

Geometria e Topologia Differenziale

Marco Abate

Dipartimento di Matematica, Università di Pisa

Largo Pontecorvo 5, 56127 Pisa

E-mail: abate@dm.unipi.it

Febbraio–Maggio 2005

Capitolo 1

Curve

1.1 Il concetto di curva

Cos'è una curva (nel piano, nello spazio, in $\mathbb{R}^n$)? Vediamo esempi di cose che sicuramente lo sono:

ESEMPIO 1.1.1. Una retta nel piano. Può venire presentata in (almeno) tre modi diversi:

- come grafico: $y = ax + b$ o $x = ay + b$;
- come luogo di zeri: $ax + by + c = 0$;
- come immagine di un'applicazione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ della forma $f(t) = (at + b, ct + d)$.

Attenzione: negli ultimi due casi i coefficienti non sono univocamente determinati dalla retta.

ESEMPIO 1.1.2. Un grafico. Se $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo e $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione (almeno) continua, allora il suo grafico

$$\Gamma_f = \{(t, f(t)) \mid t \in I\} \subset \mathbb{R}^2$$

è sicuramente una curva. Nota che si ha $\Gamma_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I, y - f(x) = 0\}$, per cui un grafico può essere considerato come un luogo di zeri.

ESEMPIO 1.1.3. Una circonferenza, di equazione $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$. Nota che non è un grafico.

Una prima idea potrebbe essere la seguente: una curva è qualcosa di “dimensione 1” dentro il piano (o dentro $\mathbb{R}^n$). Un modo per scendere di dimensione, passando dalla dimensione 2 del piano alla dimensione 1 delle curve, è imporre una condizione: per esempio, potremmo considerare insiemi della forma $C = \{(x, y) \in U \mid f(x, y) = 0\} \subset \mathbb{R}^2$ per opportune funzioni $f: U \rightarrow \mathbb{R}$, dove $U \subseteq \mathbb{R}^2$ è aperto. Tutti gli esempi precedenti ricadono in questa categoria, e l'esperienza fatta con l'algebra lineare sembra indicare che potrebbe essere una buona idea.

Ma bisogna stare attenti. Prima di tutto, non appena f è continua l'insieme C è chiuso in U — e fin qui niente di male. Ma

Proposizione 1.1.1: *Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto. Allora un sottoinsieme $C \subseteq U$ è chiuso in U se e solo se esiste una funzione continua $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $C = \{x \in U \mid f(x) = 0\} = f^{-1}(0)$.*

Dimostrazione: Basta prendere $f(x) = d(x, C) = \inf\{\|x - y\| \mid y \in C\}$. Infatti, f è continua, e $x \in C$ se e solo se $f(x) = 0$ (perché?). $\square$

Dunque usando le funzioni continue otteniamo anche insiemi che decisamente non hanno alcun diritto a essere chiamati curve. Potremmo allora limitarci alle funzioni differenziabili. Ma anche in questo caso bisogna stare attenti:

ESEMPIO 1.1.4. Se $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ è data da $f(x, y) = xy$, allora $C = \{f(x, y) = 0\}$ è l'unione dei due assi coordinati, cioè l'unione di *due* curve, non una curva sola.

L'insieme C dell'esempio precedente è quasi una curva. L'unico punto in cui c'è un problema è l'origine, dove le due rette si intersecano. Ed effettivamente l'origine è un punto speciale anche per f : è l'unico punto del piano in cui il gradiente di f si annulla. Non è difficile vedere che è questa la causa del problema, usando il seguente teorema di Analisi:

Teorema 1.1.2: (della funzione implicita) Sia $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funzione di classe C^k , con $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$, dove Ω è un aperto di $\mathbb{R}^{m+n}$. Indichiamo con (x, y) le coordinate di $\mathbb{R}^{m+n}$, dove $x \in \mathbb{R}^m$ e $y \in \mathbb{R}^n$. Sia $p_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$ tale che

$$F(p_0) = O \quad \text{e} \quad \det \frac{\partial F}{\partial y}(p_0) \neq 0.$$

Allora esistono un intorno $U \subset \mathbb{R}^{m+n}$ di p_0 , un intorno $V \subset \mathbb{R}^m$ di x_0 e un'applicazione $g: V \rightarrow \mathbb{R}^n$ di classe C^k tale che $U \cap \{p \in \Omega \mid F(p) = O\}$ è costituito da tutti e soli i punti della forma $(x, g(x))$ con $x \in V$.

Allora:

Proposizione 1.1.3: Sia $U \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 e $p \in U$ tale che $f(p) = 0$ ma $\nabla f(p) \neq O$. Allora esiste un intorno V di p tale che $V \cap \{f = 0\}$ sia un grafico.

Dimostrazione: Scriviamo $p = (x_0, y_0)$; a meno di scambiare le coordinate possiamo supporre che $\frac{\partial f}{\partial y}(p) \neq 0$. Allora il Teorema della funzione implicita ci dice che esistono un intorno V di p , un intervallo aperto $I \subseteq \mathbb{R}$ contenente x_0 e una funzione $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^∞ tali che $V \cap \{f = 0\}$ sia esattamente il grafico di g . $\square$

Dunque nei punti in cui il gradiente della funzione f è non nullo, l'equazione $f(x, y) = 0$ effettivamente definisce qualcosa che ha tutta l'aria di essere una curva. Ma che problema potranno procurare i punti in cui il gradiente si annulla (che sono detti *punti singolari* di f)? Magari sono semplicemente punti in cui s'intersecano varie curve, come nell'esempio precedente...

(S)fortunatamente, la situazione è ben più complicata di così:

Teorema 1.1.4: (Whitney) Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto. Allora un sottoinsieme $C \subseteq U$ è chiuso in U se e solo se esiste una funzione $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^∞ tale che $C = f^{-1}(0)$.

Per la dimostrazione ci servono alcuni risultati preliminari.

Lemma 1.1.5: Esiste una funzione $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1)$ monotona, di classe C^∞ e tale che $\alpha(t) = 0$ se e solo se $t \leq 0$.

Dimostrazione: Poniamo

$$\alpha(t) = \begin{cases} e^{-1/t} & \text{se } t > 0, \\ 0 & \text{se } t \leq 0. \end{cases}$$

L'unica cosa che dobbiamo verificare è che sia di classe C^∞ nell'origine. Per questo basta dimostrare che i limiti destro e sinistro di tutte le derivate nell'origine coincidono, ovvero che

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \alpha^{(n)}(t) = 0$$

per ogni $n \geq 0$. Supponiamo di aver dimostrato l'esistenza per ogni $n \in \mathbb{N}$ di un polinomio p_n di grado $2n$ tale che

$$\forall t > 0 \quad \alpha^{(n)}(t) = e^{-1/t} p_n(1/t). \quad (1.1.1)$$

In tal caso

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \alpha^{(n)}(t) = \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{p_n(s)}{e^s} = 0;$$

quindi per concludere basta dimostrare (1.1.1). Procediamo per induzione su n . Per $n = 0$ basta prendere $p_0 \equiv 1$. Supponiamo che (1.1.1) sia verificata per $n \geq 0$; allora

$$\alpha^{(n+1)}(t) = \frac{d}{dt} \left[e^{-1/t} p_n(1/t) \right] = e^{-1/t} \left[\frac{1}{t^2} p_n(1/t) - \frac{1}{t^2} p'_n(1/t) \right],$$

per cui basta scegliere $p_{n+1}(s) = s^2(p_n(s) - p'_n(s))$. $\square$

Corollario 1.1.6: Per ogni intervallo chiuso $[a, b] \subset \mathbb{R}$ esiste una funzione $\beta: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ di classe C^∞ tale che $\beta(t) = 1$ se e solo se $t \leq a$ e $\beta(t) = 0$ se e solo se $t \geq b$.

Dimostrazione: Basta prendere

$$\beta(t) = \frac{\alpha(b-t)}{\alpha(b-t) + \alpha(t-a)},$$

dove $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è la funzione del Lemma 1.1.5. □

Corollario 1.1.7: Dati $p_0 \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$ esiste una funzione $f: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ di classe C^∞ tale che $f(p) = 1$ se e solo se $p \in \overline{B(p_0, r)}$, e $f(p) = 0$ se e solo se $p \notin B(p_0, 2r)$, dove $B(p, r)$ è la palla aperta di centro p e raggio r .

Dimostrazione: Sia $\beta: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ la funzione costruita nel corollario precedente partendo dall'intervallo $[r, 2r]$. Allora $f(p) = \beta(\|p - p_0\|^2)$ è come richiesto. □

Lemma 1.1.8: Sia $V \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto. Allora possiamo trovare una successione di punti $\{p_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}^n$ e una successione di numeri razionali $\{r_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}^+$ tali che $V = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B(p_k, r_k)$.

Dimostrazione: Sia $p \in U$. Essendo U aperto, esiste $\varepsilon > 0$ tale che $B(p, \varepsilon) \subset V$. Scegliamo allora $q \in \mathbb{Q}^n$ e $r \in \mathbb{Q}^+$ tali che $\|p - q\| < r < \varepsilon/2$. Chiaramente, $p \in B(q, r)$; inoltre, se $x \in B(q, r)$ abbiamo

$$\|p - x\| \leq \|p - q\| + \|q - x\| < 2r < \varepsilon,$$

per cui $B(q, r) \subseteq B(p, \varepsilon) \subset V$. Dunque ogni punto di V appartiene a una palla di centro e raggio razionali completamente contenuta in V ; siccome di tali palle ne esiste al più una quantità numerabile, abbiamo la tesi. □

Ed eccoci arrivati alla

Dimostrazione del Teorema 1.1.4: Se $C = f^{-1}(0)$ sappiamo già che C dev'essere chiuso in U . Viceversa, supponiamo che C sia chiuso in U ; allora $V = U \setminus C$ è aperto in U , e quindi in $\mathbb{R}^n$. Il Lemma 1.1.8 ci dice che abbiamo $V = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B(p_k, r_k)$ con $p_k \in \mathbb{Q}^k$ e $r_k \in \mathbb{Q}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Sia $f_k: U \rightarrow [0, 1]$ la restrizione a U della funzione ottenuta applicando il Corollario 1.1.7 a p_k e $r_k/2$.

Chiaramente, $f_k \equiv 0$ fuori da $B(p_k, r_k)$, e lo stesso vale per tutte le sue derivate. Quindi il modulo di f_k e di tutte le sue derivate deve avere un massimo in $\overline{B(p_k, r_k)}$, che è un insieme compatto. Ne consegue che per ogni m , $k \in \mathbb{N}$ troviamo $c_k^m > 0$ tale che il valore assoluto di una qualsiasi derivata di ordine m di f_k è minore o uguale di c_k^m in tutto U . Sia $c_k = \max\{1, c_k^0, \dots, c_k^k\}$, e poniamo

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_k}{2^k c_k}.$$

Prima di tutto, questa serie è maggiorata da $\sum_k 2^{-k}$, per cui converge uniformemente. Per costruzione, non appena $k \geq m$ una qualsiasi derivata di ordine m del termine k -esimo della serie è limitata da 2^{-k} ; quindi anche le serie delle derivate convergono uniformemente, e $f \in C^\infty(U)$.

Ora, se $p \in C$ allora $p \notin B(p_k, r_k)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, per cui $f_k(p) = 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, e $f(p) = 0$. Viceversa, se $p \in U \setminus C$ deve esistere $k_0 \in \mathbb{N}$ tale che $p \in B(p_{k_0}, r_{k_0}) \subset V$; quindi $f_{k_0}(p) > 0$ e $f(p) \geq f_{k_0}(p)/2^{k_0} c_{k_0} > 0$. □

Dunque definire una curva tramite equazioni non è l'approccio migliore. Un'idea più efficiente è dire che una curva è localmente fatta come $\mathbb{R}$:

Definizione 1.1.1: Una *linea* (o *1-sottovarietà*) è un sottoinsieme connesso $C \subset \mathbb{R}^n$ tale che per ogni $p \in C$ esista un intorno $U \subset \mathbb{R}^n$ di p , un intervallo aperto $I \subseteq \mathbb{R}$ e un'applicazione $\sigma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ (detta *parametrizzazione locale*) di classe C^∞ tali che

- (i) σ è un omeomorfismo con l'immagine $\sigma(I) = C \cap U$;
- (ii) $\sigma'(t) \neq 0$ per ogni $t \in I$;

Diremo che una parametrizzazione locale σ è *rispetto alla lunghezza d'arco* se $\|\sigma'\| \equiv 1$.

ESEMPIO 1.1.5. Un grafico in $\mathbb{R}^2$ è una linea. Un insieme che è localmente un grafico (nel senso della Proposizione 1.1.3) è una linea. Una figura 8 (o, più in generale, l'immagine di un'applicazione $\sigma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ non iniettiva) non è una linea.

Osservazione 1.1.1. Una linea C non ha punti interni. Infatti, se $p \in C$ fosse un punto interno, allora C conterrebbe una palla di centro p e raggio r ; in particolare, $U \cap C \setminus \{p\}$ sarebbe connesso quale che sia l'intorno U di p . Ma se scegliamo U come nella definizione di linea, $U \cap C \setminus \{p\}$ dovrebbe essere omeomorfo a un intervallo aperto privato di un punto, che è sconnesso, contraddizione.

Osservazione 1.1.2. La condizione (i) nella definizione di linea ci dice che l'insieme C è, dal punto di vista topologico, localmente fatto come un segmento. La condizione (ii) invece ha tre scopi: fornisce un vettore tangente alla linea, escludendo spigoli quali quelli che si trovano nel grafico della funzione $|t|$; assicura che anche dal punto di vista differenziale la struttura sia la stessa (come capiremo meglio quando parleremo di cambiamenti di parametro); evita altre possibili singolarità, quali le cuspidi che si trovano nell'immagine dell'applicazione $\sigma(t) = (t^2, t^3)$.

In realtà, questa definizione funzionerà meglio con superfici e oggetti di dimensione più alta; in dimensione 1 è eccessivamente complicata. Infatti vale il seguente

Teorema 1.1.9: Ogni linea ha una parametrizzazione globale. Più esattamente, per ogni linea $C \subset \mathbb{R}^n$ esiste sempre un'applicazione $\hat{\sigma}: \mathbb{R} \rightarrow C$ surgettiva, di classe C^∞ , con $\hat{\sigma}'(t) \neq 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ e tale che

- (a) se C non è compatta allora $\hat{\sigma}$ è un omeomorfismo fra $\mathbb{R}$ e C ;
- (b) se C è compatta allora $\hat{\sigma}$ è periodica e induce un omeomorfismo fra S^1 e C .

In altre parole, viste dall'interno le linee sono globalmente tutte come $\mathbb{R}$ o come S^1 .

Dimostrazione: Prima di tutto dimostriamo che in ogni punto di C esiste una parametrizzazione rispetto alla lunghezza d'arco. Fissato $p \in C$, sia $\sigma: I \rightarrow U \cap C$ una parametrizzazione locale qualunque con $p = \sigma(t_0)$ per qualche $t_0 \in I$. Poniamo

$$g(t) = \int_{t_0}^t \|\sigma'(s)\| ds;$$

allora $g'(t) = \|\sigma'(t)\| > 0$, per cui $g: I \rightarrow J = h(I)$ è un diffeomorfismo (monotono crescente) fra due intervalli. Quindi $\sigma_1 = \sigma \circ g^{-1}: J \rightarrow C \cap U$ è ancora una parametrizzazione locale; inoltre $\sigma_1(0) = p$ e

$$\sigma_1'(t) = \frac{\sigma'(g^{-1}(t))}{\|\sigma'(g^{-1}(t))\|},$$

per cui $\|\sigma_1'\| \equiv 1$, come richiesto.

Fissiamo ora $p_0 \in C$ e una parametrizzazione rispetto alla lunghezza d'arco $\sigma_0: I_0 \rightarrow C$ con $\sigma_0(0) = p_0$. Sia $\sigma: I \rightarrow C$ un'altra parametrizzazione locale rispetto alla lunghezza d'arco tale che $\sigma_0(I_0) \cap \sigma(I) \neq \emptyset$; vogliamo far vedere che σ_0 e σ differiscono solo per una traslazione. Sia $J_0 = \sigma_0^{-1}(\sigma_0(I_0) \cap \sigma(I)) \subseteq I_0$, $J = \sigma^{-1}(\sigma_0(I_0) \cap \sigma(I)) \subseteq I$, e $h = \sigma^{-1} \circ \sigma_0: J_0 \rightarrow J$. La funzione h è chiaramente un omeomorfismo di aperti di $\mathbb{R}$; inoltre è (almeno) di classe C^1 . Infatti, fissiamo $t_0 \in J_0$. Allora da $\sigma \circ h = \sigma_0$ otteniamo

$$\frac{\sigma_0(t) - \sigma_0(t_0)}{t - t_0} = \frac{\sigma(h(t)) - \sigma(h(t_0))}{h(t) - h(t_0)} \cdot \frac{h(t) - h(t_0)}{t - t_0}$$

per ogni $t \in J_0$. Facendo tendere t a t_0 il primo quoziente converge a $\sigma_0'(t_0)$, e il secondo a $\sigma'(h(t_0))$. Siccome $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$ è una parametrizzazione locale, esiste un indice j per cui $\sigma_j'(h(t_0)) \neq 0$; quindi

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{h(t) - h(t_0)}{t - t_0} = \frac{\sigma_{0,j}'(t_0)}{\sigma_j'(h(t_0))}$$

esiste, e dunque h è derivabile. Inoltre, lo stesso ragionamento con lo stesso j funziona per tutti i t in un intorno di t_0 , per cui troviamo

$$h' = \frac{\sigma_{0,j}'}{\sigma_j' \circ h}$$

in un intorno di t_0 , e quindi h' è continua.

Ora, da $\sigma \circ h = \sigma_0$ deduciamo anche $\sigma'(h(t))h'(t) = \sigma'_0(t)$, per cui $|h'| \equiv 1$. Dunque il grafico Γ di h è costituito da segmenti di pendenza ± 1 , tanti quante sono le componenti connesse di J_0 (e quindi di J). In ciascuna di queste componenti, quindi, abbiamo $h(t) = \pm t + a$ per un opportuno $a \in \mathbb{R}$.

Il grafico Γ di h è contenuto nel rettangolo $I_0 \times I$; vogliamo dimostrare che gli estremi dei segmenti di Γ sono necessariamente sul bordo del rettangolo. Prima di tutto, notiamo che $(s_0, s) \in \Gamma$ sse $s = h(s_0)$, che implica

$$\sigma(s) = \sigma_0(s_0). \quad (1.1.2)$$

Sia ora, per assurdo, $(t_0, t) \in I_0 \times I$ un estremo di un segmento di Γ . Essendo un estremo, $t_0 \in \partial J_0$; ma d'altra parte, essendo (t_0, t) sul bordo del grafico, per continuità la (1.1.2) implica che $\sigma(t) = \sigma_0(t_0) \in \sigma_0(I_0) \cap \sigma(I)$, per cui $t_0 \in J_0$, contraddizione.

Ora, Γ è il grafico di una funzione iniettiva; quindi ciascun lato del rettangolo può essere toccato da al più un estremo di Γ (perché?). Ma questo implica che Γ — e quindi J_0 — ha al più 2 componenti connesse; e se ne ha due, entrambe hanno la stessa pendenza.

Notiamo infine che se la pendenza di Γ è -1 , ponendo $\sigma_1(t) = \sigma(-t)$ otteniamo una parametrizzazione locale rispetto alla lunghezza d'arco con la stessa immagine di σ ma tale che $h_1 = \sigma_1^{-1} \circ \sigma_0$ abbia pendenza 1 (e diremo che σ_0 e σ_1 hanno la stessa orientazione).

Sia ora $\sigma_1: I_1 \rightarrow C$ un'altra parametrizzazione locale rispetto alla lunghezza d'arco tale che $\sigma_1(0) = p_0$; per quanto visto, senza perdita di generalità possiamo anche supporre che il grafico di $h = \sigma_1^{-1} \circ \sigma_0$ sia composto da segmenti di pendenza 1. Siccome $p_0 \in \sigma_0(I_0) \cap \sigma_1(I_1)$ e $h(0) = 0$, sulla componente connessa di J_0 contenente 0 abbiamo $h = \text{id}$; quindi questa componente è $I_0 \cap I_1$, e abbiamo $\sigma_0 \equiv \sigma_1$ sull'intersezione dei domini.

In altre parole, due parametrizzazioni locali rispetto alla lunghezza d'arco $\sigma_0: I_0 \rightarrow C$ e $\sigma_1: I_1 \rightarrow C$ che partono dallo stesso punto $p_0 = \sigma_0(0) = \sigma_1(0)$ con la stessa orientazione coincidono sull'intersezione dei domini. Questo ci permette quindi di definire una nuova applicazione $\tilde{\sigma}: I_0 \cup I_1 \rightarrow C$ ponendo

$$\tilde{\sigma}(t) = \begin{cases} \sigma_0(t) & \text{se } t \in I_0, \\ \sigma_1(t) & \text{se } t \in I_1. \end{cases} \quad (1.1.3)$$

Siamo pronti per il ragionamento finale. La parametrizzazione locale rispetto alla lunghezza d'arco $\sigma_0: I_0 \rightarrow C$ è fissata una volta per tutte. Indichiamo con $\mathcal{C}$ l'insieme delle parametrizzazioni locali $\sigma_1: I_1 \rightarrow C$ rispetto alla lunghezza d'arco tali che $0 \in I_1$, $\sigma_1(0) = \sigma_0(0)$ e σ_1 ha la stessa orientazione di σ_0 . Per quanto appena visto, abbiamo che σ_1 coincide con σ_0 sull'intersezione dei domini per ogni $\sigma_1 \in \mathcal{C}$.

Supponiamo esista una $\sigma_1 \in \mathcal{C}$ tale che $\sigma_0(I_0) \cap \sigma_1(I_1)$ abbia due componenti connesse. Questo vuol dire che l'estensione $\tilde{\sigma}$ data da (1.1.3) torna su se stessa, cioè è periodica di un qualche periodo $\ell > 0$, ed è iniettiva ristretta a $[t_0, t_0 + \ell]$ per qualche $t_0 \leq 0$. Ma allora possiamo prolungarla per periodicità a una $\hat{\sigma}: \mathbb{R} \rightarrow C$ con $\hat{\sigma}(\mathbb{R}) = \sigma_0(I_0) \cup \sigma_1(I_1)$. In particolare, $\hat{\sigma}(\mathbb{R})$ è aperto in C . Ma, d'altra parte, $\hat{\sigma}(\mathbb{R}) = \hat{\sigma}([t_0, t_0 + \ell])$ è compatto, e quindi chiuso in C . La connessione di C obbliga quindi ad avere $\hat{\sigma}(\mathbb{R}) = C$; dunque C è compatta, e $\hat{\sigma}$ induce un omeomorfismo fra S^1 e C , per cui siamo nel caso (b).

Supponiamo invece che $\sigma_0(I_0) \cap \sigma_1(I_1)$ abbia sempre una sola componente connessa, quale che sia $\sigma_1 \in \mathcal{C}$. Questo vuol dire che per ogni $\sigma_1 \in \mathcal{C}$ l'estensione $\tilde{\sigma}$ data da (1.1.3) è ancora una parametrizzazione rispetto alla lunghezza d'arco, che estende sia σ_0 che σ_1 , e appartiene a $\mathcal{C}$. Dunque tutte le possibili parametrizzazioni locali rispetto alla lunghezza d'arco che partono da p_0 e con la stessa orientazione di σ_0 si raccordano formando una parametrizzazione rispetto alla lunghezza d'arco $\hat{\sigma}: J \rightarrow C$ massimale, dove J è un intervallo aperto. Chiaramente, $\hat{\sigma}(J)$ è aperto in C ; se dimostriamo che è anche chiuso la connessione di C implicherà $\hat{\sigma}(J) = C$, e quindi saremo nel caso (a) — in quanto ogni intervallo aperto è diffeomorfo a $\mathbb{R}$.

Supponiamo per assurdo che $\hat{\sigma}(J)$ non sia chiuso in C , e sia $p \in C \setminus \hat{\sigma}(J)$ un punto aderente a $\hat{\sigma}(J)$. Ora, esiste sicuramente una parametrizzazione rispetto alla lunghezza d'arco in p , la cui immagine interseca necessariamente $\hat{\sigma}(J)$; ma allora procedendo come prima possiamo usare questa parametrizzazione per estendere ulteriormente $\hat{\sigma}$. Per la massimalità di $\hat{\sigma}$, questa estensione non può essere globalmente iniettiva; quindi è periodica, e il ragionamento precedente ci porta a dedurre che C è compatta e omeomorfa a S^1 . Ma in questo caso esiste una parametrizzazione σ_1 tale che $\sigma_0(I_0) \cap \sigma_1(I_1)$ abbia due componenti connesse, contraddizione, e abbiamo finito. $\square$

Questo risultato suggerisce che per studiare le linee conviene studiare le loro parametrizzazioni globali. Ma allora tanto vale fare il passo completo e prendere come principale oggetto di studio non l'insieme C ma la sua parametrizzazione (globale) σ . E questo ci porta alla prima definizione del prossimo paragrafo.

