.12) può essere ottenuta più facilmente a partire dalla legge di conservazione dell'energia, vale a dire

$$\omega^2\big(\sqrt{d^2+y^2} - d_0\big)^2 + \frac{1}{2}\dot{y}^2 = \text{costante},$$

derivando rispetto al tempo e poi dividendo per $\dot{y}$.

6.14. - Risolvere l'Esercizio 6.13 facendo l'ipotesi che la massa sia *anche* soggetta ad un'accelerazione di gravità g con direzione opposta all'asse y. Dimostrare che esiste un'unico punto di equilibrio y_0 e scrivere la frequenza delle piccole oscillazioni vicine a y_0 (in funzione di y_0, g e ω).

6.15. - Nel contesto dell'Esercizio 6.12, scrivere il sistema di due equazioni differenziali del secondo ordine che descrive il movimento della massa nel piano xy. Determinare i punti di equilibrio e la linearizzazione del sistema in questi punti.

Soluzione. - Siano (x, y) le coordinate della massa. La forza esercitata dalla molla di destra ha modulo uguale a $m\omega^2$ per la distanza del punto (x, y) dal punto $(d, 0)$ meno d_0, ed è diretta dal primo punto verso il secondo, cioè

$$-m\omega^2\left(1 - \frac{d_0}{\sqrt{(d-x)^2+y^2}}\right)(x - d, y)\ .$$

Analogamente, la forza esercitata dalla molla di sinistra è

$$-m\omega^2\left(1 - \frac{d_0}{\sqrt{(d+x)^2+y^2}}\right)(x + d, y)\ .$$

Pertanto l'equazione della dinamica diventa

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\omega^2 x\Big(2 - \frac{d_0}{\sqrt{(d-x)^2+y^2}} - \frac{d_0}{\sqrt{(d+x)^2+y^2}}\Big) - \omega^2 d\Big(\frac{d_0}{\sqrt{(d-x)^2+y^2}} - \frac{d_0}{\sqrt{(d+x)^2+y^2}}\Big) \ , \\ \ddot{y} = -\omega^2 y\Big(2 - \frac{d_0}{\sqrt{(d-x)^2+y^2}} - \frac{d_0}{\sqrt{(d+x)^2+y^2}}\Big) \ . \end{cases}$$

Ricordando la disuguaglianza $d > d_0$ si dimostra che $(0,0)$ è l'unico punto di equilibrio. La linearizzazione del sistema precedente in $(0,0)$ è

$$\begin{cases} \ddot{x} = -2\omega^2 x \ , \\ \ddot{y} = -2\omega^2\Big(1 - \dfrac{d_0}{d}\Big)y \ . \end{cases}$$

□

6.16. - Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2, e sia P un punto materiale vincolato a muoversi (senza attrito) sulla curva di equazione $y = f(x)$ e soggetto ad un'accelerazione di gravità g con direzione opposta all'asse y. Qual è l'equazione differenziale che descrive il comportamento di P? Dimostrare che i punti di equilibrio del sistema corrispondono ai punti in cui si annulla la derivata di f. Discutere il comportamento delle soluzioni in prossimità dei punti di equilibrio sulla base della derivata seconda di f in quei punti.

Soluzione. - Indichiamo con $(x, f(x))$ le coordinate del punto P. La velocità di P è allora $(1, f(x))\dot{x}$, e la legge di conservazione dell'energia diventa

$$g\, f(x) + \frac{1}{2}\big[1 + (f'(x))^2\big]\dot{x}^2 = \text{costante.}$$

Derivando rispetto al tempo e dividendo quindi per $\dot{x}$ otteniamo

$$\ddot{x} = -\frac{f'(x)}{1 + (f'(x))^2}(g + f''(x)\dot{x}^2) \ . \tag{6.13}$$

Chiaramente, le uniche soluzioni costanti di questa equazione corrispondono ai valori di x per cui $f'(x) = 0$. Detto x_0 uno di questi, possiamo linearizzare l'equazione (6.2) in x_0 ottenendo

$$\ddot{x} = -g\, f'(x_0)x \ . \tag{6.14}$$

Ne deduciamo che, per $\ddot{f}(x_0) > 0$, x_0 è un punto di equilibrio stabile, e la frequenza delle piccole oscillazioni vicino ad x_0 è $\sqrt{g\, f''(x_0)}$, mentre per $\ddot{f}(x_0) < 0$, x_0 è un punto di equilibrio instabile. □