1.2 Teoria locale delle curve

Eccoci quindi alla definizione ufficiale di curva.

Definizione 1.2.1: Una curva (di classe C^k , con $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$) in $\mathbb{R}^n$ è un'applicazione $\sigma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ di classe C^k , dove $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo. L'immagine $\sigma(I)$ sarà detta *sostegno* della curva; la variabile $t \in I$ è il *parametro* della curva. Se $I = [a, b]$ e $\sigma(a) = \sigma(b)$, diremo che la curva è *chiusa*.

Osservazione 1.2.1. Se I non è un intervallo aperto, e $k \geq 1$, dire che σ è di classe C^k in I vuol dire che σ si estende a un'applicazione C^k definita in un intervallo aperto contenente propriamente I .

Osservazione 1.2.2. Nel seguito considereremo quasi sempre solo curve di classe C^∞ . I pochi casi in cui sarà importante lavorare anche con una regolarità minore verranno indicati esplicitamente.

Definizione 1.2.2: Sia $\sigma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva di classe (almeno) C^1 . Il vettore $\sigma'(t)$ è il *vettore tangente* alla curva nel punto $\sigma(t)$. Se $\sigma'(t) \neq O$ per ogni $t \in I$ diremo che σ è *regolare*.

Osservazione 1.2.3. Nel caso di una curva $\sigma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ *chiusa* di classe C^k , diremo che è regolare solo se si ha anche $\sigma'(a) = \sigma'(b)$, $\sigma''(a) = \sigma''(b), \dots, \sigma^{(k)}(a) = \sigma^{(k)}(b)$. In particolare, una curva chiusa regolare si prolunga sempre a un'applicazione $\hat{\sigma}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ di classe C^k e *periodica*.

ESEMPIO 1.2.1. Grazie al Teorema 1.1.9, ogni linea è una curva regolare.

ESEMPIO 1.2.2. Dati $v_0, v_1 \in \mathbb{R}^n$ con $v_1 \neq O$, la curva regolare $\sigma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ data da $\sigma(t) = v_0 + tv_1$ è la *retta* passante per v_0 nella direzione di v_1 .

ESEMPIO 1.2.3. Le due curve $\sigma_1, \sigma_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ date da

$$\sigma_1(t) = (x_0 + r \cos t, y_0 + r \sin t) \quad \text{e} \quad \sigma_2(t) = (x_0 + r \cos 2t, y_0 + r \sin 2t),$$

hanno entrambe come sostegno la *circonferenza* di centro $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ e raggio $r > 0$.

ESEMPIO 1.2.4. La curva $\sigma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ data da $\sigma(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$ con $a > 0$, $b \in \mathbb{R}^*$ è detta *elica circolare* di raggio a e passo b .

ESEMPIO 1.2.5. La *cuspid* $\sigma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ data da $\sigma(t) = (t^2, t^3)$ è una curva non regolare.

ESEMPIO 1.2.6. La curva $\sigma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ data da $\sigma(t) = (t, |t|)$ è una curva continua, ma non è una curva di classe C^1 .

In realtà, a noi interessa più il sostegno della curva che la curva stessa. Quindi introduciamo la seguente relazione d'equivalenza:

Definizione 1.2.3: Diremo che due curve $\sigma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\tilde{\sigma}: \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$ di classe C^k sono *equivalenti* se esiste un diffeomorfismo $h: \tilde{I} \rightarrow I$ di classe C^k tale che $\tilde{\sigma} = \sigma \circ h$; diremo anche che $\tilde{\sigma}$ è una *riparametrizzazione* di σ , e che h è un *cambiamento di parametro*. Infine, se $h' > 0$ ovunque diremo che σ e $\tilde{\sigma}$ hanno la *stessa orientazione*; altrimenti diremo che hanno *orientazione opposta*.

Osservazione 1.2.4. Per noi, un *diffeomorfismo di classe C^k* è un omeomorfismo h tale che sia h che la sua inversa h^{-1} siano di classe C^k . Per esempio, $h(x) = 2x$ è un diffeomorfismo di classe C^∞ di $\mathbb{R}$ con se stesso, mentre $g(x) = x^3$, pur essendo un omeomorfismo di $\mathbb{R}$ con se stesso, non è un diffeomorfismo, neppure di classe C^1 , perché la funzione inversa $g^{-1}(x) = x^{1/3}$ non è di classe C^1 .

Esercizio 1.2.1. Dimostra che quella appena definita è effettivamente una relazione d'equivalenza sull'insieme delle curve di classe C^k .

Data una curva σ , vogliamo trovare un rappresentante più bello degli altri nella sua classe di equivalenza.

Definizione 1.2.4: Sia $I = [a, b]$ un intervallo. Una *partizione* $\mathcal{P}$ di I è una $(k+1)$ -upla $(t_0, \dots, t_k)$ con $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$. Se $\mathcal{P}$ è una partizione di I , poniamo $\|\mathcal{P}\| = \max_j |t_j - t_{j-1}|$.

Definizione 1.2.5: Data una curva $\sigma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ e una partizione $\mathcal{P}$ di $[a, b]$, poniamo

$$L(\sigma, \mathcal{P}) = \sum_{j=1}^k \|\sigma(t_j) - \sigma(t_{j-1})\|.$$

Diremo che σ è *rettificabile* se il limite

$$L(\sigma) = \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} L(\sigma, \mathcal{P})$$

esiste finito. Tale limite verrà chiamato *lunghezza* di σ .

Teorema 1.2.1: Ogni curva $\sigma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ di classe C^1 è *rettificabile*, e si ha

$$L(\sigma) = \int_a^b \|\sigma'(t)\| dt.$$

Dimostrazione: Essendo σ di classe C^1 , l'integrale è finito. Quindi dobbiamo dimostrare che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se $\mathcal{P}$ è una partizione di $[a, b]$ con $\|\mathcal{P}\| < \delta$ allora

$$\left| \int_a^b \|\sigma'(t)\| dt - L(\sigma, \mathcal{P}) \right| < \varepsilon. \quad (1.2.1)$$

Prima di tutto notiamo che per ogni partizione $\mathcal{P} = (t_0, \dots, t_k)$ e ogni $j = 1, \dots, k$ si ha

$$\|\sigma(t_j) - \sigma(t_{j-1})\| = \left\| \int_{t_{j-1}}^{t_j} \sigma'(t) dt \right\| \leq \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|\sigma'(t)\| dt,$$

per cui sommando su j troviamo

$$L(\sigma, \mathcal{P}) \leq \int_a^b \|\sigma'(t)\| dt \quad (1.2.2)$$

quale che sia la partizione $\mathcal{P}$.

Ora, fissato $\varepsilon > 0$, l'uniforme continuità di σ' sull'intervallo compatto $[a, b]$ ci fornisce un $\delta > 0$ tale che

$$\forall s, t \in [a, b] \quad |t - s| < \delta \implies \|\sigma'(t) - \sigma'(s)\| < \frac{\varepsilon}{b-a}. \quad (1.2.3)$$

Sia $\mathcal{P} = (t_0, \dots, t_k)$ una partizione di $[a, b]$ con $\|\mathcal{P}\| < \delta$. Per ogni $j = 1, \dots, k$ e $s \in [t_{j-1}, t_j]$ abbiamo

$$\sigma(t_j) - \sigma(t_{j-1}) = \int_{t_{j-1}}^{t_j} \sigma'(s) ds + \int_{t_{j-1}}^{t_j} (\sigma'(t) - \sigma'(s)) dt = (t_j - t_{j-1})\sigma'(s) + \int_{t_{j-1}}^{t_j} (\sigma'(t) - \sigma'(s)) dt.$$

Quindi

$$\begin{aligned} \|\sigma(t_j) - \sigma(t_{j-1})\| &\geq (t_j - t_{j-1})\|\sigma'(s)\| - \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|\sigma'(t) - \sigma'(s)\| dt \\ &\geq (t_j - t_{j-1})\|\sigma'(s)\| - \frac{\varepsilon}{b-a}(t_j - t_{j-1}), \end{aligned}$$

dove l'ultimo passaggio segue dal fatto che $s, t \in [t_{j-1}, t_j]$ implica $|t - s| < \delta$, e quindi possiamo applicare (1.2.3). Dividendo per $t_j - t_{j-1}$ otteniamo

$$\frac{\|\sigma(t_j) - \sigma(t_{j-1})\|}{t_j - t_{j-1}} \geq \|\sigma'(s)\| - \frac{\varepsilon}{b-a},$$

da cui integrando rispetto a s su $[t_{j-1}, t_j]$ segue che

$$\|\sigma(t_j) - \sigma(t_{j-1})\| \geq \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|\sigma'(s)\| ds - \frac{\varepsilon}{b-a}(t_j - t_{j-1}).$$

Sommando su $j = 1, \dots, k$ otteniamo quindi

$$L(\sigma, \mathcal{P}) \geq \int_a^b \|\sigma'(s)\| ds - \varepsilon,$$

che insieme alla (1.2.2) ci dà la (1.2.1). □

Osservazione 1.2.5. Due curve equivalenti hanno sempre la stessa lunghezza: infatti, se $\sigma_1 = \sigma \circ h$, dove $h: [a_1, b_1] \rightarrow [a, b]$ è un cambiamento di parametro, allora

$$L(\sigma_1) = \int_{a_1}^{b_1} \|\sigma'_1(t)\| dt = \int_{a_1}^{b_1} \|\sigma'(h(t))\| |h'(t)| dt = \int_a^b \|\sigma'(\tau)\| d\tau = L(\sigma).$$

Quindi la lunghezza di una curva dipende solo dalla sua classe d'equivalenza (ma non solo dal sostegno: le due curve dell'Esempio 1.2.3 ristrette a $[0, 2\pi]$ hanno lunghezze diverse pur avendo lo stesso sostegno. Il problema è causato dal fatto che una delle due curve non è iniettiva).

Il Teorema precedente suggerisce la seguente definizione:

Definizione 1.2.6: Sia $\sigma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva. Fissato $t_0 \in I$, diremo *lunghezza d'arco* di σ (misurata a partire da t_0) la funzione $s: I \rightarrow \mathbb{R}$ data da

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\sigma'(\tau)\| d\tau.$$

Diremo inoltre che σ è *parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco* se $\|\sigma'\| \equiv 1$, cioè se la lunghezza d'arco coincide col parametro t a meno di una traslazione: $s(t) = t - t_0$.

Osservazione 1.2.6. Nel seguito useremo sempre la lettera s per indicare il parametro lunghezza d'arco, e la lettera t per indicare un parametro qualsiasi. Inoltre, le derivate rispetto al parametro lunghezza d'arco saranno indicate con un punto, mentre le derivate rispetto a un parametro qualsiasi con un apice. Per esempio, scriveremo $\dot{\sigma}$ per $d\sigma/ds$, e σ' per $d\sigma/dt$. La relazione fra $\dot{\sigma}$ e σ' segue facilmente dalla formula di derivazione di funzione composta:

$$\sigma'(t) = \frac{d\sigma}{dt}(t) = \frac{d\sigma}{ds}(s(t)) \cdot \frac{ds}{dt}(t) = \|\sigma'(t)\| \dot{\sigma}(s(t)).$$

Analogamente

$$\dot{\sigma}(s) = \frac{1}{\|\sigma'(s^{-1}(s))\|} \sigma'(s^{-1}(s)),$$

dove in quest'ultima formula la lettera s indica sia il parametro che la funzione lunghezza d'arco. Come vedrai, l'uso della stessa lettera per indicare questi due concetti diversi non creerà, una volta abituati, alcuna confusione.

Proposizione 1.2.2: Sia $\sigma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva regolare. Fissato $t_0 \in I$, indichiamo con $s: I \rightarrow \mathbb{R}$ la lunghezza d'arco di σ misurata a partire da t_0 . Allora $\sigma_1 = \sigma \circ s^{-1}$ è (a meno di traslazioni nel parametro) l'unica curva regolare parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco equivalente a σ e con la sua stessa orientazione.

Dimostrazione: Il fatto che σ_1 sia una curva regolare parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco equivalente a σ e con la sua stessa orientazione è già stato verificato all'inizio della dimostrazione del Teorema 1.1.9.

Rimane da verificare l'unicità. Sia σ_2 un'altra curva verificante le ipotesi. Essendo equivalente a σ , deve esistere un cambiamento di parametro h tale che $\sigma_2 = \sigma_1 \circ h$. Essendo sia σ_1 che σ_2 parametrizzate rispetto alla lunghezza d'arco otteniamo $|h'| \equiv 1$; siccome hanno la stessa orientazione deduciamo $h' \equiv 1$, cioè $h(t) = t + c$ per un opportuno $c \in \mathbb{R}$, e quindi σ_2 differisce da σ_1 per una traslazione, come voluto. $\square$

Dunque ogni curva regolare è equivalente a una (essenzialmente unica) curva parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco. Per questo motivo, a meno di avviso contrario nel seguito supporremo sempre che *ogni curva regolare sia parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco*.

Definizione 1.2.7: Se la curva σ è parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco, il vettore $\mathbf{t} = \dot{\sigma}$ sarà detto *versore tangente* alla curva nel punto $\sigma(s)$.

Osservazione 1.2.7. Se σ è una curva regolare con una parametrizzazione qualunque, allora $\mathbf{t} = \sigma' / \|\sigma'\|$.

In un certo senso, la variazione di $\mathbf{t}$ ci dice quanto la curva σ si discosta dall'essere una retta:

Esercizio 1.2.2. Dimostra che il sostegno di una curva regolare $\sigma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ è contenuto in una retta se e solo se il versore tangente $\mathbf{t}: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ di σ è costante.

Per questo motivo introduciamo la seguente

Definizione 1.2.8: La curvatura di una curva σ parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco è data da

$$\kappa(s) = \|\dot{\mathbf{t}}(s)\| = \|\ddot{\sigma}(s)\|.$$

Diremo che σ è *biregolare* se κ non si annulla mai. In questo caso il *raggio di curvatura* di σ nel punto $\sigma(s)$ è $r(s) = 1/\kappa(s)$.

ESEMPIO 1.2.7. Sia $\sigma: [0, 2\pi r] \rightarrow \mathbb{R}^2$ la circonferenza di centro l'origine e raggio $r > 0$ data da

$$\sigma(s) = (r \cos(s/r), r \sin(s/r)).$$

Si verifica subito che σ è parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco, e che

$$\mathbf{t}(s) = \dot{\sigma}(s) = (-\sin(s/r), \cos(s/r)).$$

Quindi

$$\dot{\mathbf{t}}(s) = \frac{1}{r}(-\cos(s/r), -\sin(s/r)),$$

per cui σ ha curvatura costante $1/r$ (e questo è il motivo per cui l'inverso della curvatura si chiama raggio di curvatura).

È ragionevole pensare che se $\kappa(s) \neq 0$ allora il versore $\dot{\mathbf{t}}(s)/\kappa(s)$ contiene informazioni geometriche rilevanti sulla curva; in un certo senso, dice in che direzione si sta piegando la curva.

Ora, il vettore $\dot{\mathbf{t}}$ non può essere qualunque. Infatti, essendo $\mathbf{t}$ un versore, abbiamo

$$(\mathbf{t}, \mathbf{t}) \equiv 1,$$

e derivando otteniamo

$$(\dot{\mathbf{t}}, \mathbf{t}) \equiv 0.$$

In altre parole, $\dot{\mathbf{t}}$ è sempre ortogonale a $\mathbf{t}$.

Definizione 1.2.9: Sia σ una curva biregolare. Allora il versore $\mathbf{n}(s) = \dot{\mathbf{t}}(s)/\|\dot{\mathbf{t}}(s)\|$ è detto *versore normale* alla curva nel punto $\sigma(s)$. Il piano passante per $\sigma(s)$ e parallelo a $\text{Span}(\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s))$ è detto *piano osculatore* alla curva in $\sigma(s)$.

Osservazione 1.2.8. Se $\sigma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ è una curva regolare nel piano, per ogni $s \in I$ esiste un unico versore $\mathbf{n}(s)$ ortogonale a $\mathbf{t}(s)$ e tale che la coppia $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s)\}$ abbia la stessa orientazione della base canonica. Essendo $\dot{\mathbf{t}} \perp \mathbf{t}$, deve esistere $\tilde{\kappa}(s) \in \mathbb{R}$ tale che $\dot{\mathbf{t}}(s) = \tilde{\kappa}(s)\mathbf{n}(s)$. La funzione $\tilde{\kappa}: I \rightarrow \mathbb{R}$ così definita è detta *curvatura orientata* di σ , ed è legata alla curvatura usuale dall'identità $\kappa = |\tilde{\kappa}|$.

Nel resto di questo paragrafo (a parte un esercizio finale) considereremo soltanto curve nello spazio $\mathbb{R}^3$ o nel piano $\mathbb{R}^2$.

Se il sostegno di una curva regolare è contenuto in un piano, è chiaro (perché?) che il piano osculatore della curva è costante. Questo fa pensare che si possa misurare quanto una curva non è piana vedendo quanto varia il piano osculatore. Siccome un piano (per l'origine in $\mathbb{R}^3$) è completamente determinato dalla sua direzione ortogonale, siamo portati alla seguente

Definizione 1.2.10: Sia $\sigma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva biregolare. Il versore *binormale* alla curva in $\sigma(s)$ è dato da $\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}(s)$, dove $\wedge$ indica il prodotto vettore in $\mathbb{R}^3$. La terna $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ di applicazioni a valori in $\mathbb{R}^3$ è detta *riferimento di Frenet* associato alla curva; per ogni $s \in I$ la terna $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$, con la stessa orientazione della base canonica di $\mathbb{R}^3$, che varia lungo la curva.

Proposizione 1.2.3: Sia $\sigma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva biregolare. Allora il sostegno di σ è contenuto in un piano se e solo se il versore binormale è costante.

Dimostrazione: Supponiamo che il sostegno di σ sia contenuto in un piano; in particolare deve esistere un piano π passante per l'origine tale che $\sigma(s) - \sigma(s') \in \pi$ per ogni $s, s' \in I$. Considerando il rapporto incrementale, da questo si deduce subito che $\mathbf{t}(s) \in \pi$ per ogni $s \in I$. In maniera analoga si trova $\dot{\mathbf{t}}(s) \in \pi$

per ogni $s \in I$, e quindi $\mathbf{n}(s) \in \pi$ per ogni $s \in I$. Quindi $\mathbf{b}(s)$ è sempre uno dei due versori normali a π ; dovendo variare con continuità, è costante.

Viceversa, supponiamo che $\mathbf{b}$ sia un vettore costante; vogliamo dimostrare che il sostegno di σ è contenuto in un piano. Ora, un piano è determinato da un suo punto e da un versore ortogonale: un punto $p \in \mathbb{R}^3$ appartiene al piano passante per $p_0 \in \mathbb{R}^3$ e ortogonale al vettore $v \in \mathbb{R}^3$ se e solo se $(p - p_0, v) = 0$. Prendiamo $t_0 \in I$; vogliamo dimostrare che il sostegno di σ è contenuto nel piano passante per $\sigma(t_0)$ e ortogonale a $\mathbf{b}$. Questo equivale a far vedere che

$$(\sigma(t), \mathbf{b}) \equiv (\sigma(t_0), \mathbf{b}),$$

ovvero che la funzione $t \mapsto (\sigma(t), \mathbf{b})$ è costante. Ma infatti abbiamo

$$\frac{d}{ds}(\sigma, \mathbf{b}) = (\dot{\sigma}, \mathbf{b}) \equiv 0,$$

per cui il sostegno di σ è effettivamente contenuto nel piano di equazione $(p - \sigma(t_0), \mathbf{b}) = 0$. $\square$

Vediamo cosa possiamo dire sulla derivata del versore binormale, derivata che dovrebbe misurare quanto una curva biregolare non è piana. Anche $\mathbf{b}$ è un versore; quindi il ragionamento già fatto per il versore tangente ci dice che anche stavolta $\dot{\mathbf{b}} \perp \mathbf{b}$. D'altra parte,

$$\dot{\mathbf{b}} = \dot{\mathbf{t}} \wedge \mathbf{n} + \mathbf{t} \wedge \dot{\mathbf{n}} = \mathbf{t} \wedge \dot{\mathbf{n}},$$

per cui $\dot{\mathbf{b}}$ è perpendicolare anche a $\mathbf{t}$; quindi $\dot{\mathbf{b}}$ dev'essere un multiplo di $\mathbf{n}$.

Definizione 1.2.11: Sia $\sigma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva biregolare. La *torsione* di σ è la funzione $\tau: I \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\dot{\mathbf{b}} = -\tau \mathbf{n}$. (*Attenzione:* in alcuni testi la torsione viene definita come l'opposto della funzione da noi introdotta.)

Possiamo ora calcolare anche la derivata di $\mathbf{n}$:

$$\dot{\mathbf{n}} = \dot{\mathbf{b}} \wedge \mathbf{t} + \mathbf{b} \wedge \dot{\mathbf{t}} = -\tau \mathbf{n} \wedge \mathbf{t} + \mathbf{b} \wedge \kappa \mathbf{n} = -\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b}.$$

Definizione 1.2.12: Le tre equazioni

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{t}} = \kappa \mathbf{n}, \\ \dot{\mathbf{n}} = -\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b}, \\ \dot{\mathbf{b}} = -\tau \mathbf{n}, \end{cases} \quad (1.2.4)$$

sono dette *formule di Frenet-Serret* della curva biregolare σ .

Osservazione 1.2.9. Il riferimento di Frenet dipende dall'orientazione della curva, mentre la curvatura e la torsione no. Più precisamente, se $\sigma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ è una curva biregolare parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco, e $\sigma_1(s) = \sigma(-s)$ è una curva parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco equivalente a σ ma con l'orientazione opposta, allora abbiamo $\mathbf{t}_1(s) = -\mathbf{t}(-s)$, $\kappa_1(s) = \kappa(-s)$, $\mathbf{n}_1(s) = \mathbf{n}(-s)$, $\mathbf{b}_1(s) = -\mathbf{b}(-s)$, e $\tau_1(s) = \tau(-s)$, dove l'indice 1 ovviamente identifica gli oggetti e le quantità relative alla curva σ_1 .

Osservazione 1.2.10. La curvatura orientata di curve piane dipende invece dall'orientazione della curva. Infatti, con le notazioni dell'osservazione precedente applicate a una curva piana σ , troviamo $\mathbf{t}_1(s) = -\mathbf{t}(-s)$, $\tilde{\kappa}_1(s) = -\tilde{\kappa}(-s)$ e $\mathbf{n}_1(s) = -\mathbf{n}(-s)$.

Osservazione 1.2.11. Ci sono delle formule di Frenet-Serret anche per le curve piane. Siccome, per il solito motivo, $\dot{\mathbf{n}}$ è ortogonale a $\mathbf{n}$, è un multiplo di $\mathbf{t}$. Derivando $(\mathbf{t}, \mathbf{n}) \equiv 0$ troviamo $(\mathbf{t}, \dot{\mathbf{n}}) = -\tilde{\kappa}$, e quindi

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{t}} = \tilde{\kappa} \mathbf{n}, \\ \dot{\mathbf{n}} = -\tilde{\kappa} \mathbf{t}, \end{cases}$$

sono le formule di Frenet-Serret per le curve piane. Nell'Esercizio 1.2.11 vedremo formule analoghe per curve in $\mathbb{R}^n$.

L'idea di fondo della teoria locale delle curve è che curvatura e torsione determinano completamente una curva. Per esprimere esattamente cosa intendiamo, ci serve una definizione.

Definizione 1.2.13: Un *movimento rigido* di $\mathbb{R}^n$ è un isomorfismo affine $\rho: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ della forma $\rho(x) = Ax + b$, dove $A \in SO(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid A^T A = I \text{ e } \det A = 1\}$, e $b \in \mathbb{R}^n$.

Esercizio 1.2.3. Sia $\sigma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva biregolare parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco, e $\rho: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un movimento rigido. Dimostra che $\rho \circ \sigma$ è una curva biregolare parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco con la stessa curvatura e la stessa torsione di σ .

Quindi curvatura e torsione non possono distinguere due curve ottenute l'una dall'altra tramite un movimento rigido; ma questa è l'unica ambiguità. Le formule di Frenet-Serret sono esattamente lo strumento che ci permetterà di dimostrarlo, usando il seguente teorema di Analisi:

Teorema 1.2.4: *Dati un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$, un punto $t_0 \in I$, un vettore $u_0 \in \mathbb{R}^n$, e due applicazioni $f: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $A: I \rightarrow M_{n,n}(\mathbb{R})$ di classe C^k , con $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$, esiste un'unica soluzione $u: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ di classe C^k del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u' = Au + f, \\ u(t_0) = u_0. \end{cases}$$

In particolare, la soluzione del problema di Cauchy per sistemi *lineari* di equazioni differenziali *ordinarie* esiste su tutto l'intervallo di definizione dei coefficienti.

E quindi:

Teorema 1.2.5: (fondamentale della teoria locale delle curve) *Date due funzioni $\kappa: I \rightarrow \mathbb{R}^+$ e $\tau: I \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^∞ con $\kappa > 0$ sempre, esiste un'unica (a meno di movimenti rigidi dello spazio) curva $\sigma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ biregolare parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco con curvatura κ e torsione τ .*

Dimostrazione: Cominciamo con l'esistenza. Le formule di Frenet-Serret (1.2.4) sono un sistema lineare di equazioni differenziali ordinarie in 9 incognite, le componenti di $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ e $\mathbf{b}$, a cui possiamo quindi applicare il Teorema 1.2.4.

Fissiamo allora un punto $s_0 \in I$ e una base ortonormale $\{\mathbf{t}_0, \mathbf{n}_0, \mathbf{b}_0\}$ con la stessa orientazione della base canonica. Per il teorema appena citato, esiste un'unica terna di funzioni $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ verificanti (1.2.4) e tali che $\mathbf{t}(s_0) = \mathbf{t}_0$, $\mathbf{n}(s_0) = \mathbf{n}_0$ e $\mathbf{b}(s_0) = \mathbf{b}_0$.

Ora, dalle (1.2.4) ricaviamo che le funzioni $(\mathbf{t}, \mathbf{t})$, $(\mathbf{t}, \mathbf{n})$, $(\mathbf{t}, \mathbf{b})$, $(\mathbf{n}, \mathbf{n})$, $(\mathbf{n}, \mathbf{b})$ e $(\mathbf{b}, \mathbf{b})$ soddisfano il seguente sistema di equazioni differenziali lineari ordinarie

$$\begin{cases} \frac{d}{ds}(\mathbf{t}, \mathbf{t}) = 2\kappa(\mathbf{t}, \mathbf{n}), \\ \frac{d}{ds}(\mathbf{t}, \mathbf{n}) = -\kappa(\mathbf{t}, \mathbf{t}) + \tau(\mathbf{t}, \mathbf{b}) + \kappa(\mathbf{n}, \mathbf{n}), \\ \frac{d}{ds}(\mathbf{t}, \mathbf{b}) = -\tau(\mathbf{t}, \mathbf{n}) + \kappa(\mathbf{n}, \mathbf{b}), \\ \frac{d}{ds}(\mathbf{n}, \mathbf{n}) = -2\kappa(\mathbf{t}, \mathbf{n}) + 2\tau(\mathbf{n}, \mathbf{b}), \\ \frac{d}{ds}(\mathbf{n}, \mathbf{b}) = -\kappa(\mathbf{t}, \mathbf{b}) - \tau(\mathbf{n}, \mathbf{n}) + \tau(\mathbf{b}, \mathbf{b}), \\ \frac{d}{ds}(\mathbf{b}, \mathbf{b}) = -2\tau(\mathbf{n}, \mathbf{b}), \end{cases}$$

con condizioni iniziali

$$(\mathbf{t}, \mathbf{t})(s_0) = 1, (\mathbf{t}, \mathbf{n})(s_0) = 0, (\mathbf{t}, \mathbf{b})(s_0) = 0, (\mathbf{n}, \mathbf{n})(s_0) = 1, (\mathbf{n}, \mathbf{b})(s_0) = 0, (\mathbf{b}, \mathbf{b})(s_0) = 1.$$

Ma si verifica subito che $(\mathbf{t}, \mathbf{t}) \equiv (\mathbf{n}, \mathbf{n}) \equiv (\mathbf{b}, \mathbf{b}) \equiv 1$, $(\mathbf{t}, \mathbf{n}) \equiv (\mathbf{t}, \mathbf{b}) \equiv (\mathbf{n}, \mathbf{b}) \equiv 0$ è una soluzione dello stesso sistema di equazioni differenziali soddisfacente le stesse condizioni iniziali in s_0 . Quindi è l'unica soluzione, per cui la terna $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ è una terna ortonormale per ogni valore di $s \in I$. Ha anche sempre l'orientazione della base canonica di $\mathbb{R}^3$: infatti $(\mathbf{t} \wedge \mathbf{n}, \mathbf{b})$ è una funzione continua in I a valori in $\{+1, -1\}$ e vale $+1$ in s_0 ; quindi $(\mathbf{t} \wedge \mathbf{n}, \mathbf{b}) \equiv +1$, come voluto.

Definiamo infine la curva $\sigma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ ponendo

$$\sigma(s) = \int_{s_0}^s \mathbf{t}(t) dt.$$

La curva σ è di classe C^∞ con derivata $\mathbf{t}(s)$, per cui è regolare, parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco e con versore tangente $\mathbf{t}$. Siccome le (1.2.4) ci danno $\ddot{\sigma} = \kappa \mathbf{n}$ con $\kappa > 0$ sempre, ne deduciamo che κ è la

curvatura e $\mathbf{n}$ il versore normale di σ (che risulta quindi biregolare). Ne segue che $\mathbf{b}$ è il versore binormale e, di nuovo grazie a (1.2.4), τ è la torsione di σ .

Vediamo ora l'unicità. Sia $\sigma_1: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ un'altra curva biregolare parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco con curvatura κ e torsione τ . Fissiamo $s_0 \in I$; a meno di un movimento rigido possiamo supporre che $\sigma(s_0) = \sigma_1(s_0)$ e che σ e σ_1 abbiano lo stesso riferimento di Frenet in s_0 . Per l'unicità della soluzione di (1.2.4) ne segue che σ e σ_1 hanno lo stesso riferimento di Frenet in tutti i punti di I ; in particolare, $\dot{\sigma} \equiv \dot{\sigma}_1$. Ma allora

$$\sigma(s) = \sigma(s_0) + \int_{s_0}^s \dot{\sigma}(t) dt = \sigma_1(s_0) + \int_{s_0}^s \dot{\sigma}_1(t) dt = \sigma_1(s),$$

e $\sigma_1 \equiv \sigma$. □

Osservazione 1.2.12. In modo assolutamente analogo si dimostra il seguente risultato: *Data una funzione $\tilde{\kappa}: I \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^∞ , esiste un'unica (a meno di movimenti rigidi del piano) curva $\sigma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ regolare parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco con curvatura orientata $\tilde{\kappa}$.*

Concludiamo questo paragrafo con una serie di esercizi.

Esercizio 1.2.4. Sia $\sigma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva biregolare con una parametrizzazione qualunque. Dimostra che i versori tangente, normale e binormale, la curvatura e la torsione di σ sono dati dalle formule

$$\mathbf{t} = \frac{\sigma'}{\|\sigma'\|}, \quad \mathbf{b} = \frac{\sigma' \wedge \sigma''}{\|\sigma' \wedge \sigma''\|}, \quad \mathbf{n} = \frac{(\sigma' \wedge \sigma'') \wedge \sigma'}{\|\sigma' \wedge \sigma''\| \|\sigma'\|}, \quad \kappa = \frac{\|\sigma' \wedge \sigma''\|}{\|\sigma'\|^3}, \quad \tau = \frac{(\sigma' \wedge \sigma'', \sigma''')}{\|\sigma' \wedge \sigma''\|^2}.$$

Esercizio 1.2.5. Sia $\sigma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva piana regolare, e scriviamo $\sigma(t) = (x(t), y(t))$, dove t è un parametro qualunque. Dimostra che la curvatura orientata di σ è data da

$$\tilde{\kappa} = \frac{x'y'' - x''y'}{((x')^2 + (y')^2)^{3/2}}.$$

Esercizio 1.2.6. Sia $\sigma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva piana regolare, e supponiamo sia data in coordinate polari dall'equazione $r = \rho(\theta)$ per un'opportuna funzione ρ . Dimostra che la lunghezza d'arco di σ è data da

$$s(\theta) = \int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\theta,$$

e che la sua curvatura orientata è

$$\tilde{\kappa} = \frac{2(\rho')^2 - \rho\rho'' + \rho^2}{(\rho^2 + (\rho')^2)^{3/2}}.$$

Esercizio 1.2.7. Dimostra che ogni curva piana regolare con curvatura orientata costante è un arco di circonferenza (o un segmento se $\tilde{\kappa} \equiv 0$).

Esercizio 1.2.8. Sia $\sigma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva piana regolare e $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 tale che $F \circ \sigma \equiv 0$. Dimostra che per ogni $t \in I$ il vettore tangente $\sigma'(t)$ è ortogonale al gradiente di F calcolato in $\sigma(t)$.

Esercizio 1.2.9. Sia $\sigma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva biregolare. Dimostra che le seguenti condizioni sono equivalenti:

- (i) esiste un vettore $v \in S^2$ e una costante $a_0 \in \mathbb{R}$ tali che $(\mathbf{t}, v) \equiv a_0$;
- (ii) esiste un piano per l'origine π tale che $\mathbf{n}(s) \in \pi$ per ogni $s \in I$;
- (iii) esistono due costanti $a, b \in \mathbb{R}$ non entrambe nulle tali che $a\kappa + b\tau \equiv 0$.

Una curva soddisfacente una qualsiasi di queste condizioni si chiama *elica*. Dimostra che ogni elica ammette una parametrizzazione della forma $\sigma(t) = \gamma(t) + (t - t_0)v$, dove γ è una curva piana parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco, e v è un vettore ortogonale al piano contenente γ .

Esercizio 1.2.10. Sia $\sigma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva biregolare parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco, con curvatura κ e torsione τ . Supponiamo che $\tau(s), \dot{\kappa}(s) \neq 0$ per ogni $s \in I$. Dimostra che il sostegno di σ è contenuto nella sfera unitaria S^2 se e solo se

$$\left(\frac{1}{\kappa}\right)^2 + \left(\frac{\dot{\kappa}}{\tau\kappa^2}\right)^2 \equiv 1.$$

(Suggerimento: per dimostrare la sufficienza della condizione, fai vedere che l'applicazione

$$\beta = \sigma + (1/\kappa)\mathbf{n} - (\dot{\kappa}/\tau\kappa^2)\mathbf{b}$$

è costante.)

Esercizio 1.2.11. In questo esercizio vogliamo derivare delle formule di Frenet per curve in $\mathbb{R}^n$; il tuo compito è sistemare i dettagli del ragionamento. Sia $\sigma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco, e poniamo $\mathbf{t}_1 = \dot{\sigma}$. Se σ è biregolare, per il solito motivo esistono un versore $\mathbf{t}_2$ ortogonale a $\mathbf{t}_1$ e un $\kappa_1 > 0$ tali che $\dot{\mathbf{t}}_1 = \kappa_1 \mathbf{t}_2$. Ora, $\dot{\mathbf{t}}_2$ è ortogonale a $\mathbf{t}_2$, e $(\mathbf{t}_1, \dot{\mathbf{t}}_2) = -\kappa_1$. Se supponiamo che $\dot{\mathbf{t}}_2$ non sia parallelo a $\mathbf{t}_1$ (ovvero che non sia contenuto nel piano generato da $\mathbf{t}_1$ e $\mathbf{t}_2$, e diremo che σ è *3-regolare*), allora possiamo trovare un versore $\mathbf{t}_3$ ortogonale a $\mathbf{t}_1$ e $\mathbf{t}_2$, e un $\kappa_2 > 0$ tali che $\dot{\mathbf{t}}_2 = -\kappa_1 \mathbf{t}_1 + \kappa_2 \mathbf{t}_3$. Proseguiamo. Il vettore $\dot{\mathbf{t}}_3$ è ortogonale a $\mathbf{t}_3$ e a $\mathbf{t}_1$, e $(\mathbf{t}_2, \dot{\mathbf{t}}_3) = -\kappa_2$. Se $\dot{\mathbf{t}}_3$ non è parallelo a $\mathbf{t}_2$ (e quindi non è contenuto nel sottospazio generato da $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3$, e diremo che σ è *4-regolare*), possiamo trovare $\kappa_3 > 0$ e un versore $\mathbf{t}_4$ ortogonale a $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3$ tale che $\dot{\mathbf{t}}_3 = -\kappa_2 \mathbf{t}_2 + \kappa_3 \mathbf{t}_4$. Continuando in questo modo arriveremo ad avere $n-1$ versori $\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_{n-1}$ ortogonali a due a due, e $n-2$ funzioni positive $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-2}$ tali che

$$\dot{\mathbf{t}}_j = -\kappa_{j-1} \mathbf{t}_{j-1} + \kappa_j \mathbf{t}_{j+1}$$

per $j = 1, \dots, n-2$ (dove $\kappa_0 \equiv 0$). A questo punto esiste un unico versore $\mathbf{t}_n$ tale che $\{\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_n\}$ sia una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ con la stessa orientazione della base canonica. Se supponiamo che $\dot{\mathbf{t}}_{n-1}$ non sia contenuto nel sottospazio generato da $\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_{n-1}$ (e quindi che la curva sia $(n-1)$ -regolare), troviamo un κ_{n-1} non necessariamente positivo tale che

$$\dot{\mathbf{t}}_{n-1} = -\kappa_{n-2} \mathbf{t}_{n-2} + \kappa_{n-1} \mathbf{t}_n \quad \text{e} \quad \dot{\mathbf{t}}_n = -\kappa_{n-1} \mathbf{t}_{n-1}.$$

La funzione κ_j è chiamata *curvatura j -esima* della curva σ . Dimostra infine, sulla falsariga del Teorema 1.2.5, che le curvature j -esime determinano univocamente la curva $(n-1)$ -regolare σ parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco a meno di movimenti rigidi di $\mathbb{R}^n$.

1.3 Teorema di Jordan per curve regolari

I prossimi due paragrafi sono dedicati a risultati di teoria globale delle curve piane, cioè a risultati che mescolano la geometria differenziale delle curve con proprietà (topologiche o d'altro genere) del loro sostegno preso tutto assieme.

Cominciamo con una definizione.

Definizione 1.3.1: Una curva $\sigma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ è detta *semplice* se σ è iniettiva su $[a, b]$ e su $(a, b]$. Una curva continua semplice chiusa nel piano è detta *curva di Jordan*.

Il Teorema della curva di Jordan dice che una curva continua semplice chiusa divide il piano in esattamente due componenti connesse, di cui è bordo. Vogliamo ora esporre una dimostrazione di questo risultato per curve regolari (in particolare differenziabili).

Osservazione 1.3.1. In questo paragrafo sarà sufficiente supporre che le curve regolari siano di classe C^2 , non necessariamente di classe C^∞ .

Come vedremo, per la dimostrazione ci serviranno due ingredienti: l'intorno tubolare di una curva (per dimostrare che il complementare di una curva di Jordan ha al più due componenti connesse), e l'indice di avvolgimento (per dimostrare che il complementare di una curva di Jordan ha almeno due componenti connesse).

Cominciamo ricordando un classico teorema di Analisi, e un noto teorema di Topologia:

Teorema 1.3.1: (della funzione inversa) Sia $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funzione di classe C^k , con $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$, dove Ω è un aperto di $\mathbb{R}^n$. Sia $p_0 \in \Omega$ tale che

$$\det \text{Jac } F(p_0) \neq 0.$$

Allora esistono un intorno $U \subset \Omega$ di p_0 e un intorno $V \subset \mathbb{R}^n$ di $F(p_0)$ tale che $F|_U: U \rightarrow V$ sia un diffeomorfismo con inversa di classe C^k .

Teorema 1.3.2: (Numero di Lebesgue) Sia $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un ricoprimento aperto di uno spazio metrico compatto X . Allora esiste un numero $\delta > 0$, detto numero di Lebesgue del ricoprimento $\mathfrak{U}$, tale che per ogni $x \in X$ esiste $\alpha \in A$ tale che $B(x, \delta) \subset U_\alpha$.

Dimostrazione: Sia $\{U_1, \dots, U_n\}$ un sottoricoprimento finito di $\mathfrak{U}$, e per $j = 1, \dots, n$ definiamo la funzione continua $f_j: X \rightarrow \mathbb{R}$ tramite $f_j(x) = d(x, X \setminus U_j)$. Infine poniamo $f = \max\{f_1, \dots, f_n\}$. La funzione f è continua; inoltre, se $x \in X$ deve esistere un $1 \leq j \leq n$ tale che $x \in U_j$, per cui $f(x) \geq f_j(x) > 0$. Dunque $f > 0$ sempre; sia $\delta > 0$ il minimo di f in X . Ma allora per ogni $x \in X$ deve esistere $1 \leq j \leq n$ tale che $f_j(x) \geq \delta$, per cui la palla aperta di centro x e raggio δ è tutta contenuta in U_j , come voluto. $\square$

Definizione 1.3.2: Sia $\sigma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva regolare nel piano, di sostegno $C = \sigma([a, b])$; se σ non è chiusa, porremo inoltre $C^o = \sigma((a, b))$. Se $\mathbf{n}(t)$ è il versore normale a σ in $\sigma(t) = p \in C$, ed $\varepsilon > 0$, indichiamo con $I_\sigma(p, \varepsilon)$ il segmento $\sigma(t) + (-\varepsilon, \varepsilon)\mathbf{n}(t)$ di lunghezza 2ε centrato in p e ortogonale a σ . Indichiamo inoltre con $N_\sigma(\varepsilon)$ l'unione dei segmenti $I_\sigma(p, \varepsilon)$, al variare di $p \in C^o$ se σ non è chiusa, e al variare di $p \in C$ se σ è chiusa.

Teorema 1.3.3: (Esistenza dell'intorno tubolare) Sia $\sigma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva regolare semplice di classe C^2 . Allora esiste $\varepsilon_0 > 0$ tale che $I_\sigma(p_1, \varepsilon_0) \cap I_\sigma(p_2, \varepsilon_0) = \emptyset$ per ogni $p_1 \neq p_2 \in C = \sigma([a, b])$. Inoltre, se $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ l'insieme $N_\sigma(\varepsilon)$ è un intorno aperto del sostegno di σ (esclusi gli estremi se la curva non è chiusa).

Dimostrazione: Prima di tutto ricordiamo che dire che la curva σ è di classe C^2 in $[a, b]$ vuol dire che si estende a un'applicazione di classe C^2 in un intorno aperto I di $[a, b]$. In particolare, se σ è chiusa la possiamo estendere a un'applicazione periodica di classe C^2 definita su tutto $\mathbb{R}$.

Cominciamo col dimostrare l'esistenza locale dell'intorno tubolare. Sia $F: I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ data da

$$F(t, x) = \sigma(t) + x\mathbf{n}(t), \quad (1.3.1)$$

in modo che $N_\sigma(\varepsilon) = F([a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon))$ se σ è chiusa, e $N_\sigma(\varepsilon) = F((a, b) \times (-\varepsilon, \varepsilon))$ se σ non è chiusa. Trattandosi di una curva nel piano, la regolarità del versore normale $\mathbf{n}$ è uguale alla regolarità del versore tangente $\mathbf{t}$, che è di classe C^1 ; quindi l'applicazione F è di classe C^1 . Ora, il determinante jacobiano di F in $(t, 0)$ è

$$\det \begin{vmatrix} \sigma'_1(t) & \sigma'_2(t) \\ \mathbf{n}_1(t) & \mathbf{n}_2(t) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Fissato $t_0 \in [a, b]$, il Teorema della funzione inversa ci assicura che esistono $\delta_{t_0}, \varepsilon_{t_0} > 0$ tali che F ristretta a $(t_0 - \delta_{t_0}, t_0 + \delta_{t_0}) \times (-\varepsilon_{t_0}, \varepsilon_{t_0})$ sia invertibile; e questo vuol dire esattamente che $I_\sigma(p_1, \varepsilon_{t_0}) \cap I_\sigma(p_2, \varepsilon_{t_0}) = \emptyset$ per ogni $p_1 = \sigma(t_1) \neq \sigma(t_2) = p_2$ con $t_1, t_2 \in (t_0 - \delta_{t_0}, t_0 + \delta_{t_0}) = U_{t_0}$. Inoltre, siccome F ristretta a $U_{t_0} \times (-\varepsilon_{t_0}, \varepsilon_{t_0})$ è iniettiva e ha immagine aperta, otteniamo che $\sigma(U_{t_0}) = F(U_{t_0} \times (-\varepsilon_{t_0}, \varepsilon_{t_0})) \cap C$ è un aperto di C .

Abbiamo quindi un ricoprimento aperto $\{U_t\}_{t \in [a, b]}$ di $[a, b]$, che è un insieme compatto; estraiamo un sottoricoprimento finito $\{U_{t_1}, \dots, U_{t_r}\}$. Allora $\mathfrak{U} = \{\sigma(U_{t_1}), \dots, \sigma(U_{t_r})\}$ è un ricoprimento aperto del sostegno C di σ , che è compatto; sia $\delta > 0$ il numero di Lebesgue di $\mathfrak{U}$. Allora $\varepsilon_0 = \min\{\varepsilon_{t_1}, \dots, \varepsilon_{t_r}, \delta/2\}$ è come voluto. Infatti, prendiamo $p, q \in C$ distinti e supponiamo che esista $p_0 \in I_\sigma(p, \varepsilon_0) \cap I_\sigma(q, \varepsilon_0)$. La disuguaglianza triangolare ci dice allora che

$$\|p - q\| \leq \|p - p_0\| + \|p_0 - q\| < 2\varepsilon_0 < \delta,$$

per cui p e q devono appartenere allo stesso $\sigma(U_{t_j})$. Ma allora $I_\sigma(p, \varepsilon_0) \cap I_\sigma(q, \varepsilon_0) \neq \emptyset$ implica $p = q$, contraddizione, e ci siamo.

In particolare, abbiamo dimostrato che F è globalmente iniettiva su $(a, b) \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$, e che la sua immagine $N_\sigma(\varepsilon_0)$ è un intorno aperto di $\sigma((a, b))$. Se la curva è chiusa, lo stesso ragionamento ci dice che $N_\sigma(\varepsilon_0)$ è un intorno aperto di tutto il sostegno della curva. $\square$

Definizione 1.3.3: Sia $\sigma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva regolare semplice, e sia $\varepsilon_0 > 0$ dato dal teorema precedente. Allora per ogni $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ l'insieme $N_\sigma(\varepsilon)$ è detto *intorno tubolare* di raggio ε della curva σ .

Osservazione 1.3.2. Se $q \in N_\sigma(\varepsilon)$, allora il punto $p_0 = \sigma(t_0)$ del sostegno C di σ più vicino a q è l'unico punto $p \in C$ per cui $q \in I_\sigma(p, \varepsilon)$. Infatti, se $t \mapsto \|q - \sigma(t)\|^2$ ha un minimo in t_0 , allora derivando troviamo $(q - \sigma(t_0), \sigma'(t_0)) = 0$, e quindi $q \in I_\sigma(p_0, \varepsilon)$.

ESEMPIO 1.3.1. Fissato $2 < \alpha < 3$, sia $\sigma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ la curva data da $\sigma(t) = (t, f(t))$, dove $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è la funzione

$$f(t) = \begin{cases} t^\alpha \sin \frac{1}{t} & \text{se } t > 0, \\ 0 & \text{se } t \leq 0. \end{cases}$$

Siccome

$$\frac{d}{dt} \left(t^\alpha \sin \frac{1}{t} \right) = \alpha t^{\alpha-1} \sin \frac{1}{t} - t^{\alpha-2} \cos \frac{1}{t},$$

la funzione f e la curva σ sono di classe C^1 , ma non di classe C^2 ; vogliamo far vedere che σ (ristretta a un qualsiasi intervallo chiuso contenente l'origine) non ha un intorno tubolare. Prima di tutto, è facile vedere che

$$\mathbf{n}(t) = \frac{(t^{\alpha-1} (\frac{1}{t} \cos \frac{1}{t} - \alpha \sin \frac{1}{t}), 1)}{\sqrt{1 + t^{2(\alpha-1)} (\frac{1}{t} \cos \frac{1}{t} - \alpha \sin \frac{1}{t})^2}}$$

per $t \geq 0$, e $\mathbf{n}(t) = (0, 1)$ per $t \leq 0$. Se la curva σ avesse un intorno tubolare, dovrebbe esistere un $\varepsilon > 0$ tale che per ogni $t > 0$ abbastanza piccolo il segmento che va da $\sigma(t)$ all'asse delle y parallelamente a $\mathbf{n}(t)$ ha lunghezza almeno ε . Ma la lunghezza di questo segmento è

$$\ell(t) = t^{3-\alpha} \frac{\sqrt{1 + t^{2(\alpha-1)} (\frac{1}{t} \cos \frac{1}{t} - \alpha \sin \frac{1}{t})^2}}{|\cos \frac{1}{t} - \alpha \sin \frac{1}{t}|},$$

e per ogni $\varepsilon > 0$ possiamo trovare un valore di t arbitrariamente vicino a zero per cui $\ell(t) < \varepsilon$, contraddizione.

Per introdurre il secondo ingrediente, l'indice di avvolgimento, ricordo alcuni fatti di topologia algebrica elementare.

Definizione 1.3.4: Indichiamo con $\pi: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ il rivestimento universale $\pi(t) = (\cos t, \sin t)$. Se $\phi: X \rightarrow S^1$ è un'applicazione continua da uno spazio topologico X a valori in S^1 , un *sollevamento* di ϕ è un'applicazione continua $\tilde{\phi}: X \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\pi \circ \tilde{\phi} = \phi$.