Osservazione. - Ottenere la (6.13) direttamente dall'equazione della dinamica è più complicato. La ragione è che P è soggetto, oltre che alla forza di gravità $(0, -mg)$, anche ad una forza di reazione vincolare, cioè quella che fa sò che P rimanga sul grafico di f. Si può calcolare questa forza sapendo che la sua direzione è ortogonale al vincolo e l'intensità deve esser tale che la componente ortogonale al vincolo della forza risultante è esattamente pari ad m per l'accellerazione centripeta.

Alternativamente, si può utilizzare il fatto che la componente tangenziale al vincolo dell'accellerazione deve essere uguale alla componente tangenziale al vincolo della accelerazione di gravità, e quindi

$$(\ddot{x}, \ddot{y}) \cdot (1, f'(x)) = (0, -g) \cdot (1, f'(x)) \ .$$

Tenendo conto del fatto che la condizione $y = f(x)$ implica $\ddot{y} = f'(x)\,\ddot{x} + f''(x)\,\dot{x}^2$, l'equazione precedente diventa

$$(\ddot{x}, f'(x)\,\ddot{x} + f''(x)\,\dot{x}^2) \cdot (1, f'(x)) = -g\, f'(x) \ ,$$

e semplificando riotteniamo la (6.13).

6.17. - Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ una funzione di classe C^2. Ripetere quanto fatto nell'Esercizio 6.16 nell'ipotesi che P sia vincolato a muoversi sulla curva di equazione $(x, y) = f(z)$ e sia soggetto ad un'accelerazione di gravità g con direzione opposta all'asse z.

6.18*. - Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2. Ripetere quanto fatto nell'Esercizio 6.16 nell'ipotesi che P sia vincolato a muoversi sulla superficie di equazione $z = f(x, y)$ e sia soggetto ad un'accelerazione di gravità g con direzione opposta all'asse z.

6.19 - Oscillatore armonico k-dimensionale. - Sia A una matrice simmetrica $k \times k$, e sia $(e_1, \dots, e_k)$ una base di autovettori di A corrispondenti agli autovalori $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$. Dimostrare che le soluzioni del sistema di k equazioni del secondo ordine

$$\ddot{x} + Ax = 0 \tag{6.15}$$

sono della forma

$$x = \sum_1^k \left[a_i \cos\left(\sqrt{\lambda_i}\, t\right) + b_i \sin\left(\sqrt{\lambda_i}\, t\right) \right] e_i \tag{6.16}$$

con $a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_k \in \mathbb{R}$.

Soluzione. - Il sistema (6.15) può essere riscritto come un sistema di $2k$ equazioni del primo ordine, lineari omogenee e a coefficienti costanti. Pertanto le soluzioni di (6.15) esistono per tutti i tempi e costituiscono uno spazio vettoriale di dimensione $2k$. Ora basta dimostrare che le funzioni $\cos(\sqrt{\lambda_i}\, t)\, e_i$ e $\sin(\sqrt{\lambda_i}\, t)\, e_i$ con $i = 1, \dots, k$ costituiscono una famiglia di soluzioni di (6.15) linearmente indipendenti. □

6.20. - Nelle ipotesi dell'Esercizio 6.19, dire quali condizioni sulla matrice A garantiscono che le soluzioni del sistema (6.15) sono tutte periodiche.

6.21 - Oscillatore armonico smorzato k-dimensionale. - Sia A una matrice simmetrica $k \times k$, ed a un numero reale positivo. Scrivere la soluzione generale dell'equazione

$$\ddot{x} + a\dot{x} + Ax = 0 \ .$$

6.22. - Risolvere il sistema $\begin{cases} \ddot{x} = -2x + y \\ \ddot{y} = x - 2y \end{cases}$ con le condizioni iniziali $\begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} \dot{x}(0) = 1 \\ \dot{y}(0) = 0 \end{cases}$.