Definizione 1.3.5: Siano $\phi_0, \phi_1: Y \rightarrow X$ due applicazioni continue fra spazi topologici. Un'omotopia fra ϕ_0 e ϕ_1 è un'applicazione continua $\Phi: [0, 1] \times Y \rightarrow X$ tale che $\Phi(0, \cdot) \equiv \phi_0$ e $\Phi(1, \cdot) \equiv \phi_1$. Se esiste un'omotopia fra ϕ_0 e ϕ_1 , diremo che ϕ_0 e ϕ_1 sono *omotope*. Se $Y = [a, b]$ è un intervallo della retta reale e $\phi_0(a) = \phi_1(a)$ e $\phi_0(b) = \phi_1(b)$, allora richiederemo sempre che l'omotopia Φ sia a *estremi fissi*, cioè $\Phi(\cdot, a) \equiv \phi_0(a)$ e $\Phi(\cdot, b) \equiv \phi_0(b)$.

Ci servirà il seguente teorema di Topologia Algebrica:

- Teorema 1.3.4:** (i) Sia $\phi: [a, b] \rightarrow S^1$ una curva continua, e $t_0 \in \mathbb{R}$ tale che $\pi(t_0) = \phi(a)$. Allora esiste un unico sollevamento $\tilde{\phi}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ di ϕ tale che $\tilde{\phi}(a) = t_0$.
- (ii) Sia $\Phi: [0, 1] \times [a, b] \rightarrow S^1$ un'omotopia fra curve continue in S^1 , e $t_0 \in \mathbb{R}$ tale che $\pi(t_0) = \Phi(0, a)$. Allora esiste un unico sollevamento $\tilde{\Phi}: [0, 1] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ di Φ tale che $\tilde{\Phi}(0, a) = t_0$.
- (iii) Più in generale, se X è uno spazio topologico semplicemente connesso, $\phi: X \rightarrow S^1$ è un'applicazione continua, $x_0 \in X$ e $t_0 \in \mathbb{R}$ è tale che $\pi(t_0) = \phi(x_0)$, allora esiste un unico sollevamento $\tilde{\phi}: X \rightarrow \mathbb{R}$ di ϕ tale che $\tilde{\phi}(x_0) = t_0$.
- (iv) Se $\tilde{\phi}_1$ e $\tilde{\phi}_2$ sono due sollevamenti di un'applicazione continua $\phi: X \rightarrow S^1$, dove S^1 è uno spazio topologico semplicemente connesso, allora esiste un $k \in \mathbb{Z}$ tale che $\tilde{\phi}_2 - \tilde{\phi}_1 \equiv 2k\pi$.
- (v) Se $\phi_0: [a, b] \rightarrow S^1$ è una curva continua non surgettiva, allora ϕ_0 è omotopa alla curva costante $\phi_1(t) \equiv (1, 0)$.

Possiamo allora introdurre la seguente

Definizione 1.3.6: Sia $\phi: [0, l] \rightarrow S^1$ una curva continua chiusa. Se $\tilde{\phi}: [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$ è un sollevamento di ϕ , allora il *grado* di ϕ è il numero

$$\deg \phi = \frac{1}{2\pi} (\tilde{\phi}(l) - \tilde{\phi}(0)) \in \mathbb{Z}.$$

Nota che $\deg \phi$ è necessariamente un numero intero, in quanto $\pi(\tilde{\phi}(l)) = \phi(l) = \phi(0) = \pi(\tilde{\phi}(0))$.

In parole povere, il grado è il numero di giri fatti da ϕ prima di chiudersi. È facile verificare che il grado di ϕ non dipende dal sollevamento scelto, in quanto due sollevamenti diversi differiscono per una costante additiva, grazie al Teorema 1.3.4.(iii). In particolare, una curva costante ha grado zero, in quanto ogni suo sollevamento è costante.

La proprietà principale del grado è:

Proposizione 1.3.5: Siano $\phi_0, \phi_1: [0, l] \rightarrow S^1$ due curve chiuse omotopiche (a estremi fissi). Allora

$$\deg \phi_0 = \deg \phi_1.$$

In particolare, se ϕ_0 è omotopica a una costante allora $\deg \phi_0 = 0$.

Dimostrazione: Sia $\Phi: [0, 1] \times [0, l] \rightarrow S^1$ un'omotopia fra ϕ_0 e ϕ_1 , e poniamo $\phi_s(t) = \Phi(s, t)$; in particolare, tutte le ϕ_s sono curve chiuse. Solleviamo Φ a una $\tilde{\Phi}: [0, 1] \times [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$. Siccome le ϕ_s sono chiuse, $\tilde{\Phi}(s, 0) - \tilde{\Phi}(s, l) \in 2\pi\mathbb{Z}$ per ogni $s \in [0, 1]$. Ma allora $s \mapsto \tilde{\Phi}(s, 0) - \tilde{\Phi}(s, l)$ è una funzione continua a valori in uno spazio totalmente sconnesso; quindi è necessariamente costante, e

$$2\pi \deg \phi_0 = \tilde{\Phi}(0, 0) - \tilde{\Phi}(0, l) = \tilde{\Phi}(1, 0) - \tilde{\Phi}(1, l) = 2\pi \deg \phi_1.$$

□

Se $\phi: [0, l] \rightarrow S^1 \subset \mathbb{R}^2$ è differenziabile possiamo dare una formula integrale per il calcolo del grado:

Proposizione 1.3.6: Sia $\phi = (\phi_1, \phi_2): [0, l] \rightarrow S^1$ una curva di classe C^1 , e scegliamo $x_0 \in \mathbb{R}$ in modo che $\phi(0) = (\cos x_0, \sin x_0)$. Allora la funzione $\tilde{\phi}: [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$ data da

$$\tilde{\phi}(t) = x_0 + \int_0^t (\phi_1 \phi_2' - \phi_1' \phi_2) ds$$

è il sollevamento di ϕ tale che $\tilde{\phi}(0) = x_0$.

Dimostrazione: Dobbiamo far vedere che $\cos \tilde{\phi} \equiv \phi_1$ e $\sin \tilde{\phi} \equiv \phi_2$, cioè che

$$0 \equiv (\phi_1 - \cos \tilde{\phi})^2 + (\phi_2 - \sin \tilde{\phi})^2 = 2 - 2(\phi_1 \cos \tilde{\phi} + \phi_2 \sin \tilde{\phi}),$$

per cui basta verificare che

$$\phi_1 \cos \tilde{\phi} + \phi_2 \sin \tilde{\phi} \equiv 1.$$

Questa eguaglianza è vera per $t = 0$; quindi basta controllare che la derivata di $\phi_1 \cos \tilde{\phi} + \phi_2 \sin \tilde{\phi}$ sia identicamente nulla. Ma infatti, derivando $\phi_1^2 + \phi_2^2 \equiv 1$ otteniamo

$$\phi_1 \phi_1' + \phi_2 \phi_2' \equiv 0, \tag{1.3.2}$$

e quindi

$$\begin{aligned} (\phi_1 \cos \tilde{\phi} + \phi_2 \sin \tilde{\phi})' &= \phi_1' \cos \tilde{\phi} - \tilde{\phi}' \phi_1 \sin \tilde{\phi} + \phi_2' \sin \tilde{\phi} + \tilde{\phi}' \phi_2 \cos \tilde{\phi} \\ &= (\phi_1' + \phi_1 \phi_2 \phi_2' - \phi_1' \phi_2^2) \cos \tilde{\phi} + (\phi_2' + \phi_2 \phi_1 \phi_1' - \phi_2' \phi_1^2) \sin \tilde{\phi} \\ &= \phi_1' (1 - \phi_1^2 - \phi_2^2) \cos \tilde{\phi} + \phi_2' (1 - \phi_2^2 - \phi_1^2) \sin \tilde{\phi} \\ &\equiv 0. \end{aligned}$$

□

Corollario 1.3.7: Sia $\phi = (\phi_1, \phi_2): [0, l] \rightarrow S^1$ una curva chiusa di classe C^1 . Allora

$$\deg \phi = \frac{1}{2\pi} \int_0^l (\phi_1 \phi_2' - \phi_1' \phi_2) dt.$$

Dimostrazione: Segue dalla proposizione precedente e dalla definizione di grado. $\square$

Se identifichiamo $\mathbb{R}^2$ con $\mathbb{C}$ la formula precedente ha un'espressione anche più compatta:

Corollario 1.3.8: Sia $\phi: [0, l] \rightarrow S^1 \subset \mathbb{C}$ una curva chiusa di classe C^1 . Allora

$$\deg \phi = \frac{1}{2\pi i} \int_0^l \frac{\phi'}{\phi} dt.$$

Dimostrazione: Siccome ϕ è a valori in S^1 , $1/\phi = \bar{\phi}$, dove $\bar{\phi}$ è il complesso coniugato di ϕ . Scrivendo $\phi = \phi_1 + i\phi_2$ abbiamo

$$\phi' \bar{\phi} = (\phi_1 \phi_1' + \phi_2 \phi_2') + i(\phi_1 \phi_2' - \phi_1' \phi_2) = i(\phi_1 \phi_2' - \phi_1' \phi_2),$$

grazie a (1.3.2), e la tesi segue dal corollario precedente. $\square$

Data una curva chiusa continua nel piano, ci sono (almeno) due modi per associarvi una curva a valori in S^1 , e quindi un grado. In questo paragrafo ci interessa il primo modo, mentre nel prossimo paragrafo useremo il secondo.

Definizione 1.3.7: Sia $\sigma: [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva continua chiusa piana. Scelto un punto $p \notin \sigma([0, l])$ possiamo definire $\phi_p: [0, l] \rightarrow S^1$ ponendo

$$\phi_p(t) = \frac{\sigma(t) - p}{\|\sigma(t) - p\|}.$$

L'indice di avvolgimento di σ relativamente a p è allora definito come $\iota_p(\sigma) = \deg \phi_p$; misura il numero di volte che σ ruota intorno a p .

Le proprietà principali dell'indice di avvolgimento sono contenute nel

Lemma 1.3.9: Sia $\sigma: [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva chiusa continua piana, e sia C una componente connessa dell'aperto $U = \mathbb{R}^2 \setminus \sigma([0, l])$. Allora:

- (i) $\iota_{p_0}(\sigma) = \iota_{p_1}(\sigma)$ per ogni coppia di punti $p_0, p_1 \in C$;
- (ii) se C è la componente connessa illimitata di U allora $\iota_p(\sigma) = 0$ per ogni $p \in C$.

Dimostrazione: (i) Sia $\alpha: [0, 1] \rightarrow C$ una curva con $\alpha(0) = p_0$ e $\alpha(1) = p_1$, e definiamo $\Phi: [0, 1] \times [0, l] \rightarrow S^1$ ponendo

$$\Phi(s, t) = \frac{\sigma(t) - \alpha(s)}{\|\sigma(t) - \alpha(s)\|}.$$

La mappa Φ è un'omotopia fra ϕ_{p_0} e ϕ_{p_1} , e quindi $\iota_{p_0}(\sigma) = \iota_{p_1}(\sigma)$.

(ii) Siccome $[0, l]$ è compatto, il sostegno di σ è contenuto in un disco chiuso D di centro l'origine e raggio $R > 0$ abbastanza grande (e, in particolare, esiste una sola componente connessa illimitata di U). Sia $p_0 \in C \setminus D$; allora le linee congiungenti p_0 a punti del sostegno di σ sono tutte contenute nel settore di vertice p_0 e lati le semirette per p_0 tangenti a D . Questo vuol dire che l'immagine di ϕ_{p_0} è contenuta in un sottoinsieme proprio di S^1 , e quindi ϕ_{p_0} è omotopa a una curva costante. Siccome il grado di una curva costante è nullo, otteniamo $\iota_{p_0}(\sigma) = 0$. $\square$

Nel caso di curve differenziabili, il Corollario 1.3.8 fornisce una formula integrale per il calcolo dell'indice di avvolgimento:

Lemma 1.3.10: Sia $\sigma: [0, l] \rightarrow \mathbb{C}$ una curva di classe C^1 chiusa piana, e $p_0 \notin C = \sigma([0, l])$. Allora l'indice di avvolgimento di σ relativamente a p_0 è dato da

$$\iota_{p_0}(\sigma) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{z - p_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^l \frac{\sigma'}{\sigma - p_0} dt.$$

Dimostrazione: Poniamo $\phi = (\sigma - p_0)/\|\sigma - p_0\|$. Un veloce conto mostra che

$$\frac{\phi'}{\phi} = i \operatorname{Im} \frac{\sigma'}{\sigma - p_0};$$

quindi per avere la tesi basta dimostrare che l'integrale della parte reale di $\sigma'/(\sigma - p_0)$ è nullo. Ma infatti

$$\frac{d}{dt} \log \|\sigma(t) - p_0\| = \operatorname{Re} \frac{\sigma'(t)}{\sigma(t) - p_0},$$

e quindi

$$\int_0^l \operatorname{Re} \frac{\sigma'}{\sigma - p_0} dt = \log \|\sigma(l) - p_0\| - \log \|\sigma(0) - p_0\| = 0.$$

□

Abbiamo quanto serve per dimostrare il

Teorema 1.3.11: (di Jordan per curve regolari) Sia $\sigma: [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva piana, regolare, chiusa e semplice, di classe C^2 , e indichiamo con $C = \sigma([0, l])$ il suo sostegno. Allora $\mathbb{R}^2 \setminus C$ ha esattamente due componenti connesse, e C è la loro frontiera comune.

Dimostrazione: Scegliamo $\varepsilon > 0$ in modo che $N_\sigma(\varepsilon)$ sia un intorno tubolare di σ . Indichiamo con T_+ (rispettivamente, T_-) l'insieme dei punti di $N_\sigma(\varepsilon)$ della forma $\sigma(t) + \delta \mathbf{n}(t)$ con $\delta > 0$ (rispettivamente, $\delta < 0$). È chiaro che $N_\sigma(\varepsilon) \setminus C = T_+ \cup T_-$. Inoltre, sia T_+ che T_- sono connessi. Infatti, dati $\sigma(t_1) + \delta_1 \mathbf{n}(t_1)$, $\sigma(t_2) + \delta_2 \mathbf{n}(t_2) \in T_+$, il cammino che partendo da $\sigma(t_1) + \delta_1 \mathbf{n}(t_1)$ si muove prima parallelamente a σ fino a raggiungere $\sigma(t_2) + \delta_1 \mathbf{n}(t_2)$ e poi parallelamente a $\mathbf{n}(t_2)$ fino a raggiungere $\sigma(t_2) + \delta_2 \mathbf{n}(t_2)$ è tutto contenuto in T_+ ; e in modo analogo si dimostra che T_- è connesso.

Dimostriamo prima di tutto che $\mathbb{R}^2 \setminus C$ ha al massimo due componenti connesse. Infatti, sia K una componente connessa di $\mathbb{R}^2 \setminus C$; chiaramente $\emptyset \neq \partial K \subseteq C$. D'altra parte, se $p \in C$ esiste un intorno di p contenente solo punti di C , di T_+ e di T_- . Quindi o T_+ o T_- (o entrambi) intersecano K ; essendo connessi, abbiamo che $K \supset T_+$ oppure $K \supset T_-$, e in particolare $\partial K \supseteq C$. Ne segue che ci sono al massimo due componenti connesse del complementare del sostegno di σ , e il loro bordo coincide con C .

Per dimostrare invece che ci sono almeno due componenti connesse del complementare di C , scegliamo $t_0 \in (0, l)$, e per $0 \leq |\delta| < \varepsilon$ poniamo $p_\delta = \sigma(t_0) + \delta \mathbf{n}(t_0)$. Chiaramente, $p_\delta \in T_+$ (rispettivamente $p_\delta \in T_-$) se $\delta > 0$ (rispettivamente, $\delta < 0$); quindi, essendo $T_\pm$ connessi, il valore di $\iota_{p_\delta}(\sigma)$ dipende solo dal segno di δ . In particolare, il numero intero

$$\Delta = \iota_{p_\delta}(\sigma) - \iota_{p_{-\delta}}(\sigma)$$

è indipendente da $\delta > 0$. Dunque per concludere la dimostrazione ci basta far vedere che $\Delta \neq 0$; infatti in tal caso il Lemma 1.3.9 ci dice che necessariamente p_δ e $p_{-\delta}$ devono appartenere a componenti connesse distinte di $\mathbb{R}^2 \setminus C$.

Ora, identifichiamo $\mathbb{R}^2$ con $\mathbb{C}$, e supponiamo σ parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco. Allora il vettore normale di σ si ottiene ruotando $\dot{\sigma}$ di $\pi/2$ radianti, operazione che nel campo complesso equivale a moltiplicare per i , per cui possiamo scrivere $\mathbf{n} = i\dot{\sigma}$. Dunque per ogni $\delta > 0$ otteniamo

$$\left(\frac{1}{\sigma(t) - p_\delta} - \frac{1}{\sigma(t) - p_{-\delta}} \right) \dot{\sigma}(t) = \frac{2i\delta \dot{\sigma}(t_0) \dot{\sigma}(t)}{(\sigma(t) - \sigma(t_0))^2 + \delta^2 \dot{\sigma}(t_0)^2}.$$

Siccome σ è di classe C^1 e $\dot{\sigma}(t_0) \neq 0$, possiamo scrivere $\sigma(t) - \sigma(t_0) = (t - t_0)\dot{\sigma}(t_0)[1 + r(t)]$, dove $r(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow t_0$. Quindi

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\sigma(t) - p_\delta} - \frac{1}{\sigma(t) - p_{-\delta}} \right) \dot{\sigma}(t) &= \frac{2i\delta}{(t - t_0)^2[1 + r(t)]^2 + \delta^2} \frac{\dot{\sigma}(t)}{\dot{\sigma}(t_0)} \\ &= \frac{2i\delta}{(t - t_0)^2 + \delta^2} \frac{(t - t_0)^2 + \delta^2}{(t - t_0)^2[1 + r(t)]^2 + \delta^2} \left[1 + \frac{\dot{\sigma}(t) - \dot{\sigma}(t_0)}{\dot{\sigma}(t_0)} \right] \\ &= \frac{2i\delta}{(t - t_0)^2 + \delta^2} + R(t), \end{aligned}$$

con

$$R(t) = \frac{2i\delta}{(t - t_0)^2 + \delta^2} \left[s(t) - r(t)(2 + r(t))(1 + s(t)) \frac{(t - t_0)^2}{(t - t_0)^2[1 + r(t)]^2 + \delta^2} \right],$$

dove $s(t) = (\dot{\sigma}(t) - \dot{\sigma}(t_0))/\dot{\sigma}(t_0) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow t_0$. In particolare, per ogni $\eta > 0$ esiste $\lambda > 0$ (indipendente da δ) tale che

$$|R(t)| < \eta \frac{2\delta}{(t - t_0)^2 + \delta^2}$$

non appena $|t - t_0| < \lambda$. Fissato $0 < \eta < 1/8$, prendiamo il $\lambda > 0$ corrispondente e indichiamo con $\hat{C}$ la parte di C parametrizzata da σ ristretta a $|t - t_0| > \lambda$. Possiamo allora scrivere

$$\Delta = \iota_{p_\delta}(\sigma) - \iota_{p_{-\delta}}(\sigma) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\hat{C}} \left(\frac{1}{z - p_\delta} - \frac{1}{z - p_{-\delta}} \right) dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{t_0-\lambda}^{t_0+\lambda} \left(\frac{2i\delta}{(t - t_0)^2 + \delta^2} + R(t) \right) dt.$$

Per quanto osservato prima, Δ è un numero intero indipendente da δ . Facciamo allora tendere δ a zero nel secondo membro. Il primo integrale converge a zero, in quanto l'integrando non ha singolarità in $\hat{C}$. Per il secondo integrale, tramite il cambiamento di variabile $t - t_0 = \delta s$ vediamo prima di tutto che

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{t_0-\lambda}^{t_0+\lambda} \frac{2i\delta}{(t - t_0)^2 + \delta^2} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\lambda/\delta}^{\lambda/\delta} \frac{1}{1 + s^2} ds \rightarrow \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + s^2} ds = 1$$

per $\delta \rightarrow 0$. Inoltre,

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{t_0-\lambda}^{t_0+\lambda} R(t) dt \right| < \frac{\eta}{\pi} \int_{-\lambda/\delta}^{\lambda/\delta} \frac{1}{1 + s^2} ds \rightarrow \eta$$

quando $\delta \rightarrow 0$. Mettendo tutto questo insieme otteniamo quindi che prendendo δ abbastanza piccolo possiamo stimare

$$|\Delta - 1| \leq \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\hat{C}} \left(\frac{1}{z - p_\delta} - \frac{1}{z - p_{-\delta}} \right) dz \right| + \left| \frac{1}{2\pi} \int_{t_0-\lambda}^{t_0+\lambda} \frac{2\delta}{(t - t_0)^2 + \delta^2} dt - 1 \right| + \frac{1}{2\pi} \left| \int_{t_0-\lambda}^{t_0+\lambda} R(t) dt \right| \leq 4\eta < \frac{1}{2}.$$

Ma Δ è un numero intero; quindi necessariamente $\Delta = 1$, e abbiamo finito. $\square$

Osservazione 1.3.3. Una curva regolare, semplice e chiusa contenuta in una superficie S che non è un piano potrebbe non dividere la superficie S in esattamente due parti. Si può adattare il concetto di intorno tubolare in modo da far funzionare la prima parte della dimostrazione, e dimostrare che il complementare del sostegno della curva ha al più due componenti connesse. Possono però avvenire due fenomeni nuovi. Potrebbe essere impossibile definire in maniera coerente il versore normale alla curva, per cui non è possibile distinguere T_+ da T_- , ed è quello che succede in superfici non orientabili quali il nastro di Möbius (il concetto di orientabilità di una superficie verrà definito nel paragrafo 2.4). Oppure, la stessa componente connessa potrebbe contenere sia T_+ che T_- (è il caso di $S = S^1 \times S^1$, il toro). In entrambi i casi, il complementare della curva è connesso.

Come abbiamo già osservato precedentemente, il complementare di un compatto nel piano ha esattamente una sola componente connessa illimitata. Questo fatto (e la dimostrazione del Teorema 1.3.11) suggeriscono la seguente

Definizione 1.3.8: Sia $\sigma: [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva di Jordan (di classe C^2) nel piano. L'unica componente connessa limitata del complementare del sostegno di σ è detta *interno* di σ . Il Lemma 1.3.9.(ii) e la dimostrazione del Teorema 1.3.11 ci dicono che l'indice di avvolgimento di σ relativamente a un punto qualsiasi del suo interno dev'essere uguale a ± 1 . Diremo che σ è *orientata positivamente* (rispettivamente, *orientata negativamente*) se l'indice è $+1$ (rispettivamente, -1).

Osservazione 1.3.4. Nella dimostrazione del Teorema 1.3.11 abbiamo visto che $\iota_{p_\delta}(\sigma) - \iota_{p_{-\delta}}(\sigma) = 1$ sempre; inoltre $\iota_{p_{\pm\delta}}(\sigma) \neq 0$ se e solo se $p_{\pm\delta}$ appartiene all'interno di σ , e in quel caso si deve avere $\iota_{p_{\pm\delta}}(\sigma) = \pm 1$. Ora, p_δ appartiene all'interno di σ se e solo se $\mathbf{n}(t_0)$ punta verso l'interno di σ , che accade se e solo se σ è percorsa in senso antiorario. Quindi σ è orientata positivamente (negativamente) se e solo se è percorsa in senso antiorario (in senso orario).

Concludiamo questo paragrafo con una serie di interessanti complementi ed esercizi.

Definizione 1.3.9: Una curva continua $\sigma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ è detta *regolare* (di classe C^k) a tratti se esiste una partizione $a = t_0 < t_1 < \dots < t_r = b$ di $[a, b]$ tale che $\sigma|_{[t_{j-1}, t_j]}$ sia regolare (di classe C^k) per $j = 1, \dots, r$. Diremo inoltre che σ è *parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco* se ristretta a ciascun intervallo $[t_{j-1}, t_j]$ lo è.

Esercizio 1.3.1. Dimostra che il complementare del sostegno di una curva di Jordan regolare di classe C^2 a tratti ha esattamente due componenti connesse.

Esercizio 1.3.2. Dimostra il *Teorema dell'arco di Jordan*: se $C \subset \mathbb{R}^2$ è il sostegno di una curva piana $\sigma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ regolare di classe C^2 a tratti semplice non chiusa, allora $\mathbb{R}^2 \setminus C$ è connesso.

┌ L'interno di una curva di Jordan ha una struttura topologica ben precisa:

Teorema 1.3.12: Sia $\sigma: [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva regolare semplice chiusa di sostegno C . Allora l'interno di C è semplicemente connesso.

Dimostrazione: Il sostegno K di una curva chiusa contenuta nell'interno U di C è un compatto, e quindi ha distanza positiva da C , cioè $\min\{\|x - y\| \mid x \in K, y \in C\} > 0$. Questo significa che possiamo trovare $\varepsilon > 0$ tale che K sia disgiunto da $N_\varepsilon(\sigma)$, e quindi costruire una poligonale semplice contenuta in $N_\varepsilon(\sigma)$ il cui interno contenga K . Di conseguenza ci basta dimostrare che l'interno di una qualsiasi poligonale semplice è semplicemente connesso.

Procediamo per induzione sul numero n dei lati della poligonale. Se $n = 3$ abbiamo un triangolo, che essendo convesso è chiaramente semplicemente connesso.

Supponiamo allora che l'interno di una qualsiasi poligonale semplice con n lati sia semplicemente connesso, e sia P una poligonale semplice con $n + 1$ lati. Se P è convessa non c'è nulla da dimostrare. Se invece non è convessa, possiamo trovare una retta ℓ che interseca P in due vertici non consecutivi, e tale che P sia tutta contenuta in uno dei semipiani determinati da ℓ . Infatti, prendiamo una retta qualsiasi che non interseca P , e traslamiola fino al primo momento in cui interseca P , necessariamente in un vertice; a questo punto ruotiamola, se necessario, fino a che non interseca P in un altro vertice. Essendo P non convessa, a meno di ruotare la retta di partenza al più $n + 1$ volte, possiamo essere sicuri che questo secondo vertice non è consecutivo, e quindi abbiamo trovato la retta ℓ cercata.

Scegliamo due vertici p_j e p_k di P contenuti in ℓ e tali che nessun altro vertice di P fra quelli compresi fra p_j e p_k appartenga a ℓ . Possiamo allora formare due nuove poligonali P' e P'' , entrambe con meno lati di P : la poligonale P' è formata sostituendo la spezzata da p_j a p_k con il segmento da p_j a p_k , mentre la poligonale P'' è formata proprio dalla spezzata e dal segmento. Per ipotesi induttiva, gli interni di P' e P'' sono semplicemente connessi.

Sia ora σ una curva chiusa il cui sostegno L sia contenuto nell'interno di P . La prima osservazione è che σ è omotopa a una poligonale chiusa (non necessariamente semplice) contenuta nell'interno di P . Infatti, per compattezza possiamo ricoprire L con un numero finito di dischi contenuti nell'interno di P , ciascuno dei quali interseca L in un connesso. All'interno di ciascuno di questi dischi possiamo deformare con una omotopia lineare l'intersezione con L a un segmento, e in questo modo otteniamo una poligonale τ omotopa a σ nell'interno di P .

Siccome l'interno di P' è semplicemente connesso, esiste un'omotopia T che deforma τ a un punto nell'interno di P' . Con un ragionamento analogo al precedente si vede che possiamo supporre che tutte le curve $\tau_s = T(s, \cdot)$ siano poligonali. Per concludere ci basta far vedere che possiamo deformare T a una omotopia di τ con una curva costante all'interno di P .

Sia allora $s \in (0, 1)$ tale che la poligonale τ_s non sia contenuta nell'interno di P . Questo vuol dire che deve attraversare la spezzata S che collega p_j con p_k . Siccome l'interno di P'' è semplicemente connesso, possiamo deformare con continuità ciascun pezzo di τ_s contenuto nell'interno di P'' a una spezzata contenuta in S senza muovere gli estremi; e poi possiamo deformare quest'ultima a una spezzata contenuta nell'interno di P . Chiaramente questa operazione può essere effettuata mantenendo la dipendenza continua dal parametro s , e quindi otteniamo una nuova omotopia fra τ e una curva costante nell'interno di P , come voluto. $\square$

Esercizio 1.3.3. Dimostra che l'interno di una curva di Jordan regolare di classe C^2 a tratti è semplicemente connesso.

Osservazione 1.3.5. Si può dimostrare che l'interno di una curva di Jordan continua è omeomorfo a un disco aperto. Questo è conseguenza di un risultato molto più generale, che dice che ogni aperto semplicemente connesso di $\mathbb{R}^2$ è omeomorfo a un disco aperto. In realtà si può dimostrare anche molto di più: ogni aperto semplicemente connesso del piano distinto dal piano stesso è *biolomorfo* a un disco aperto (*Teorema di uniformizzazione di Riemann*.) $\Bigg]$

1.4 Il teorema delle tangenti

L'obiettivo di questo paragrafo è dimostrare un altro teorema di teoria globale delle curve, che sarà utile anche in seguito.

Osservazione 1.4.1. In questo paragrafo sarà sufficiente richiedere che le curve coinvolte siano soltanto di classe C^1 (eventualmente a tratti).

Iniziamo introducendo il secondo modo con cui si può associare un grado a una curva chiusa piana.

Definizione 1.4.1: Sia $\sigma: [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva regolare chiusa piana, e sia $\mathbf{t}: [0, l] \rightarrow S^1$ il versore tangente dato da

$$\mathbf{t}(t) = \frac{\sigma'(t)}{\|\sigma'(t)\|}.$$

L'indice di rotazione di σ è $\rho(\sigma) = \deg \mathbf{t}$. Misura il numero di giri del versore tangente a σ .

Esercizio 1.4.1. Sia $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2): [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva regolare chiusa piana. Dimostra che

$$\rho(\sigma) = \frac{1}{2\pi} \int_0^l \frac{\sigma'_1 \sigma''_2 - \sigma''_1 \sigma'_2}{\|\sigma'\|^3} dt.$$

In realtà, in futuro avremo bisogno dell'indice di rotazione per curve regolari a tratti; quindi introduciamo le seguenti definizioni.

Definizione 1.4.2: Sia $\sigma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva piana regolare a tratti, e scegliamo una partizione

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$$

di $[a, b]$ tale che $\sigma|_{[t_{j-1}, t_j]}$ sia regolare per $j = 1, \dots, k$. Supponiamo anche che σ sia parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco in ciascuno dei segmenti in cui è regolare, e poniamo

$$\dot{\sigma}(t_j^-) = \lim_{t \rightarrow t_j^-} \dot{\sigma}(t)$$

per $j = 1, \dots, k$, e

$$\dot{\sigma}(t_j^+) = \lim_{t \rightarrow t_j^+} \dot{\sigma}(t)$$

per $j = 0, \dots, k-1$. Inoltre, se σ è chiusa poniamo anche $\dot{\sigma}(t_0^-) = \dot{\sigma}(t_k^-)$ e $\dot{\sigma}(t_k^+) = \dot{\sigma}(t_0^+)$. Diremo che t_j è una *cuspid* se $\dot{\sigma}(t_j^-) = -\dot{\sigma}(t_j^+)$. Se t_j non è una cuspid, l'*angolo esterno* $\varepsilon_j \in (-\pi, \pi)$ è l'angolo fra $\dot{\sigma}(t_j^-)$ e $\dot{\sigma}(t_j^+)$, preso positivo se $\{\dot{\sigma}(t_j^-), \dot{\sigma}(t_j^+)\}$ è una base positiva di $\mathbb{R}^2$, negativo altrimenti. I punti in cui l'angolo esterno è diverso da zero saranno detti *vertici* della curva. Infine, un *poligono curvilineo* è una curva regolare a tratti semplice chiusa parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco e priva di cuspid.

Definizione 1.4.3: Sia $\sigma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ un poligono curvilineo nel piano. Diremo che σ è *orientato positivamente* se il versore normale (ove è definito) punta verso l'interno del poligono, o, equivalentemente (ricorda l'Osservazione 1.3.4), se l'indice di avvolgimento di σ rispetto a un punto del suo interno è uguale a +1.

Definizione 1.4.4: Sia $\sigma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ un poligono curvilineo nel piano, e $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$ una partizione di $[a, b]$ tale che $\sigma|_{[t_{j-1}, t_j]}$ sia regolare per $j = 1, \dots, k$. Definiamo la funzione *angolo di rotazione* $\theta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ nel seguente modo: sia $\theta: [a, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$ il sollevamento di $\dot{\sigma}: [a, t_1] \rightarrow S^1$ scelto in modo che $\theta(a) \in (-\pi, \pi]$. In altre parole, θ è la determinazione continua dell'angolo fra l'asse x e $\dot{\sigma}$ che inizia in $(-\pi, \pi]$. Poniamo poi

$$\theta(t_1) = \lim_{t \rightarrow t_1^-} \theta(t) + \varepsilon_1,$$

dove ε_1 è l'angolo esterno in t_1 . Definiamo analogamente θ su $[t_1, t_2]$, cioè $\theta: [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}$ è il sollevamento di $\dot{\sigma}: [t_1, t_2] \rightarrow S^1$ che parte da $\theta(t_1)$, e poniamo nuovamente

$$\theta(t_2) = \lim_{t \rightarrow t_2^-} \theta(t) + \varepsilon_2,$$

dove ε_2 è l'angolo esterno in t_2 . Continuando in questo modo definiamo θ su tutto l'intervallo $[a, b]$; poniamo infine

$$\theta(b) = \lim_{t \rightarrow b^-} \theta(t) + \varepsilon_k,$$

dove ε_k è l'angolo esterno in $b = t_k$. Allora diremo *indice di rotazione* della curva σ il numero

$$\rho(\sigma) = \frac{1}{2\pi}(\theta(b) - \theta(a)).$$

Siccome $\dot{\sigma}(t_k^+) = \dot{\sigma}(t_0^+)$, l'indice di rotazione dev'essere un numero intero.

Il risultato principale di questo paragrafo è il seguente teorema di Hopf:

Teorema 1.4.1: (delle tangenti, o *Umlaufsatz*) *L'indice di rotazione di un poligono curvilineo orientato positivamente è esattamente +1.*

Dimostrazione: Cominciamo supponendo che il poligono curvilineo $\sigma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, parametrizzato rispetto alla lunghezza d'arco, non abbia vertici; in particolare, $\dot{\sigma}$ è continua e $\dot{\sigma}(a) = \dot{\sigma}(b)$. Siccome σ è chiusa, possiamo estenderla per periodicità a una curva, che continueremo a denotare con $\sigma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, periodica di periodo $b - a$, con derivata continua. Inoltre indichiamo con (σ^1, σ^2) le due coordinate di σ .

Se $[\tilde{a}, \tilde{b}]$ è un qualunque intervallo di lunghezza $b - a$, chiaramente $\rho(\sigma|_{[\tilde{a}, \tilde{b}]}) = \rho(\sigma|_{[a, b]})$; quindi possiamo scegliere il nostro intervallo $[a, b]$ in modo che $\sigma^2(t)$ abbia minimo per $t = a$; inoltre, a meno di traslazioni possiamo anche supporre che $\sigma(a) = O$. Dunque il sostegno di σ è contenuto nel semipiano superiore, e $\dot{\sigma}^2(a) = 0$, per cui $\dot{\sigma}(a) = \dot{\sigma}(b) = e_1$, il primo vettore della base canonica di $\mathbb{R}^2$.

Indichiamo con $\theta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ l'angolo di rotazione, cioè il sollevamento di $\dot{\sigma}$ che parte da $\theta(a) = 0$. Vogliamo definire un *angolo secante* $\eta: T \rightarrow \mathbb{R}$ (dove T è il triangolo $T = \{(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq t_1 \leq t_2 \leq b\}$), che rappresenti l'angolo fra l'asse x e il vettore da $\sigma(t_1)$ a $\sigma(t_2)$. Per far ciò, definiamo $H: T \rightarrow S^1$ ponendo

$$H(t_1, t_2) = \begin{cases} \frac{\sigma(t_2) - \sigma(t_1)}{\|\sigma(t_2) - \sigma(t_1)\|} & \text{se } t_1 < t_2 \text{ e } (t_1, t_2) \neq (a, b); \\ \dot{\sigma}(t_1) & \text{se } t_1 = t_2; \\ -\dot{\sigma}(a) & \text{se } (t_1, t_2) = (a, b). \end{cases}$$

L'applicazione H è continua lungo il segmento $t_1 = t_2$ in quanto

$$\lim_{(t_1, t_2) \rightarrow (t, t)} H(t_1, t_2) = \lim_{(t_1, t_2) \rightarrow (t, t)} \frac{\sigma(t_2) - \sigma(t_1)}{t_2 - t_1} \bigg/ \left\| \frac{\sigma(t_2) - \sigma(t_1)}{t_2 - t_1} \right\| = \frac{\dot{\sigma}(t)}{\|\dot{\sigma}(t)\|} = H(t, t).$$

Analogamente, H è continua in (a, b) : infatti

$$\begin{aligned} \lim_{(t_1, t_2) \rightarrow (a, b)} H(t_1, t_2) &= \lim_{(t_1, t_2) \rightarrow (a, b)} \frac{\sigma(t_2) - \sigma(t_1 + b - a)}{\|\sigma(t_2) - \sigma(t_1 + b - a)\|} = \lim_{(s, t_2) \rightarrow (b, b)} - \frac{\sigma(s) - \sigma(t_2)}{\|\sigma(s) - \sigma(t_2)\|} \\ &= - \frac{\dot{\sigma}(b)}{\|\dot{\sigma}(b)\|} = H(a, b). \end{aligned}$$

Essendo T semplicemente connesso, possiamo sollevare H a un'unica $\eta: T \rightarrow \mathbb{R}$ continua tale che $\eta(a, a) = 0$; la funzione η è il nostro angolo secante. In particolare, anche $t \mapsto \eta(t, t)$ è un sollevamento di $\dot{\sigma}$; siccome $\theta(a) = 0 = \eta(a, a)$, dobbiamo avere $\theta(t) = \eta(t, t)$ per ogni t , e quindi

$$\rho(\sigma) = \frac{1}{2\pi} (\theta(b) - \theta(a)) = \frac{1}{2\pi} \eta(b, b).$$

Vogliamo trovare il valore di $\eta(b, b)$ percorrendo gli altri due lati del triangolo T . Per costruzione il vettore $\sigma(t) - \sigma(a)$ è sempre puntato verso il semipiano superiore; quindi $\eta(a, t) \in [0, \pi]$ per ogni $t \in [a, b]$. In particolare, essendo $H(a, b) = -\dot{\sigma}(a) = -e_1$, dobbiamo avere $\eta(a, b) = \pi$. Analogamente, il vettore $\sigma(b) - \sigma(t)$ è sempre puntato verso il semipiano inferiore; essendo $\eta(a, b) = \pi$, dobbiamo avere $\eta(t, b) \in [\pi, 2\pi]$ per ogni $t \in [a, b]$. In particolare, essendo $H(b, b) = \dot{\sigma}(b) = e_1$, troviamo $\eta(b, b) = 2\pi$, e la tesi è dimostrata nel caso di poligono curvilineo liscio.

Ora supponiamo che σ abbia dei vertici; per dimostrare il teorema ci basta trovare un poligono curvilineo liscio che abbia lo stesso indice di rotazione di σ . Per far ciò, cambieremo σ vicino a ciascun vertice in modo da renderla regolare ovunque.

Sia allora $\sigma(t_i)$ un vertice di angolo esterno ε_i , e scegliamo un numero positivo $0 < \alpha < \frac{1}{2}(\pi - |\varepsilon_i|)$; usando la periodicità di σ , a meno di cambiare l'intervallo di definizione possiamo anche supporre che $t_i \neq a, b$. Per come abbiamo definito l'angolo di rotazione, si ha

$$\lim_{t \rightarrow t_i^+} \theta(t) = \theta(t_i) \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow t_i^-} \theta(t) = \theta(t_i) - \varepsilon_i.$$

Quindi possiamo trovare un $\delta > 0$ tale che $|\theta(t) - (\theta(t_i) - \varepsilon_i)| < \alpha$ quando $t_{i-1} < t_i - \delta < t < t_i$ e $|\theta(t) - \theta(t_i)| < \alpha$ quando $t_i < t < t_i + \delta < t_{i+1}$. In particolare,

$$|\theta(t) - \theta(s)| \leq 2\alpha + |\varepsilon_i| < \pi \quad (1.4.1)$$

per ogni $s, t \in (t_i - \delta, t_i + \delta)$. Dunque l'angolo di rotazione di σ varia meno di π in questo intervallo.

L'immagine C tramite σ di $[a, b] \setminus (t_i - \delta, t_i + \delta)$ è un compatto non contenente $\sigma(t_i)$; quindi possiamo trovare $r > 0$ tale che $C \cap \overline{B(\sigma(t_i), r)} = \emptyset$. Siano $t^*, t^{**} \in (t_i - \delta, t_i + \delta)$ rispettivamente il primo e l'ultimo valore di t per cui $\sigma(t) \in \partial B(\sigma(t_i), r)$; in particolare, $\dot{\sigma}(t^*)$ punta verso l'interno di (o è tangente a) $\partial B(\sigma(t_i), r)$, mentre $\dot{\sigma}(t^{**})$ punta verso l'esterno di (o è tangente a) $\partial B(\sigma(t_i), r)$. Rimpiazziamo il pezzo di σ da t^* a t^{**} con (vedi il prossimo esercizio) una curva regolare τ contenuta in $\overline{B(\sigma(t_i), r)}$, tangente a σ in $\sigma(t^*)$ e $\sigma(t^{**})$, e il cui versore tangente rimanga sempre in un semipiano aperto contenente $\dot{\sigma}(t^*)$ e $\dot{\sigma}(t^{**})$. In particolare, la variazione dell'angolo di rotazione di τ da t^* a t^{**} è compresa fra $-\pi$ e π , e rappresenta l'angolo fra $\dot{\sigma}(t^*)$ e $\dot{\sigma}(t^{**})$; quindi, grazie alla (1.4.1) questa variazione è esattamente uguale a $\theta(t^{**}) - \theta(t^*)$. In altre parole, il poligono curvilineo ottenuto inserendo τ al posto di $\sigma|_{[t^*, t^{**}]}$ ha esattamente lo stesso indice di rotazione di σ . Ripetendo l'operazione in tutti i vertici di σ otteniamo un poligono curvilineo liscio con lo stesso indice di rotazione di σ , e ci siamo. $\square$

Esercizio 1.4.2. Siano dati un numero $r > 0$ e due punti distinti $p_1, p_2 \in \partial B(O, r) \subset \mathbb{R}^2$. Scegliamo poi due vettori $v_1, v_2 \in S^1$ tali che $v_1 \neq -v_2$, $(v_1, p_1) \leq 0$ e $(v_2, p_2) \geq 0$. Dimostra che esiste una curva regolare $\tau: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco il cui sostegno sia tutto contenuto in $\overline{B(O, r)}$, tale che $\sigma(a) = p_1$, $\dot{\sigma}(a) = v_1$, $\sigma(b) = p_2$ e $\dot{\sigma}(b) = v_2$, e tale che esista un semipiano aperto contenente $\dot{\sigma}(s)$ per ogni $s \in [a, b]$. (*Suggerimento:* nella maggior parte dei casi un'iperbole funziona.)

Capitolo 2

Teoria locale delle superfici

2.1 Definizione di superficie

Vogliamo ora studiare le superfici nello spazio. Di nuovo, si pone il problema della definizione. Per le proprietà locali possiamo usare un approccio simile a quello delle curve e limitarci a considerare delle applicazioni C^∞ da aperti nel piano a valori nello spazio; per le proprietà globali invece conviene procedere come per le linee.

L'ovvia generalizzazione del concetto di curva è quello di superficie immersa:

Definizione 2.1.1: Una *superficie immersa* (o *parametrizzata*) nello spazio è un'applicazione $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ di classe C^∞ , dove $U \subseteq \mathbb{R}^2$ è un aperto, tale che il differenziale $d\varphi_x: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ abbia rango massimo (cioè 2) in ogni punto $x \in U$.

Osservazione 2.1.1. Il differenziale $d\varphi_x$ è rappresentato dalla matrice jacobiana

$$\text{Jac}(\varphi)(x) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi^1}{\partial x^1}(x) & \frac{\partial \varphi^1}{\partial x^2}(x) \\ \frac{\partial \varphi^2}{\partial x^1}(x) & \frac{\partial \varphi^2}{\partial x^2}(x) \\ \frac{\partial \varphi^3}{\partial x^1}(x) & \frac{\partial \varphi^3}{\partial x^2}(x) \end{vmatrix},$$

dove $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3)$.

In questa definizione l'enfasi è sulla mappa. Non stiamo richiedendo né che sia un omomorfismo con l'immagine né che sia globalmente iniettiva; entrambe queste proprietà sono vere localmente, però. Per dimostrarlo, ci serve una notazione e un lemma.

Definizione 2.1.2: Sia $F = (F^1, \dots, F^m): U \rightarrow \mathbb{R}^m$ un'applicazione di classe C^∞ definita su un aperto U di $\mathbb{R}^n$. Presi $1 \leq r \leq \min\{m, n\}$, $1 \leq h_1 \leq \dots \leq h_r \leq m$ e $1 \leq k_1 \leq \dots \leq k_r \leq n$, poniamo

$$\frac{\partial(F^{h_1}, \dots, F^{h_r})}{\partial(x^{j_1}, \dots, x^{j_r})}(x_0) = \det \left(\frac{\partial F^{h_i}}{\partial x^{k_j}}(x_0) \right)_{i,j=1, \dots, r}$$

per ogni $x_0 \in U$.

Lemma 2.1.1: Sia $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie immersa, dove $U \subseteq \mathbb{R}^2$ è aperto. Allora per ogni $x_0 \in U$ esistono un intorno aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ di $(x_0, 0) \in U \times \mathbb{R}$, un intorno aperto $W \subseteq \mathbb{R}^3$ di $\varphi(x_0)$, e un diffeomorfismo $G: \Omega \rightarrow W$ tale che $G(x, 0) = \varphi(x)$ per ogni $(x, 0) \in \Omega \cap (U \times \{0\})$.

Dimostrazione: Per definizione di superficie immersa, il differenziale di $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3)$ in x_0 ha rango 2; quindi la matrice Jacobiana di φ calcolata in x_0 ha un minore 2×2 con determinante non nullo. A meno di riordinare le coordinate possiamo supporre che il minore sia quello ottenuto scartando la terza riga, cioè

$$\frac{\partial(\varphi^1, \varphi^2)}{\partial(x^1, x^2)}(x_0) \neq 0.$$

Sia $G: U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ data da

$$G(x^1, x^2, t) = \varphi(x^1, x^2) + (0, 0, t)$$

(se per trovare il minore con determinante non nullo avessimo scartato la prima o la seconda riga allora G sarebbe stata definita sommando a φ nel primo caso $(t, 0, 0)$, e $(0, t, 0)$ nel secondo caso). Chiaramente, $G(x, 0) = \varphi(x)$ per ogni $x \in U$, e

$$\det(dG_{(x_0, O)}) = \frac{\partial(\varphi^1, \varphi^2)}{\partial(x^1, x^2)}(x_0) \neq 0;$$

il teorema della funzione inversa ci fornisce quindi un intorno $\Omega \subseteq U \times \mathbb{R}$ di (x_0, O) e un intorno $W \subseteq \mathbb{R}^3$ di $\varphi(x_0)$ con $W \cap S \subseteq \varphi(U)$ tale che $G|_\Omega$ sia un diffeomorfismo fra Ω e W , come voluto. $\square$

In particolare abbiamo

Corollario 2.1.2: Sia $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie immersa. Allora ogni $x_0 \in U$ ha un intorno $U_1 \subseteq U$ tale che $\varphi|_{U_1}: U_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sia un omeomorfismo con l'immagine.

Dimostrazione: Sia $G: \Omega \rightarrow W$ il diffeomorfismo fornito dal lemma precedente, $\pi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la proiezione sulle prime due coordinate, e $U_1 = \pi(\Omega \cap (U \times \{0\}))$. Allora $\varphi|_{U_1} = G|_{U_1 \times \{O\}}$ è un omeomorfismo con l'immagine, come richiesto. $\square$

Osservazione 2.1.2. Potremmo definire il concetto di superfici immerse equivalenti come fatto per le curve, tramite un cambiamento di parametro. Sfortunatamente, però, non esiste una parametrizzazione canonica analoga alla parametrizzazione rispetto alla lunghezza d'arco. Il motivo, in parole povere, è il seguente: un diffeomorfismo fra due intervalli di $\mathbb{R}$ che conserva le lunghezze (e l'orientazione) è necessariamente una traslazione, mentre esistono infiniti diffeomorfismi non lineari fra aperti di $\mathbb{R}^2$ che conservano le aree (e l'orientazione). Infatti, per conservare le lunghezze e l'orientazione un diffeomorfismo h fra intervalli deve soddisfare (perché?) $h' \equiv 1$, mentre per conservare le aree e l'orientazione un diffeomorfismo H fra aperti del piano deve soddisfare (perché?) $\det \text{Jac}(H) \equiv 1$, che è una condizione molto meno stringente. Per esempio, tutti i diffeomorfismi della forma $H(x, y) = (x + f(y), y)$, dove f è una qualsiasi funzione differenziabile di una variabile, conservano aree e orientazione.

Più interessante, e importante anche per l'estensione a dimensione più alta, è la generalizzazione del concetto di linea.