6.23. - Trovare, per ogni $\omega \in \mathbb{R}$, la soluzione generale del sistema $\begin{cases} \ddot{x} = -3x + y + \sin(\omega t) \\ \ddot{y} = x - 3y + \sin(\omega t) \end{cases}$.

6.24. - Sia A una matrice simmetrica $k \times k$, ω un numero reale e e un vettore assegnato. Dire in quali casi le soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \ddot{x} + Ax = \sin(\omega t) e \\ x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$$

sono tutte limitate su $[0, +\infty)$.

6.25. - Consideriamo n punti materiali nello spazio tridimensionale $\mathbb{R}^3$ che si muovono secondo la legge di gravitazione universale, ed indichiamo con $m_1, \dots, m_n$ le loro masse e con $x_1, \dots, x_n$ le loro posizioni al variare del tempo (quindi ciascun x_i è una funzione di t a valori in $\mathbb{R}^3$). Scrivere il sistema di equazioni differenziali del secondo ordine che determina il movimento dei punti. Dedurre a partire da questo il principio di conservazione dell'energia e della quantità di moto. Le soluzioni esistono per tutti i tempi?

Soluzione. - Sia G la costante di gravitazione universale. Allora

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 = -\sum_{j\neq 1} G m_1 m_j \dfrac{x_1 - x_j}{|x_1 - x_j|^3} \ , \\ m_2\ddot{x}_2 = -\sum_{j\neq 2} G m_2 m_j \dfrac{x_2 - x_j}{|x_2 - x_j|^3} \ , \\ \vdots \\ m_n\ddot{x}_n = -\sum_{j\neq n} G m_n m_j \dfrac{x_n - x_j}{|x_n - x_j|^3} \ . \end{cases} \tag{6.17}$$

Sommando le equazioni in (6.17) otteniamo

$$\sum_i m_i \ddot{x}_i = 0$$

da cui si deriva la conservazione della quantità di moto

$$\sum_i m_i \dot{x}_i = \text{costante}.$$

Per ottenere la conservazione dell'energia, moltiplichiamo scalarmente la i-esima equazione in (6.17) per $\dot{x}_i$ e poi sommiamo su tutti gli i:

$$\begin{aligned} \sum_i m_i \dot{x}_i \cdot \ddot{x}_i &= -\sum_i \sum_{j\neq i} G m_i m_j \frac{x_i - x_j}{|x_i - x_j|^3} \cdot \dot{x}_i \\ &= -\sum_{i<j} G m_i m_j \frac{x_i - x_j}{|x_i - x_j|^3} \cdot (\dot{x}_i - \dot{x}_j) \end{aligned}$$

e poiché $-x/|x|^3$ è il gradiente di $1/|x|$, quest'ultima identità può essere riscritta come segue:

$$\frac{d}{dt} \sum_i \frac{1}{2} m_i |\dot{x}_i|^2 = \frac{d}{dt} \sum_{i<j} \frac{G m_i m_j}{|x_i - x_j|} \ .$$

Dunque

$$\sum_i \frac{1}{2} m_i |\dot{x}_i|^2 + \sum_{i<j} -\frac{G m_i m_j}{|x_i - x_j|} = \text{costante}.$$

Per quanto riguarda l'esistenza delle soluzioni, è ben noto che due masse con velocità relativa nulla finiscono per collidere in tempo finito: in altre parole, per $n = 2$, il problema di Cauchy con dati iniziali

$$\begin{cases} x_1(0) = (r, 0, 0) \\ x_2(0) = (-r, 0, 0) \\ \dot{x}_1(0) = (0, 0, 0) \\ \dot{x}_2(0) = (0, 0, 0) \end{cases}$$

è risolubile esplicitamente e la soluzione esiste solo per un tempo finito. $\square$