Definizione 2.1.3: Un sottoinsieme $S \subset \mathbb{R}^3$ è una *superficie (regolare)* nello spazio se per ogni $p \in S$ esistono un aperto $U \subseteq \mathbb{R}^2$ e un'applicazione $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ di classe C^∞ tale che:

- (a) $\varphi(U) \subseteq S$ è un intorno aperto di p in S (che è equivalente a richiedere che esista un intorno aperto $V \subseteq \mathbb{R}^3$ di p in $\mathbb{R}^3$ tale che $\varphi(U) = V \cap S$);
- (b) φ è un omeomorfismo con l'immagine;
- (c) il differenziale $d\varphi_x$ ha rango massimo per ogni $x \in U$.

L'applicazione φ è detta *parametrizzazione locale* in p ; se $O \in U$ e $\varphi(O) = p$ diremo che la parametrizzazione locale è *centrata* in p . L'inversa $\varphi^{-1}: \varphi(U) \rightarrow U$ è detta *carta locale* in p ; l'intorno $\varphi(U)$ di p in S è detto *intorno coordinato*, e le coordinate $(x^1(p), x^2(p)) = \varphi^{-1}(p)$ sono dette *coordinate locali* di p .

Osservazione 2.1.3. Se $\varphi: U \rightarrow S$ è una parametrizzazione locale di una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$, e $\chi: U_1 \rightarrow U$ è un diffeomorfismo con l'immagine, dove U_1 è un altro aperto di $\mathbb{R}^2$, allora $\tilde{\varphi} = \varphi \circ \chi$ è ancora una parametrizzazione locale di S (perché?). In particolare, se $p = \varphi(x_0) \in S$ e χ è la traslazione $\chi(x) = x + x_0$, allora $\tilde{\varphi} = \varphi \circ \chi$ è una parametrizzazione locale di S centrata in p .

Osservazione 2.1.4. Se $\varphi: U \rightarrow S$ è una parametrizzazione locale di una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$, e $W \subset U$ è un aperto di $\mathbb{R}^2$, allora anche $\varphi|_W$ è una parametrizzazione locale di S (perché?). In particolare, possiamo trovare parametrizzazioni locali con dominio piccolo quanto ci pare.

Esercizio 2.1.1. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie, e $S_1 \subseteq S$ un aperto di S . Dimostra che anche S_1 è una superficie.

Definizione 2.1.4: Un *atlante* di un insieme $S \subset \mathbb{R}^3$ è una famiglia $\mathcal{A} = \{\varphi_\alpha\}$ di parametrizzazioni locali $\varphi_\alpha: U_\alpha \rightarrow S$ tali che $S = \bigcup_\alpha \varphi_\alpha(U_\alpha)$.

Dunque una superficie (regolare) è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ fatto localmente come un aperto del piano. Come vedremo, la filosofia che regola lo studio delle superfici è usare le parametrizzazioni locali per trasferire concetti, proprietà e dimostrazioni dagli aperti del piano ad aperti sulle superfici, e viceversa.

Osservazione 2.1.5. Non esiste nulla di analogo al Teorema 1.1.9; le superfici regolari in generale non ammettono una parametrizzazione globale, anche quando non sono compatte.

Vediamo alcuni esempi.

ESEMPIO 2.1.1. Sia $U \subseteq \mathbb{R}^2$ un aperto, e $f \in C^\infty(U)$. Allora il grafico $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in U\}$ di f è una superficie regolare, e possiamo prendere come parametrizzazione locale la $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ data da $\varphi(x) = (x, f(x))$. Infatti, chiaramente la condizione (a) della definizione di superficie è soddisfatta. La $\pi: \Gamma_f \rightarrow U$ data dalla proiezione sulle prime due coordinate $\pi(x^1, x^2, f(x)) = (x^1, x^2)$ è l'inversa (continua) di φ , per cui anche la condizione (b) è soddisfatta. Infine,

$$\text{Jac}(\varphi)(x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial x^1}(x) & \frac{\partial f}{\partial x^2}(x) \end{vmatrix}$$

ha rango massimo in ogni punto, e ci siamo.

Osservazione 2.1.6. Un grafico ha quindi un atlante costituito da un solo elemento. Più in generale, una superficie immersa che sia un omeomorfismo con l'immagine è una superficie regolare coperta da un solo intorno coordinato.

ESEMPIO 2.1.2. Vogliamo far vedere che la sfera

$$S^2 = \{p \in \mathbb{R}^3 \mid \|p\| = 1\}$$

è una superficie regolare trovando un'atlante. Sia $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ il disco unitario aperto nel piano, e definiamo $\varphi_1, \dots, \varphi_6: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ponendo

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, y) &= (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}), \\ \varphi_2(x, y) &= (x, y, -\sqrt{1 - x^2 - y^2}), \\ \varphi_3(x, y) &= (x, \sqrt{1 - x^2 - y^2}, y), \\ \varphi_4(x, y) &= (x, -\sqrt{1 - x^2 - y^2}, y), \\ \varphi_5(x, y) &= (\sqrt{1 - x^2 - y^2}, x, y), \\ \varphi_6(x, y) &= (-\sqrt{1 - x^2 - y^2}, x, y). \end{aligned}$$

Ragionando come nell'esempio precedente è facile vedere che queste sono tutte parametrizzazioni locali di S^2 , e che $S^2 = \varphi_1(U) \cup \dots \cup \varphi_6(U)$. Nota che omettendone anche una sola non si copre tutta la sfera.

ESEMPIO 2.1.3. Descriviamo un altro atlante sulla sfera. Posto $U = \{(\theta, \phi) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < \theta < \pi, 0 < \phi < 2\pi\}$, sia $\varphi_1: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ data da

$$\varphi_1(\theta, \phi) = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta);$$

vogliamo dimostrare che φ_1 è una parametrizzazione locale della sfera. Il parametro θ è usualmente chiamato *colatitudine* (la *latitudine* è $\pi/2 - \theta$), mentre ϕ è la *longitudine*. Prima di tutto,

$$\varphi_1(U) = S^2 \setminus \{(x, y, z) \mid y = 0, x \geq 0\}$$

è un aperto di S^2 , per cui la condizione (a) è soddisfatta. Poi,

$$\text{Jac}(\varphi_1)(\theta, \phi) = \begin{vmatrix} \cos \theta \cos \phi & -\sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \sin \phi & \sin \theta \cos \phi \\ -\sin \theta & 0 \end{vmatrix},$$

e si verifica subito che questa matrice non ha rango 2 solo se $\sin \theta = 0$, che non può accadere per $(\theta, \phi) \in U$, per cui la condizione (c) è soddisfatta. Inoltre, se $(x, y, z) \in \varphi_1(U)$, ricaviamo subito $\theta = \arccos(z)$; essendo $\sin \theta \neq 0$ troviamo pure $(\cos \phi, \sin \phi)$ in termini di x, y e z , e quindi anche ϕ è univocamente determinato, cioè la φ_1 è globalmente iniettiva. Per concludere dovremmo far vedere che è un omeomorfismo con l'immagine (cioè che φ_1^{-1} è continua); ma vedremo fra poco (Proposizione 2.1.6) che questo è una conseguenza delle altre condizioni, per cui lasciamo la verifica per esercizio (ma vedi anche il prossimo esempio). Infine, sia $\varphi_2: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ data da

$$\varphi_2(\theta, \phi) = (-\sin \theta \cos \phi, \cos \theta, -\sin \theta \sin \phi).$$

Ragionando come prima si vede che anche φ_2 è una parametrizzazione locale, con

$$\varphi_2(U) = S^2 \setminus \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0, x \leq 0\},$$

per cui $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ è un'atlante di S^2 .

ESEMPIO 2.1.4. (*Superfici di rotazione*) Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo aperto, $\sigma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva piana regolare semplice non chiusa di sostegno C , e supponiamo anche che σ sia un omeomorfismo con l'immagine. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ l'insieme ottenuto ruotando C attorno a un asse ℓ contenuto nel piano di C ma che non interseca C ; vogliamo far vedere che S è una superficie regolare, detta *superficie di rotazione* (o di *rivoluzione*), di *generatrice* C e *asse di rotazione* ℓ . Possiamo supporre che la curva C sia contenuta nel piano xz e che l'asse sia l'asse z ; quindi possiamo scrivere $\sigma(t) = (f(t), 0, g(t))$ con $f(t) \neq 0$ per ogni $t \in I$. Definiamo allora $\varphi_1: I \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$ ponendo

$$\varphi_1(t, \theta) = (f(t) \cos \theta, f(t) \sin \theta, g(t)),$$

e $\varphi_2: I \times (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$ con la stessa formula. Fissato $t_0 \in I$, le curve $\theta \mapsto \varphi_1(t_0, \theta)$ sono dette *paralleli* di S ; fissato $\theta_0 \in \mathbb{R}$, le curve $t \mapsto \varphi_1(t, \theta_0)$ sono dette *meridiani* di S . È chiaro che S è l'unione delle immagini di φ_1 e φ_2 ; ci basta allora dimostrare che φ_1 e φ_2 sono parametrizzazioni locali per ottenere che S è una superficie. Dimostriamolo per φ_1 ; il caso di φ_2 è assolutamente analogo. Che l'immagine di φ_1 sia un aperto di S è ovvio. Essendo $f(t) \neq 0$ per ogni $t \in I$, si verifica subito che il differenziale di φ_1 ha sempre rango massimo (esercizio). Rimane da verificare che φ_1 è un omeomorfismo con l'immagine. Cominciamo con far vedere che è invertibile. Da $\varphi_1(t, \theta) = (x, y, z)$ ricaviamo $g(t) = z$ e $f(t)^2 = x^2 + y^2$; essendo σ iniettiva, da questo ricaviamo un unico $t \in I$, e quindi un unico $\theta \in (0, 2\pi)$ tale che $x = f(t) \cos \theta$ e $y = f(t) \sin \theta$; quindi φ_1 è invertibile. Inoltre, essendo σ un omeomorfismo con l'immagine, t dipende in modo continuo da z e $\sqrt{x^2 + y^2}$; se dimostriamo che anche θ dipende in modo continuo da (x, y, z) abbiamo che φ_1^{-1} è continua. Ora, se $\theta \neq \pi$ abbiamo

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{\sin(\theta/2)}{\cos(\theta/2)} = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} = \frac{y/f(t)}{1 + x/f(t)} = \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}},$$

per cui

$$\theta = 2 \arctan \left(\frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$

dipende in modo continuo da (x, y, z) . Se invece θ appartiene a un piccolo intervallo centrato in π , in modo analogo si trova che

$$\theta = 2 \operatorname{arccot} \left(\frac{y}{-x + \sqrt{x^2 + y^2}} \right),$$

e anche in questo caso ci siamo.

Esercizio 2.1.2. Dimostra che l'insieme ottenuto ruotando il sostegno C di una curva piana regolare semplice chiusa attorno a un asse ℓ contenuto nel piano di C ma che non interseca C è ancora una superficie regolare.

Esercizio 2.1.3. Sia $\sigma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regolare semplice il cui sostegno sia contenuto nel piano xz e tale che $\sigma(t) \notin \ell$ per $t \in (a, b)$ mentre $\sigma(a), \sigma(b) \in \ell$, dove ℓ è l'asse z . Supponiamo inoltre che $\sigma'(a)$ e $\sigma'(b)$ siano ortogonali a ℓ . Dimostra che l'insieme ottenuto ruotando il sostegno di σ attorno a ℓ è ancora una superficie regolare. In particolare, questo dimostra di nuovo che la sfera è una superficie regolare.

Vediamo ora un modo generale per ottenere superfici regolari. Cominciamo con una definizione:

Definizione 2.1.5: Sia $V \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto, e $F: V \rightarrow \mathbb{R}^m$ di classe C^∞ . Diremo che $p \in V$ è un *punto critico* di F se $dF_p: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ non è surgettivo. Indicheremo con $\text{Crit}(F)$ l'insieme dei punti critici di F . Se $p \in V$ è un punto critico, $F(p) \in \mathbb{R}^m$ sarà detto *valore critico*. Un $y \in F(V) \subseteq \mathbb{R}^m$ che non è un valore critico è detto *valore regolare*.

Esercizio 2.1.4. Dimostra che l'insieme dei punti critici di un'applicazione F di classe C^∞ è un chiuso del dominio di F .

Osservazione 2.1.7. Se $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione C^∞ definita su un aperto $V \subset \mathbb{R}^n$, e $p \in V$, allora $df_p: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ non è surgettivo se e solo se è l'applicazione nulla. In altri termini, $p \in V$ è un punto critico di f se e solo se il gradiente di f si annulla in p .

Un risultato che non possiamo dimostrare in questo corso, e che non utilizzeremo, ma che vale la pena di citare esplicitamente è il famoso

Teorema 2.1.3: (Sard) Sia $F: V \rightarrow \mathbb{R}^m$ un'applicazione di classe C^∞ . Allora l'insieme dei valori critici ha misura nulla in $\mathbb{R}^m$.

In altri termini, quasi ogni punto del codominio è un valore regolare, fatto che spiega l'ampia applicabilità del seguente risultato:

Proposizione 2.1.4: Sia $V \subseteq \mathbb{R}^3$ aperto, e $f \in C^\infty(V)$. Se $a \in \mathbb{R}$ è un valore regolare di f , allora l'insieme di livello $f^{-1}(a) = \{p \in V \mid f(p) = a\}$ è una superficie regolare.

Dimostrazione: Sia $p_0 = (x_0, y_0, z_0) \in f^{-1}(a)$. Essendo a un valore regolare di f , il gradiente di f non si annulla in p_0 per cui, a meno di permutare le coordinate, possiamo supporre che $\partial f / \partial z(p_0) \neq 0$. Sia allora $F: V \rightarrow \mathbb{R}^3$ data da $F(x, y, z) = (x, y, f(x, y, z))$; chiaramente,

$$\det \text{Jac}(F)(p_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(p_0) \neq 0.$$

Possiamo quindi applicare il teorema della funzione inversa e trovare intorno $\tilde{V} \subseteq V$ di p_0 e $W \subseteq \mathbb{R}^3$ di $F(p_0)$ tali che $F|_{\tilde{V}}: \tilde{V} \rightarrow W$ sia un diffeomorfismo. Posto $G = (g^1, g^2, g^3) = F^{-1}$ abbiamo

$$(u, v, w) = F \circ G(u, v, w) = (g^1(u, v, w), g^2(u, v, w), f(G(u, v, w)))$$

per cui $g_1(u, v, w) = u$, $g_2(u, v, w) = v$, e

$$\forall (u, v, w) \in W \quad f(u, v, g^3(u, v, w)) = w; \quad (2.1.1)$$

in particolare $(u, v, g^3(u, v, w)) \in \tilde{V}$ per ogni $(u, v, w) \in W$. Poniamo $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid (u, v, a) \in W\}$; è chiaramente un aperto di $\mathbb{R}^2$ e possiamo definire $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ con $\varphi(u, v) = (u, v, g^3(u, v, a))$. La (2.1.1) ci dice che $\varphi(U) = f^{-1}(a) \cap \tilde{V}$, e quindi φ è una parametrizzazione locale di $f^{-1}(a)$ in p_0 . $\square$

Esercizio 2.1.5. Sia $V \subseteq \mathbb{R}^3$ un aperto e $f \in C^\infty(V)$. Dimostra che per ogni $a \in \mathbb{R}$ l'insieme $f^{-1}(a) \setminus \text{Crit}(f)$, se non è vuoto, è una superficie regolare.

Definizione 2.1.6: Una superficie della forma $f^{-1}(a)$, dove $f \in C^\infty(V)$ per qualche aperto V di $\mathbb{R}^3$, e $a \in \mathbb{R}$ è un valore regolare, è detta *superficie di livello* per f a un valore regolare.

ESEMPIO 2.1.5. L'ellissoide di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

è una superficie. Infatti è l'insieme $f^{-1}(1)$ dove $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ è data da

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}.$$

Siccome $\text{grad}(f) = (2x/a^2, 2y/b^2, 2z/c^2)$, l'unico punto critico di f è l'origine e l'unico valore critico di f è 0.

Esercizio 2.1.6. Dimostra usando la proposizione precedente che il toro di equazione

$$z^2 = r^2 - (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2$$

ottenuto ruotando attorno all'asse z la circonferenza di raggio $r < a$ e centro $(0, a, 0)$ contenuta nel piano yz , è una superficie regolare.

Concludiamo questo paragrafo con due risultati generali.

Proposizione 2.1.5: Ogni superficie regolare è localmente un grafico. In altre parole, se $S \subset \mathbb{R}^3$ è una superficie regolare e $p \in S$, allora esiste una parametrizzazione locale $\varphi: U \rightarrow S$ in p che ha una delle seguenti tre forme:

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} (x, y, f(x, y)), & \text{oppure} \\ (x, f(x, y), y), & \text{oppure} \\ (f(x, y), x, y), \end{cases}$$

per un'opportuna $f \in C^\infty(U)$. In particolare, esiste sempre un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ tale che $S \subset \Omega$ sia chiusa in Ω

Dimostrazione: Sia $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3): U_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrizzazione locale centrata in p . A meno di permutare le coordinate possiamo supporre che

$$\frac{\partial(\varphi^1, \varphi^2)}{\partial(x^1, x^2)}(O) \neq 0;$$

quindi posto $F = (\varphi^1, \varphi^2)$ possiamo trovare un intorno $V \subseteq U_1$ di O e un intorno $U \subseteq \mathbb{R}^2$ di $F(O)$ tali che $F|_V: V \rightarrow U$ sia un diffeomorfismo. Sia $F^{-1}: U \rightarrow V$ l'inversa, e poniamo $f = \varphi^3 \circ F^{-1}: U \rightarrow \mathbb{R}$. Notiamo che $F \circ F^{-1} = \text{id}_U$; quindi

$$\varphi \circ F^{-1}(u, v) = (u, v, f(u, v)),$$

cioè $\varphi \circ F^{-1}$ è una parametrizzazione locale in p della forma voluta.

Infine, per ogni $p \in S$ sia $V_p \subset \mathbb{R}^3$ aperto tale che $p \in V_p \cap S$ sia localmente un grafico. Allora $V_p \cap S$ è chiuso in V_p , e S è chiusa (perché?) in $\Omega = \bigcup_{p \in S} V_p$. $\square$

ESEMPIO 2.1.6. Il cono a una falda $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \sqrt{x^2 + y^2}\}$ non è una superficie regolare. Se lo fosse, dovrebbe essere il grafico di una funzione C^∞ nell'intorno di $(0, 0, 0)$. Siccome le proiezioni sui piani xz e yz non sono iniettive, dovrebbe essere un grafico sul piano xy ; ma allora dovrebbe essere il grafico della funzione $\sqrt{x^2 + y^2}$, che non è di classe C^∞ .

Esercizio 2.1.7. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ un sottoinsieme tale che per ogni $p \in S$ esista un intorno aperto W di p in $\mathbb{R}^3$ tale che $W \cap S$ sia un grafico su uno dei tre piani coordinati. Dimostra che allora S è una superficie regolare.

E infine ecco il risultato promesso nell'Esempio 2.1.3:

Proposizione 2.1.6: Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie, $U \subseteq \mathbb{R}^2$ un aperto, e $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie immersa tale che $\varphi(U) \subseteq S$. Allora:

- (i) $\varphi(U)$ è aperto in S ;
- (ii) se φ è globalmente iniettiva, allora per ogni $p \in \varphi(U)$ esistono un intorno $W \subset \mathbb{R}^3$ di p in $\mathbb{R}^3$ con $W \cap S \subseteq \varphi(U)$ e una $\Phi: W \rightarrow \mathbb{R}^2$ di classe C^∞ tali che $\Phi(W) \subseteq U$ e $\Phi|_{W \cap S} \equiv \varphi^{-1}|_{W \cap S}$. In particolare, $\varphi^{-1}: \varphi(U) \rightarrow U$ è continua, per cui φ è una parametrizzazione locale di S .

Dimostrazione: Sia $p = \varphi(x_0, y_0) \in \varphi(U)$. Essendo S una superficie, possiamo trovare un intorno W_0 di p in $\mathbb{R}^3$ tale che $W_0 \cap S \subseteq \varphi(U)$ sia un grafico; per fissare le idee diciamo che $W_0 \cap S$ è il grafico sul piano xy di una funzione f . Sia $\pi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la proiezione sul piano xy , $U_0 = \varphi^{-1}(W_0) \subseteq U$ e $h = \pi \circ \varphi: U_0 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Se $(x, y) \in U_0$ abbiamo $\varphi^3(x, y) = f(\varphi^1(x, y), \varphi^2(x, y))$, per cui la terza riga della matrice jacobiana di φ in (x, y) è combinazione lineare delle prime due. Siccome abbiamo supposto che il differenziale di φ abbia sempre rango 2, ne segue che le prime due righe della matrice jacobiana di φ devono essere linearmente indipendenti, e quindi $dh_{(x, y)}$ è invertibile. Il teorema della funzione inversa ci fornisce allora un intorno $U_1 \subseteq U_0$

di (x_0, y_0) e un intorno $V_1 \subseteq \mathbb{R}^2$ di $h(x_0, y_0) = \pi(p)$ tale che $h|_{U_1}: U_1 \rightarrow V_1$ sia un diffeomorfismo. In particolare, $\varphi(U_1) = (\pi|_S)^{-1}(V_1)$ è aperto in S , per cui $\varphi(U)$ è un intorno di p in S . Essendo p generico, $\varphi(U)$ è aperto in S , e (i) è dimostrata.

Supponiamo ora che φ sia globalmente iniettiva, per cui $\varphi^{-1}: \varphi(U) \rightarrow U$ è definita. Essendo $\varphi(U)$ aperto in S , a meno di restringere W_0 possiamo supporre che $W_0 \cap S \subseteq \varphi(U)$. Poniamo $W = W_0 \cap \pi^{-1}(V_1)$ e $\Phi = h^{-1} \circ \pi$; per dimostrare (ii) ci rimane solo da far vedere che $\Phi|_{W \cap S} \equiv \varphi^{-1}|_{W \cap S}$.

Sia $q \in W \cap S$. Essendo $q \in W_1 \cap \pi^{-1}(V_1)$, si deve poter scrivere $q = (u, v, f(u, v))$ con $(u, v) \in V_1$; d'altra parte, essendo $q \in \varphi(U)$, deve esistere un unico $(x, y) \in U$ tale che $q = \varphi(x, y)$. Ma allora $(u, v) = h(x, y)$, per cui $(x, y) = h^{-1}(u, v) \in U_1$ e $\varphi^{-1}(q) = (x, y) = h^{-1} \circ \pi(q) = \Phi(q)$, come richiesto. $\square$

In altre parole, se sappiamo già che S è una superficie, per verificare se un'applicazione $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ da un aperto U di $\mathbb{R}^2$ a valori in S è una parametrizzazione locale basta controllare che φ sia globalmente iniettiva e che $d\varphi_x$ abbia rango 2 per ogni $x \in U$.

Osservazione 2.1.8. La proposizione precedente potrebbe far sospettare che possa essere vero un enunciato del tipo “Sia $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie immersa globalmente iniettiva, e poniamo $S = \varphi(U)$. Allora per ogni $p \in \varphi(U)$ esiste un intorno $W \subset \mathbb{R}^3$ di p in $\mathbb{R}^3$ e una $\Phi: W \rightarrow \mathbb{R}^2$ di classe C^∞ tali che $\Phi(W) \subseteq U$ e $\Phi|_{W \cap S} \equiv \varphi^{-1}|_{W \cap S}$. In particolare, $\varphi^{-1}: \varphi(U) \rightarrow U$ è continua, e S è una superficie regolare.” Abbiamo anche una “dimostrazione” di questo enunciato: “Siccome, per ipotesi, φ è una superficie immersa, possiamo applicare il Lemma 2.1.1. Sia $p = \varphi(x_0) \in \varphi(U)$, e $G: \Omega \rightarrow W$ il diffeomorfismo fornito dal Lemma 2.1.1; a meno di restringere Ω , possiamo anche supporre che $\Omega = U_1 \times (-\delta, \delta)$, dove $\delta > 0$ e $U_1 \subseteq U$ è un opportuno intorno di x_0 . Allora $\Phi = \pi \circ G^{-1}$, dove $\pi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ è la proiezione sulle prime due coordinate, è come desiderato. Infatti, per ogni $q \in W \cap \varphi(U)$ il punto $G^{-1}(q) = (y, t) \in \Omega$ è l'unico che soddisfa $G(y, t) = q$. Ma $G(\varphi^{-1}(q), 0) = \varphi(\varphi^{-1}(q)) = q$, per cui $G^{-1}(q) = (\varphi^{-1}(q), 0)$, e ci siamo.” Invece, *questo enunciato è falso e questa dimostrazione sbagliata*. L'errore (sottile) nella dimostrazione è che (un minuto di pausa: prima di continuare a leggere cerca di trovare da solo l'errore. Ecco, continua a pensarci... ancora non ci sei? Torna indietro e leggi accuratamente, riflettendo su ogni passaggio, soprattutto verso la fine... trovato l'errore? Ottimo; adesso puoi proseguire con la lettura) se $q \in W \cap \varphi(U)$ non è detto che $\varphi^{-1}(q)$ appartenga a U_1 , per cui $(\varphi^{-1}(q), 0)$ non appartiene al dominio di G , e quindi non possiamo né dire che $G(\varphi^{-1}(q), 0) = \varphi(\varphi^{-1}(q)) = q$ né dedurre che $G^{-1}(q) = (\varphi^{-1}(q), 0)$. Ovviamente, il fatto che la dimostrazione sia sbagliata non implica necessariamente che l'enunciato sia falso. Ma l'enunciato è falso, e difatti l'Esempio 2.1.7 conterrà un controesempio. Riassumendo, si può dedurre la continuità dell'inversa di una superficie immersa φ globalmente iniettiva solo se si sa già che l'immagine di φ è contenuta in una superficie regolare; altrimenti potrebbe non essere vero.

ESEMPIO 2.1.7. Sia $\sigma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ la curva

$$\sigma(t) = \begin{cases} (t, 0) & \text{per } -\infty < t \leq 0, \\ \text{curva regolare} & \text{per } 0 \leq t \leq 1, \\ (0, e^{-t}) & \text{per } 1 \leq t < +\infty, \end{cases}$$

dove la “curva regolare” collega in modo liscio e iniettivo gli altri due pezzi, e definiamo $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ponendo

$$\varphi(t, u) = (\sigma(t), u).$$

La φ è chiaramente una superficie immersa globalmente iniettiva, ma non è un omeomorfismo con l'immagine, e $S = \varphi(U)$ non è una superficie regolare. Non è un omeomorfismo con l'immagine in quanto $\varphi([0, +\infty) \times [-1, 1])$ è compatto mentre $[0, +\infty) \times [-1, 1]$ non lo è. La φ^{-1} non è continua in quanto φ non è aperta: $\varphi((-1, 1) \times (-1, 1))$ non è aperto in S . E S non è una superficie regolare, in quanto nell'intorno del punto $(0, 0, 0) \in S$ non è un grafico su nessuno dei tre piani coordinati.

2.2 Funzioni differenziabili

Le parametrizzazioni locali sono gli strumenti che permettono di concretizzare l'idea che una superficie è localmente fatta come un aperto del piano; vediamo come usarle per dire quando una funzione definita su una superficie è differenziabile. L'idea è la seguente:

Definizione 2.2.1: Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie, e $p \in S$. Una funzione $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ è di classe C^∞ (o differenziabile) in p se esiste una parametrizzazione locale $\varphi: U \rightarrow S$ in p tale che $f \circ \varphi: U \rightarrow \mathbb{R}$ sia di classe C^∞ in un intorno di $\varphi^{-1}(p)$. Diremo che f è di classe C^∞ se lo è in ogni punto. Lo spazio delle funzioni C^∞ su S sarà indicato con $C^\infty(S)$.

Osservazione 2.2.1. Una funzione differenziabile $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ è automaticamente continua. Infatti sia $I \subseteq \mathbb{R}$ aperto e $p \in f^{-1}(I)$. Per ipotesi esiste una parametrizzazione locale $\varphi: U \rightarrow S$ in p tale che $f \circ \varphi$ sia di classe C^∞ (e quindi in particolare continua) in un intorno di $\varphi^{-1}(p)$. Il che vuol dire che $(f \circ \varphi)^{-1}(I) = \varphi^{-1}(f^{-1}(I))$ è un intorno di $\varphi^{-1}(p)$. Ma φ è un omeomorfismo con l'immagine; quindi $f^{-1}(I)$ dev'essere un intorno di $\varphi(\varphi^{-1}(p)) = p$. Siccome p era arbitrario, ne segue che $f^{-1}(I)$ è aperto in S , e quindi che f è continua.

Il problema con questa definizione è che potrebbe dipendere dalla parametrizzazione locale scelta: a priori, potrebbe esistere un'altra parametrizzazione locale ψ in p tale che $f \circ \psi$ non sia differenziabile in $\psi^{-1}(p)$. Per fortuna, il seguente teorema implica che questo non può capitare.

Teorema 2.2.1: Sia S una superficie, e $\varphi: U \rightarrow S$, $\psi: V \rightarrow S$ due parametrizzazioni locali tali che $\Omega = \varphi(U) \cap \psi(V) \neq \emptyset$. Allora l'applicazione $h = \varphi^{-1} \circ \psi: \psi^{-1}(\Omega) \rightarrow \varphi^{-1}(\Omega)$ è un diffeomorfismo.

Dimostrazione: L'applicazione h è un omeomorfismo, in quanto composizione di omeomorfismi; dobbiamo dimostrare che lei e la sua inversa sono di classe C^∞ .

Sia $x_0 \in \psi^{-1}(\Omega)$, $y_0 = h(x_0) \in \varphi^{-1}(\Omega)$ e $p = \psi(x_0) = \varphi(y_0) \in \Omega$. La Proposizione 2.1.6 ci fornisce un intorno W di $p \in \mathbb{R}^3$ e un'applicazione $\Phi: W \rightarrow \mathbb{R}^2$ di classe C^∞ tale che $\Phi|_{W \cap S} \equiv \varphi^{-1}$. Ora, la continuità di ψ ci assicura che esiste un intorno $V_1 \subset \psi^{-1}(\Omega)$ di x_0 tale che $\psi(V_1) \subset W$. Ma allora $h|_{V_1} = \Phi \circ \psi|_{V_1}$, e quindi h è di classe C^∞ in x_0 . Essendo x_0 generico, h è di classe C^∞ dappertutto.

Analogamente si dimostra che h^{-1} è di classe C^∞ , per cui h è un diffeomorfismo. $\square$

Corollario 2.2.2: Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie, $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione, e $p \in S$. Se esiste una parametrizzazione locale $\varphi: U \rightarrow S$ in p tale che $f \circ \varphi$ sia di classe C^∞ in un intorno di $\varphi^{-1}(p)$, allora $f \circ \psi$ è di classe C^∞ in un intorno di $\psi^{-1}(p)$ per ogni parametrizzazione locale $\psi: V \rightarrow S$ di S in p .

Dimostrazione: Infatti possiamo scrivere

$$f \circ \psi = (f \circ \varphi) \circ (\varphi^{-1} \circ \psi),$$

e il teorema precedente ci assicura che $f \circ \psi$ è di classe C^∞ in un intorno di $\psi^{-1}(p)$ se e solo se $f \circ \varphi$ è di classe C^∞ in un intorno di $\varphi^{-1}(p)$. $\square$

Quindi la definizione di funzione differenziabile su una superficie non dipende dalle parametrizzazioni locali; per testare se una funzione è differenziabile possiamo usare una qualsiasi parametrizzazione locale.

Lo stesso approccio ci permette di definire il concetto di applicazione differenziabile fra due superfici:

Definizione 2.2.2: Se $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$ sono due superfici, diremo che una applicazione $F: S_1 \rightarrow S_2$ è di classe C^∞ (o differenziabile) se per ogni $p \in S_1$ esistono una parametrizzazione locale $\varphi_1: U_1 \rightarrow S_1$ in p e una parametrizzazione locale $\varphi_2: U_2 \rightarrow S_2$ in $F(p)$ tali che $\varphi_2^{-1} \circ F \circ \varphi_1$ sia di classe C^∞ (dove definita). Se inoltre F è invertibile con inversa di classe C^∞ , diremo che F è un diffeomorfismo, e che S_1 e S_2 sono diffeomorfe.

Esercizio 2.2.1. Dimostra che un'applicazione differenziabile fra superfici è necessariamente continua.

Esercizio 2.2.2. Sia $F: S_1 \rightarrow S_2$ un'applicazione fra superfici, e $p \in S_1$. Dimostra che se esistono una parametrizzazione locale $\varphi_1: U_1 \rightarrow S_1$ in p e una parametrizzazione locale $\varphi_2: U_2 \rightarrow S_2$ in $F(p)$ tali che $\varphi_2^{-1} \circ F \circ \varphi_1$ sia di classe C^∞ in un intorno di $\varphi_1^{-1}(p)$, allora $\psi_2^{-1} \circ F \circ \psi_1$ è di classe C^∞ in un intorno di $\psi_1^{-1}(p)$ per ogni parametrizzazione locale $\psi_1: V_1 \rightarrow S_1$ di S in p e ogni parametrizzazione locale $\psi_2: V_2 \rightarrow S_2$ di S in $F(p)$.

Esercizio 2.2.3. Definisci in maniera analoga i concetti di applicazione C^∞ da un aperto di $\mathbb{R}^n$ a valori in una superficie, e di applicazione C^∞ da una superficie a valori in uno spazio euclideo $\mathbb{R}^m$.

La composizione di applicazioni C^∞ è ancora di classe C^∞ :

Proposizione 2.2.3: Se $F: S_1 \rightarrow S_2$ e $G: S_2 \rightarrow S_3$ sono applicazioni di classe C^∞ fra superfici, allora anche $G \circ F: S_1 \rightarrow S_3$ è di classe C^∞ .

Dimostrazione: Dato $p \in S_1$, scegliamo una parametrizzazione locale $\varphi_1: U_1 \rightarrow S_1$ di S_1 in p , una parametrizzazione locale $\varphi_2: U_2 \rightarrow S_2$ di S_2 in $F(p)$, e una parametrizzazione locale $\varphi_3: U_3 \rightarrow S_3$ di S_3 in $G(F(p))$. Allora

$$\varphi_3^{-1} \circ (G \circ F) \circ \varphi_1 = (\varphi_3^{-1} \circ G \circ \varphi_2) \circ (\varphi_2^{-1} \circ F \circ \varphi_1)$$

è di classe C^∞ dove definita, grazie all'Esercizio 2.2.2. $\square$

ESEMPIO 2.2.1. Una parametrizzazione locale $\varphi: U \rightarrow \varphi(U) \subset S$ è un diffeomorfismo fra U e $\varphi(U)$. Infatti prima di tutto è per definizione invertibile. Poi, per testare la differenziabilità sua e dell'inversa possiamo usare l'identità come parametrizzazione locale di U e lei stessa come parametrizzazione locale di S , per cui dobbiamo solo verificare che $\varphi^{-1} \circ \varphi \circ \text{id} = \text{id} \circ \varphi^{-1} \circ \varphi$ siano di classe C^∞ , che è ovvio.

ESEMPIO 2.2.2. Se $U \subset \mathbb{R}^n$ è aperto e $F: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ è un'applicazione C^∞ la cui immagine è contenuta in una superficie S , allora F è di classe C^∞ anche come applicazione a valori in S . Infatti, sia ψ una parametrizzazione locale in un punto $p \in F(U)$; la Proposizione 2.1.6 ci dice che esiste una funzione Ψ di classe C^∞ definita in un intorno di p tale che $\psi^{-1} \circ F = \Psi \circ F$, e quest'ultima composizione è di classe C^∞ .

ESEMPIO 2.2.3. Se $S \subset \mathbb{R}^3$ è una superficie, allora l'inclusione $\iota: S \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ è di classe C^∞ : infatti dire che ι è differenziabile è esattamente equivalente a dire (perché?) che le parametrizzazioni locali sono di classe C^∞ considerate come applicazioni a valori in $\mathbb{R}^3$.

ESEMPIO 2.2.4. Se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ è un aperto di $\mathbb{R}^3$ contenente la superficie S , e $\tilde{f} \in C^\infty(\Omega)$, allora la restrizione $f = \tilde{f}|_S$ è di classe C^∞ su S . Infatti $f \circ \varphi = \tilde{f} \circ \varphi$ è di classe C^∞ quale che sia la parametrizzazione locale φ .

In realtà, l'esempio precedente fornisce tutte le funzioni C^∞ su una superficie S :

Teorema 2.2.4: Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie, e $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un aperto tale che $S \subset \Omega$ sia chiusa in Ω . Allora una funzione $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ è di classe C^∞ su S se e solo se esiste una $\tilde{f} \in C^\infty(\Omega)$ tale che $\tilde{f}|_S \equiv f$.

Per dimostrare questo risultato vediamo prima una versione locale:

Proposizione 2.2.5: Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie, e $p \in S$. Allora una $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ è di classe C^∞ in p se e solo se esistono un intorno aperto $W \subseteq \mathbb{R}^3$ di p e una funzione $\tilde{f} \in C^\infty(W)$ tali che $\tilde{f}|_{W \cap S} \equiv f|_{W \cap S}$.

Dimostrazione: In una direzione è l'Esempio 2.2.4. Viceversa, supponiamo che f sia di classe C^∞ in p , e sia $\varphi: U \rightarrow S$ una parametrizzazione locale centrata in p . La Proposizione 2.1.6 ci fornisce un intorno W di p in $\mathbb{R}^3$ e un'applicazione $\Phi: W \rightarrow \mathbb{R}^2$ di classe C^∞ tali che $\Phi(W) \subseteq U$ e $\Phi|_{W \cap S} \equiv \varphi^{-1}|_{W \cap S}$. Allora la funzione $\tilde{f} = (f \circ \varphi) \circ \Phi \in C^\infty(W)$ è come voluto. $\square$

Per proseguire ci servono un paio di definizioni e un lemma.

Definizione 2.2.3: Diremo che un ricoprimento $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ di uno spazio topologico X è *localmente finito* se ogni $p \in X$ ha un intorno $U \subseteq X$ tale che $U \cap U_\alpha \neq \emptyset$ solo per un numero finito di indici α . Un ricoprimento $\mathfrak{V} = \{V_\beta\}_{\beta \in B}$ è un *raffinamento* di $\mathfrak{U}$ se per ogni $\beta \in B$ esiste un $\alpha \in A$ tale che $V_\beta \subseteq U_\alpha$.

Lemma 2.2.6: Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto, e $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un ricoprimento aperto di Ω . Allora esiste un ricoprimento aperto localmente finito $\mathfrak{V} = \{V_\beta\}_{\beta \in B}$ di Ω tale che:

- (i) $\mathfrak{V}$ è un raffinamento di $\mathfrak{U}$;
- (ii) per ogni $\beta \in B$ esistono $p_\beta \in \Omega$ e $r_\beta > 0$ tali che $V_\beta = B(p_\beta, 3r_\beta)$;
- (iii) posto $W_\beta = B(p_\beta, r_\beta)$, anche $\mathfrak{W} = \{W_\beta\}_{\beta \in B}$ è un ricoprimento di Ω .

Dimostrazione: L'aperto Ω è localmente compatto e a base numerabile; quindi possiamo trovare una base numerabile $\{P_j\}$ composta da aperti a chiusura compatta. Definiamo ora per induzione una famiglia $\{K_j\}$

crescente di compatti. Poniamo $K_1 = \overline{P_1}$. Se K_j è definito, sia $r \geq j$ il minimo intero per cui $K_j \subset \bigcup_{i=1}^r P_i$, e poniamo

$$K_{j+1} = \overline{P_1} \cup \dots \cup \overline{P_r}.$$

In questo modo abbiamo $K_j \subset \overset{\circ}{K}_{j+1}$ e $\Omega = \bigcup_j K_j$.

Ora, per ogni $p \in (\overset{\circ}{K}_{j+2} \setminus K_{j-1}) \cap U_\alpha$ scegliamo una pallina $V_{\alpha,j,p} = B(p, 3r_{\alpha,j,p})$ centrata in p e tale che $B(p, 3r_{\alpha,j,p}) \subset (\overset{\circ}{K}_{j+2} \setminus K_{j-1}) \cap U_\alpha$. Poniamo $W_{\alpha,j,p} = B(p, r_{\alpha,j,p})$. Ora, al variare di α e p gli aperti $W_{\alpha,j,p}$ formano un ricoprimento aperto di $K_{j+1} \setminus \overset{\circ}{K}_j$, che è compatto; quindi possiamo estrarne un sottoricoprimento finito $\{W_{j,r}\}$. Unendo questi ricoprimenti al variare di j otteniamo un ricoprimento aperto numerabile $\{W_\beta\}$ di Ω ; se indichiamo con V_β la pallina corrispondente a W_β , per concludere dobbiamo solo dimostrare che il ricoprimento aperto $\{V_\beta\}$ è localmente finito. Ma infatti per ogni $p \in \Omega$ possiamo trovare un indice j tale che $p \in \overset{\circ}{K}_j$, e per costruzione solo un numero finito dei V_β intersecano $\overset{\circ}{K}_j$. $\square$

Definizione 2.2.4: Una *partizione dell'unità* su un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ è una famiglia $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset C^\infty(\Omega)$ tale che

- (a) $\rho_\alpha \geq 0$ su Ω ;
- (b) $\{\text{supp}(\rho_\alpha)\}$ è un ricoprimento localmente finito di Ω , dove $\text{supp}(\rho_\alpha) = \overline{\{p \in \Omega \mid \rho_\alpha(p) \neq 0\}}$;
- (c) $\sum_\alpha \rho_\alpha \equiv 1$.

Diremo poi che la partizione dell'unità $\{\rho_\alpha\}$ è *subordinata* al ricoprimento aperto $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ se si ha $\text{supp}(\rho_\alpha) \subset U_\alpha$ per ogni indice $\alpha \in A$.

Osservazione 2.2.2. La proprietà (b) della definizione di partizione dell'unità implica che nell'intorno di ciascun punto di Ω solo un numero finito di elementi della partizione dell'unità sono diversi da zero; quindi la somma nella proprietà (c) è ben definita, in quanto in ciascun punto di Ω solo un numero finito di addendi sono non nulli. Inoltre, siccome Ω è a base numerabile, sempre la proprietà (b) implica (perché?) che $\text{supp}(\rho_\alpha) \neq \emptyset$ solo per una quantità al più numerabile di indici α . In particolare, se la partizione dell'unità è subordinata a un ricoprimento composto da una quantità più che numerabile di aperti, allora $\rho_\alpha \equiv 0$ per tutti gli indici tranne al più una quantità numerabile. Questo non deve stupire, in quanto in uno spazio topologico a base numerabile da ogni ricoprimento aperto si può sempre estrarre un sottoricoprimento numerabile (proprietà di Lindelöf).

Teorema 2.2.7: Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto. Allora ogni ricoprimento aperto $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ di Ω ammette una partizione dell'unità subordinata a esso.

Dimostrazione: Sia $\mathfrak{V} = \{V_\beta\}_{\beta \in B}$ il raffinamento dato dal Lemma 2.2.6, e $g_\beta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ data dal Corollario 1.1.7; in particolare, $\{\text{supp}(g_\beta)\}$ è un ricoprimento localmente finito di Ω che raffina $\mathfrak{U}$. Quindi prendendo

$$\tilde{\rho}_\beta = \frac{g_\beta}{\sum_{\beta' \in B} g_{\beta'}}$$

otteniamo una partizione dell'unità $\{\tilde{\rho}_\beta\}_{\beta \in B}$ tale che per ogni $\beta \in B$ esiste un $\alpha(\beta) \in A$ per cui si ha $\text{supp}(\tilde{\rho}_\beta) \subset U_{\alpha(\beta)}$. Ma allora ponendo

$$\rho_\alpha = \sum_{\substack{\beta \in B \\ \alpha(\beta) = \alpha}} \tilde{\rho}_\beta$$

si verifica subito (esercizio) che $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in A}$ è una partizione dell'unità subordinata a $\mathfrak{U}$, come voluto. $\square$

Siamo pronti per la

Dimostrazione del Teorema 2.2.4: In una direzione è l'Esempio 2.2.4. Viceversa, sia $f \in C^\infty(S)$. La Proposizione 2.2.5 ci dice che per ogni $p \in S$ possiamo trovare un intorno aperto $U_p \subseteq \Omega$ di p e una funzione $f_p \in C^\infty(U_p)$ tali che $f_p|_{U_p \cap S} \equiv f|_{U_p \cap S}$. Sia inoltre $f_{\Omega \setminus S} \in C^\infty(\Omega \setminus S)$ la funzione identicamente nulla. Allora $\mathfrak{U} = \{U_p\}_{p \in S} \cup \{\Omega \setminus S\}$ è un ricoprimento aperto di Ω ; per il Teorema 2.2.7 esiste una partizione dell'unità $\{\rho_p\}_{p \in S} \cup \{\rho_{\Omega \setminus S}\}$ subordinata a $\mathfrak{U}$. In particolare, per ogni $p \in S$ se estendiamo $\rho_p f_p$ a zero fuori dal supporto di ρ_p otteniamo una funzione C^∞ in tutto Ω . Poniamo allora

$$\tilde{f} = \sum_{p \in S} \rho_p f_p. \quad (2.2.1)$$

Siccome nell'intorno di un qualsiasi punto di Ω solo un numero finito di addendi in (2.2.1) è non nullo, si vede subito che $\tilde{f} \in C^\infty(\Omega)$. Infine, siccome le f_α sono tutte estensioni della stessa f e $\{\rho_\alpha\}$ è una partizione dell'unità, segue subito che $\tilde{f}|_S \equiv f$, e ci siamo. $\square$

2.3 Piano tangente

Vogliamo definire il concetto di vettore tangente a una superficie in un punto. Il modo geometricamente più semplice è il seguente:

Definizione 2.3.1: Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ un insieme, e $p \in S$. Un *vettore tangente* a S in p è un vettore della forma $\sigma'(0)$, dove $\sigma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$ è una curva di classe C^1 il cui sostegno è contenuto in S e tale che $\sigma(0) = p$. L'insieme di tutti i possibili vettori tangenti a S in p è il *cono tangente* $T_p S$ a S in p .

Osservazione 2.3.1. Un cono (di vertice l'origine) in uno spazio vettoriale V è un sottoinsieme $C \subseteq V$ tale che $av \in C$ per ogni $a \in \mathbb{R}$ e $v \in C$. Non è difficile verificare che il cono tangente a un insieme è effettivamente un cono in questo senso. Infatti, prima di tutto il vettore nullo è il vettore tangente a una curva costante, per cui $0 \in T_p S$ per ogni $p \in S$. Poi, se $a \in \mathbb{R}^*$ e $0 \neq v \in T_p S$, scelta una curva $\sigma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ con $\sigma(0) = p$ e $\sigma'(0) = v$, allora la curva $\sigma_a: (-\varepsilon/|a|, \varepsilon/|a|) \rightarrow S$ data da $\sigma_a(t) = \sigma(at)$ è tale che $\sigma_a(0) = p$ e $\sigma'_a(0) = av$, cioè $av \in T_p S$ come richiesto.

ESEMPIO 2.3.1. Se $S \subset \mathbb{R}^3$ è l'unione di due rette per l'origine, si verifica subito (esercizio) che $T_O S = S$.

Il vantaggio di questa definizione di vettore tangente è l'evidente significato geometrico. Se S è una superficie, però, l'intuizione geometrica ci suggerisce che $T_p S$ dovrebbe essere un piano, e non semplicemente un cono. Sfortunatamente, questo non è evidente dalla definizione: la somma di due curve in S non è necessariamente una curva in S , per cui il modo "ovvio" di dimostrare che la somma di due vettori tangenti è un vettore tangente non funziona. D'altra parte, l'esempio precedente mostra che se S non è una superficie il cono tangente non ha nessun motivo per essere un piano; e quindi per ottenere un risultato del genere dobbiamo sfruttare a fondo la definizione di superficie — ovvero tirare in ballo le parametrizzazioni locali.

Cominciamo col vedere cosa succede nel caso più semplice, quello degli aperti nel piano:

ESEMPIO 2.3.2. Sia $U \subseteq \mathbb{R}^2$ un aperto, e $p \in U$. Ogni curva contenuta in U è piana, per cui i vettori tangenti a U in p sono necessariamente contenuti in $\mathbb{R}^2$. Viceversa, se $v \in \mathbb{R}^2$ allora la curva $\sigma(t) = p + tv$ ha sostegno contenuto in U per $|t|$ abbastanza piccolo, e ha vettore tangente v . Quindi abbiamo dimostrato che $T_p U = \mathbb{R}^2$.

Seguendo la solita filosofia che le parametrizzazioni locali ci permettono di trasportare nozioni dagli aperti del piano alle superfici otteniamo allora la seguente:

Proposizione 2.3.1: Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie, $p \in S$, e $\varphi: U \rightarrow S$ una parametrizzazione locale in p con $\varphi(x_o) = p$. Allora $d\varphi_{x_o}$ è un isomorfismo fra $\mathbb{R}^2$ e $T_p S$. In particolare, $T_p S = d\varphi_{x_o}(\mathbb{R}^2)$ è sempre uno spazio vettoriale di dimensione 2, e $d\varphi_{x_o}(\mathbb{R}^2)$ non dipende da φ ma solo da S e p .

Dimostrazione: Dato $v \in \mathbb{R}^2$, possiamo trovare $\varepsilon > 0$ tale che $x_o + tv \in U$ per ogni $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$; quindi la curva $\sigma_v: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ data da $\sigma_v(t) = \varphi(x_o + tv)$ è ben definita, $\sigma_v(0) = p$ e $\sigma'_v(0) = d\varphi_{x_o}(v)$, per cui $d\varphi_{x_o}(\mathbb{R}^2) \subseteq T_p S$.

Viceversa, sia $\sigma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ una curva con $\sigma(0) = p$; a meno di diminuire ε , possiamo anche supporre che il sostegno di σ sia contenuto in $\varphi(U)$. Grazie alla Proposizione 2.1.6.(ii) la composizione $\sigma_o = \varphi^{-1} \circ \sigma$ è una curva di classe C^∞ in U tale che $\sigma_o(0) = x_o$; poniamo $v = \sigma'_o(0) \in \mathbb{R}^2$. Allora

$$d\varphi_{x_o}(v) = \frac{d(\varphi \circ \sigma_o)}{dt}(0) = \sigma'(0),$$

per cui $T_p S \subseteq d\varphi_{x_o}(\mathbb{R}^2)$. Quindi $d\varphi_{x_o}: \mathbb{R}^2 \rightarrow T_p S$ è surgettiva; essendo anche iniettiva, in quanto $d\varphi_{x_o}$ ha rango massimo, è un isomorfismo fra $\mathbb{R}^2$ e $T_p S$. $\square$

Definizione 2.3.2: Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie, e $p \in S$. Lo spazio vettoriale $T_p S \subset \mathbb{R}^3$ è detto *piano tangente* a S in p .

Osservazione 2.3.2. Attenzione: come l'abbiamo definito noi, il piano tangente è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$, e quindi passa per l'origine indipendentemente da quale sia il punto $p \in S$. Quando si disegna il piano tangente come un piano appoggiato alla superficie, non si sta disegnando $T_p S$ ma il suo traslato $p + T_p S$, che è un piano affine passante per p .

Osservazione 2.3.3. In un senso molto preciso che non abbiamo il tempo di illustrare qui, il piano tangente è il piano *che meglio approssima* la superficie nel punto p .

Osservazione 2.3.4. Dalla definizione risulta evidente che se $S \subset \mathbb{R}^3$ è una superficie, $p \in S$ e $U \subseteq S$ è un aperto di S contenente p , allora $T_p U = T_p S$. In particolare, se $S = \mathbb{R}^2$ allora $T_p U = T_p \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2$ per ogni aperto U del piano e ogni $p \in U$.

Questa definizione di piano tangente ha un problema: dipende strettamente dal fatto che S è contenuta in $\mathbb{R}^3$, mentre sarebbe piacevole avere un concetto di vettore tangente intrinseco a S , indipendente dall'immersione nello spazio euclideo. In altre parole, ci piacerebbe avere una definizione di $T_p S$ come spazio vettoriale astratto, dipendente solo da S e da p , e non come sottospazio di $\mathbb{R}^3$. Inoltre, visto che stiamo parlando di "geometria differenziale", prima o poi dovremo trovare il modo di fare derivate su una superficie.

Possiamo risolvere entrambi questi problemi in un colpo solo, in un modo che risulta essenziale per la generalizzazione di vettore tangente a più di due dimensioni (e piuttosto utile anche per noi). L'idea cruciale è contenuta nel seguente

ESEMPIO 2.3.3. Sia $U \subseteq \mathbb{R}^2$ un aperto, e $p \in U$. Allora a ogni vettore tangente $v \in T_p U = \mathbb{R}^2$ possiamo associare una derivata parziale:

$$v = (v^1, v^2) \mapsto \left. \frac{\partial}{\partial v} \right|_p = v^1 \left. \frac{\partial}{\partial x^1} \right|_p + v^2 \left. \frac{\partial}{\partial x^2} \right|_p,$$

e tutte le derivate parziali sono di questo tipo. Quindi in un certo senso possiamo identificare $T_p U$ con l'insieme delle derivate parziali.

Il nostro obiettivo quindi è indentificare, anche nel caso delle superfici, i vettori tangenti con il tipo giusto di derivata parziale. Per far ciò, prima di tutto dobbiamo chiarire che oggetti vogliamo derivare. L'osservazione di base è che per derivare una funzione in un punto basta conoscere il comportamento della funzione in un intorno qualsiasi del punto; se il nostro obiettivo è solo calcolare la derivata in p , due funzioni che coincidono in un intorno di p sono per noi equivalenti. Questa osservazione suggerisce la seguente

Definizione 2.3.3: Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie, e $p \in S$. Indichiamo con $\mathcal{F}$ l'insieme delle coppie (U, f) , dove $U \subseteq S$ è un intorno aperto di p in S , e $f \in C^\infty(U)$. Su $\mathcal{F}$ mettiamo la relazione d'equivalenza $\sim$ definita come segue: $(U, f) \sim (V, g)$ se esiste un intorno aperto $W \subseteq U \cap V$ di p tale che $f|_W \equiv g|_W$. Lo spazio quoziente $C^\infty(p) = \mathcal{F} / \sim$ sarà detto *spiga dei germi di funzioni C^∞ in p* , e un elemento $\mathbf{f} \in C^\infty(p)$ è detto *germe* in p . Un elemento (U, f) della classe di equivalenza $\mathbf{f}$ è detto *rappresentante* di $\mathbf{f}$. Se sarà necessario ricordare su quale superficie stiamo lavorando, scriveremo $C^\infty_S(p)$ invece di $C^\infty(p)$.

Osservazione 2.3.5. Se $U \subseteq S$ è un aperto di una superficie S e $p \in U$, allora $C^\infty_U(p) = C^\infty_S(p)$.

Ciò che vogliamo derivare sono quindi i germi di funzioni C^∞ . Prima di vedere come, osserviamo che $C^\infty(p)$ ha una naturale struttura algebrica.

Definizione 2.3.4: Un'algebra su un campo $\mathbb{K}$ è un insieme A su cui sono definite una somma $+$, un prodotto $\cdot$ e un prodotto per scalari $\lambda \cdot$ tali che $(A, +, \cdot)$ sia un anello, $(A, +, \lambda \cdot)$ sia uno spazio vettoriale, e valga la proprietà associativa $(\lambda f)g = \lambda(fg) = f(\lambda g)$ per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$ e $f, g \in A$.

Lemma 2.3.2: Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie, $p \in S$, e $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in C^\infty(p)$ due germi in p . Siano inoltre (U_1, f_1) , (U_2, f_2) due rappresentanti di $\mathbf{f}$, e (V_1, g_1) , (V_2, g_2) due rappresentanti di $\mathbf{g}$. Allora:

- (i) $(U_1 \cap V_1, f_1 + g_1)$ è equivalente a $(U_2 \cap V_2, f_2 + g_2)$;
- (ii) $(U_1 \cap V_1, f_1 g_1)$ è equivalente a $(U_2 \cap V_2, f_2 g_2)$;
- (iii) $(U_1, \lambda f_1)$ è equivalente a $(U_2, \lambda f_2)$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$;
- (iv) $f_1(p) = f_2(p)$.

Dimostrazione: Cominciamo con (i). Siccome $(U_1, f_1) \sim (U_2, f_2)$, esiste un intorno aperto $W \subseteq U_1 \cap U_2$ di p tale che $f_1|_W \equiv f_2|_W$. Analogamente, siccome $(V_1, g_1) \sim (V_2, g_2)$, esiste un intorno aperto $\tilde{W} \subseteq V_1 \cap V_2$ di p tale che $g_1|_{\tilde{W}} \equiv g_2|_{\tilde{W}}$. Ma allora $(f_1 + f_2)|_{W \cap \tilde{W}} \equiv (g_1 + g_2)|_{W \cap \tilde{W}}$, e quindi $(U_1 \cap V_1, f_1 + g_1) \sim (U_2 \cap V_2, f_2 + g_2)$ in quanto $W \cap \tilde{W} \subseteq U_1 \cap V_1 \cap U_2 \cap V_2$.

La dimostrazione di (ii) è analoga, e la (iii) e la (iv) sono ovvie. $\square$

Definizione 2.3.5: Siano $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in C^\infty(p)$ due germi in un punto $p \in S$. Indicheremo con $\mathbf{f} + \mathbf{g} \in C^\infty(p)$ il germe rappresentato da $(U \cap V, f + g)$, dove (U, f) è un qualsiasi rappresentante di $\mathbf{f}$ e (V, g) è un qualsiasi rappresentante di $\mathbf{g}$. Analogamente indicheremo con $\lambda \mathbf{f} \in C^\infty(p)$ il germe rappresentato da $(U, \lambda f)$. Il Lemma 2.3.2 ci assicura che queste definizioni sono ben poste, ed è evidente (perché?) che $C^\infty(p)$ con queste operazioni è un'algebra. Infine, per ogni $\mathbf{f} \in C^\infty(p)$ definiamo il suo valore $\mathbf{f}(p) \in \mathbb{R}$ in p ponendo $\mathbf{f}(p) = f(p)$ per un qualsiasi rappresentante (U, f) di $\mathbf{f}$. Di nuovo, il Lemma 2.3.2 ci assicura che $\mathbf{f}(p)$ è ben definito.

Il fatto che la composizione di applicazioni differenziabili sia ancora un'applicazione differenziabile ci permette di confrontare spighe di germi su punti in superfici diverse. Infatti, sia $F: S_1 \rightarrow S_2$ un'applicazione di classe C^∞ fra superfici, e siano (V_1, g_1) e (V_2, g_2) due rappresentanti di un germe $\mathbf{g} \in C^\infty(F(p))$. Allora è evidente (esercizio) che $(F^{-1}(V_1), g_1 \circ F)$ e $(F^{-1}(V_2), g_2 \circ F)$ rappresentano lo stesso germe in p , che quindi dipende solo da $\mathbf{g}$ (e da F). Dunque possiamo introdurre la seguente

Definizione 2.3.6: Dati un'applicazione differenziabile fra superfici $F: S_1 \rightarrow S_2$ e un punto $p \in S_1$, indicheremo con $F_p^*: C_{S_2}^\infty(F(p)) \rightarrow C_{S_1}^\infty(p)$ l'applicazione che associa a un germe $\mathbf{g} \in C_{S_2}^\infty(F(p))$ di rappresentante (V, g) il germe $F_p^*(\mathbf{g}) = \mathbf{g} \circ F \in C_{S_1}^\infty(p)$ di rappresentante $(F^{-1}(V), g \circ F)$. Si verifica subito (esercizio) che F_p^* è un omomorfismo di algebre.

Osservazione 2.3.6. Una convenzione molto comune (e molto utile) della matematica contemporanea consiste nell'indicare con una stella in alto (come in F^*) un'applicazione associata in modo canonico a un'applicazione data ma che procede in direzione inversa: la F va da S_1 a S_2 , mentre F^* va dai germi in S_2 ai germi in S_1 . La stessa convenzione prevede di usare la stella in basso (come in F_*) per indicare un'applicazione associata che invece proceda nella stessa direzione dell'applicazione data (vedi per esempio le Definizioni 2.3.8 e 2.3.10 più oltre).

Lemma 2.3.3: (i) Si ha $(\text{id}_S)_p^* = \text{id}$ per ogni punto p di una superficie S .

(ii) Siano $F: S_1 \rightarrow S_2$ e $G: S_2 \rightarrow S_3$ applicazioni C^∞ fra superfici e $p \in S_1$. Allora $(G \circ F)_p^* = F_p^* \circ G_{F(p)}^*$ per ogni $p \in S_1$.

(iii) Se $F: S_1 \rightarrow S_2$ è un diffeomorfismo allora $F_p^*: C^\infty(F(p)) \rightarrow C^\infty(p)$ è un isomorfismo di algebre per ogni $p \in S_1$. In particolare, se $\varphi: U \rightarrow S$ è una parametrizzazione locale con $\varphi(x_o) = p \in S$, allora $\varphi_{x_o}^*: C_S^\infty(p) \rightarrow C_U^\infty(x_o)$ è un isomorfismo di algebre.

Dimostrazione: (i) Ovvio.

(ii) Segue subito (esercizio) dall'uguaglianza $g \circ (G \circ F) = (g \circ G) \circ F$.

(iii) Infatti (i) e (ii) implicano che $(F^{-1})_{F(p)}^*$ è l'inversa di F_p^* . $\square$

Adesso siamo finalmente in grado di definire cosa intendiamo per derivata parziale su una superficie.

Definizione 2.3.7: Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie, e $p \in S$. Una *derivazione* in p è una funzione $\mathbb{R}$ -lineare $D: C^\infty(p) \rightarrow \mathbb{R}$ che soddisfa la regola di Leibniz:

$$D(\mathbf{f}\mathbf{g}) = \mathbf{f}(p)D(\mathbf{g}) + \mathbf{g}(p)D(\mathbf{f}).$$

Si verifica subito (esercizio) che l'insieme $\mathcal{D}(C^\infty(p))$ delle derivazioni di $C^\infty(p)$ è un sottospazio vettoriale del duale (come spazio vettoriale) di $C^\infty(p)$.

ESEMPIO 2.3.4. Sia $U \subset \mathbb{R}^2$ un aperto del piano, e $p \in U$. Abbiamo già osservato che $T_p U = \mathbb{R}^2$. D'altra parte, le derivate parziali in p sono chiaramente delle derivazioni di $C^\infty(p)$; quindi possiamo introdurre un'applicazione lineare naturale $\alpha: T_p U \rightarrow \mathcal{D}(C^\infty(p))$ ponendo

$$\alpha(v) = \left. \frac{\partial}{\partial v} \right|_p = v^1 \left. \frac{\partial}{\partial x^1} \right|_p + v^2 \left. \frac{\partial}{\partial x^2} \right|_p.$$

Il punto cruciale è che l'applicazione α è in realtà un isomorfismo fra $T_p U$ e $\mathcal{D}(C^\infty(p))$. Di più, quello che succede è che $T_p S$ e $\mathcal{D}(C^\infty(p))$ sono canonicamente isomorfi per ogni superficie S e ogni $p \in S$, fatto che ci fornirà la desiderata caratterizzazione del tutto intrinseca dei vettori tangenti. Per dimostrarlo ci servono ancora una definizione, un esercizio e un lemma.

Definizione 2.3.8: Sia $\varphi: U \rightarrow S$ una parametrizzazione locale con $\varphi(x_o) = p \in S$. Definiamo un'applicazione $\varphi_*: \mathcal{D}(C^\infty(x_o)) \rightarrow \mathcal{D}(C^\infty(p))$ ponendo $\varphi_*(D) = D \circ \varphi_{x_o}^*$, cioè

$$\varphi_*(D)(\mathbf{f}) = D(\mathbf{f} \circ \varphi)$$

per ogni $\mathbf{f} \in C^\infty(p)$ e $D \in \mathcal{D}(C^\infty(x_o))$. Si verifica subito (perché?) che $\varphi_*(D)$ è una derivazione, in quanto $\varphi_{x_o}^*$ è un isomorfismo di algebre, per cui l'immagine di φ_* è effettivamente contenuta in $\mathcal{D}(C^\infty(p))$. Di più, è facile vedere (esercizio) che φ_* è un isomorfismo di spazi vettoriali, la cui inversa è $(\varphi_*)^{-1}(D) = D \circ (\varphi^{-1})_p^*$.

Osservazione 2.3.7. Vedremo in seguito che φ_* può essere canonicamente identificato col differenziale della parametrizzazione locale.

Lemma 2.3.4: Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto stellato rispetto al punto $x_o \in \mathbb{R}^n$. Allora per ogni $f \in C^\infty(U)$ esistono $g_1, \dots, g_n \in C^\infty(U)$ tali che $g_j(x_o) = \frac{\partial f}{\partial x^j}(x_o)$ e

$$f(x) = f(x_o) + \sum_{j=1}^n (x^j - x_o^j) g_j(x)$$

per ogni $x \in U$.

Dimostrazione: Si ha

$$f(x) - f(x_o) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} f(x_o + t(x - x_o)) dt = \sum_{j=1}^n (x^j - x_o^j) \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^j}(x_o + t(x - x_o)) dt,$$

per cui basta porre

$$g_j(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^j}(x_o + t(x - x_o)) dt.$$

□

E finalmente possiamo dimostrare la promessa caratterizzazione del piano tangente:

Teorema 2.3.5: Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie, e $p \in S$. Allora il piano tangente $T_p S$ è canonicamente isomorfo allo spazio $\mathcal{D}(C^\infty(p))$ delle derivazioni di $C^\infty(p)$.

Dimostrazione: Sia $\varphi: U \rightarrow S$ una parametrizzazione locale centrata in p . Quanto fatto finora ci permette di considerare il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} T_O U = \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{D}(C^\infty(O)) \\ d\varphi_O \downarrow & & \downarrow \varphi_* \\ T_p S & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{D}(C^\infty(p)) \end{array}, \quad (2.3.1)$$

dove α è l'applicazione introdotta nell'Esempio 2.3.4, e $\beta = \varphi_* \circ \alpha \circ (d\varphi_O)^{-1}$. Procederemo in due passi: prima di tutto dimostreremo che α è un isomorfismo. Essendo $d\varphi_O$ e φ_* isomorfismi, questo implicherà che anche β è un isomorfismo. Poi dimostreremo che è possibile esprimere β in modo indipendente dalla parametrizzazione locale φ scelta; quindi β sarà un isomorfismo canonico, indipendente da qualsiasi scelta, e avremo finito.

Cominciamo allora col dimostrare che α è un isomorfismo. Essendo chiaramente lineare, ci basta far vedere che è iniettiva e surgettiva.

Se $v = (v^1, v^2) \in \mathbb{R}^2 = T_O U$, si vede subito che

$$v^j = \alpha(v)(\mathbf{x}^j)$$

per $j = 1, 2$, dove $\mathbf{x}^j$ è il germe nell'origine della funzione coordinata x^j . In particolare, se $v^j \neq 0$ si ha $\alpha(v)(\mathbf{x}^j) \neq 0$, per cui $v \neq O$ implica $\alpha(v) \neq O$ e α è iniettiva.

Per la surgettività, sia $D \in \mathcal{D}(C^\infty(O))$; vogliamo far vedere che $D = \alpha(v)$, dove $v = (D\mathbf{x}^1, D\mathbf{x}^2)$. Prima di tutto notiamo che

$$D\mathbf{1} = D(\mathbf{1} \cdot \mathbf{1}) = 2D\mathbf{1},$$

e quindi $D\mathbf{c} = 0$ per ogni costante $c \in \mathbb{R}$, dove $\mathbf{c}$ è il germe rappresentato da $(\mathbb{R}^2, c)$. Sia ora $\mathbf{f} \in C^\infty(O)$ qualsiasi. Applicando il Lemma 2.3.4 troviamo

$$D\mathbf{f} = D(\mathbf{f}(O)) + D(\mathbf{x}^1 \mathbf{g}_1 + \mathbf{x}^2 \mathbf{g}_2) = \sum_{j=1}^2 [\mathbf{x}^j(O) D\mathbf{g}_j + \mathbf{g}_j(O) D\mathbf{x}^j] = \sum_{j=1}^2 D\mathbf{x}^j \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x^j}(O) = \alpha(v)(\mathbf{f}),$$

dove $v = (D\mathbf{x}^1, D\mathbf{x}^2)$ come previsto, e ci siamo.

Dunque α e β sono degli isomorfismi; per concludere la dimostrazione ci basta far vedere che β non dipende da φ ma solo da S e da p . Sia $v \in T_p S$; allora deve esistere una curva $\sigma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ tale che $\sigma(0) = p$ e $\sigma'(0) = v$. Vogliamo far vedere che

$$\beta(v)(\mathbf{f}) = (f \circ \sigma)'(0) \quad (2.3.2)$$

per ogni $\mathbf{f} \in C^\infty(p)$ e ogni rappresentante $(U, f) \in \mathbf{f}$. Se dimostriamo questo abbiamo finito: infatti il primo membro di (2.3.2) non dipende né da σ né dal rappresentante scelto, mentre il secondo membro non dipende da alcuna parametrizzazione locale. Dunque in tal caso β non dipende né da φ né da σ e quindi è l'isomorfismo canonico cercato.

Ci rimane allora da dimostrare (2.3.2). Scriviamo $\sigma = \varphi \circ \sigma_o$ come nella dimostrazione della Proposizione 2.3.1, in modo da avere $v = d\varphi_O(v_o)$, dove $v_o = \sigma'_o(0) \in \mathbb{R}^2$. Ma allora

$$\begin{aligned} \beta(v)(\mathbf{f}) &= (\varphi_* \circ \alpha \circ (d\varphi_O)^{-1})(v)(\mathbf{f}) = (\varphi_* \circ \alpha)(v_o)(\mathbf{f}) = \alpha(v_o)(\varphi_O^*(\mathbf{f})) = \alpha(v_o)(\mathbf{f} \circ \varphi) \\ &= (\sigma_o^1)'(0) \frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial x^1}(O) + (\sigma_o^2)'(0) \frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial x^2}(O) = ((f \circ \varphi) \circ \sigma_o)'(0) \\ &= (f \circ \sigma)'(0), \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

e ci siamo. □

Osservazione 2.3.8. Una conseguenza del diagramma (2.3.1) è esattamente che, come promesso, l'applicazione φ_* è l'esatto analogo del differenziale di φ nel momento in cui interpretiamo i piani tangenti come spazi di derivazioni.

D'ora in poi identificheremo sistematicamente $T_p S$ e $\mathcal{D}(C^\infty(p))$ senza menzionare esplicitamente l'isomorfismo β ; un vettore tangente sarà considerato sia come un vettore di $\mathbb{R}^3$ che come una derivazione dello spazio dei germi in p senza ulteriori commenti. In particolare, identificheremo sistematicamente i vettori $\{e_1, e_2\}$ della base canonica di $\mathbb{R}^2$ con le derivate parziali $\partial/\partial x^1|_p$ e $\partial/\partial x^2|_p$ quale che sia $p \in \mathbb{R}^2$.

L'isomorfismo fra $\mathbb{R}^2$ e $T_p S$ fornito dalle parametrizzazioni locali ci permette di introdurre particolari base del piano tangente:

Definizione 2.3.9: Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie, e $p \in S$. Se $\varphi: U \rightarrow S$ è una parametrizzazione locale centrata in p , e $\{e_1, e_2\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^2$, allora poniamo

$$\partial_j|_p = \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p = d\varphi_O(e_j) = \frac{\partial \varphi}{\partial x^j}(O) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi^1}{\partial x^j}(O) \\ \frac{\partial \varphi^2}{\partial x^j}(O) \\ \frac{\partial \varphi^3}{\partial x^j}(O) \end{bmatrix}.$$

Chiaramente, $\{\partial_1|_p, \partial_2|_p\}$ è una base di $T_p S$. Quando non ci sarà pericolo di confusione, scriveremo spesso ∂_j invece di $\partial_j|_p$.

Osservazione 2.3.9. Prendiamo una parametrizzazione locale $\varphi: U \rightarrow S$ centrata in un punto $p \in S$, e un vettore tangente $v = v^1 \partial_1|_p + v^2 \partial_2|_p \in T_p S$. Allora (2.3.3) ci dice che l'azione di v come derivazione è data da

$$v(\mathbf{f}) = v^1 \frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial x^1}(O) + v^2 \frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial x^2}(O),$$

per qualsiasi germe $\mathbf{f} \in C^\infty(p)$ e qualsiasi rappresentante (V, f) di $\mathbf{f}$. In particolare, se S è un aperto di $\mathbb{R}^2$, allora i vettori e_1 ed e_2 della base canonica di $\mathbb{R}^2 = T_p U$ corrispondono alle derivate parziali $\partial/\partial x^1$ e $\partial/\partial x^2$.

Osservazione 2.3.10. Nell'osservazione precedente abbiamo descritto l'azione di un vettore tangente su un germe esprimendo il vettore tangente in termini della base data da una parametrizzazione locale. Se invece vediamo $v = (v^1, v^2, v^3) \in T_p S$ come un vettore di $\mathbb{R}^3$ possiamo descrivere la sua azione come segue: dato $\mathbf{f} \in C^\infty(p)$, scegliamo un rappresentante (V, f) di $\mathbf{f}$ ed estendiamo con la Proposizione 2.2.5 a una funzione differenziabile $\tilde{f}$ definita in un intorno W di p in $\mathbb{R}^3$. Sia infine $\sigma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ una curva con $\sigma(0) = p$ e $\sigma'(0) = v$. Allora

$$v(\mathbf{f}) = (f \circ \sigma)'(0) = (\tilde{f} \circ \sigma)'(0) = \sum_{j=1}^3 v^j \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^j}(p).$$

Attenzione: mentre la combinazione lineare nel membro destro della formula precedente è ben definita e dipende soltanto dal vettore tangente v e dal germe $\mathbf{f}$, ciascuna singola derivata parziale $\partial \tilde{f} / \partial x^j(p)$ dipende dall'estensione $\tilde{f}$ scelta, per cui non dà alcuna informazione sulla superficie S per sé.

Esercizio 2.3.1. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie e $p \in S$. Dimostra che per ogni $v \in T_p S$ non nullo esiste una parametrizzazione locale $\varphi: U \rightarrow S$ centrata in p tale che $\partial_1|_p = v$.

Osservazione 2.3.11. Se abbiamo due parametrizzazioni locali $\varphi: U \rightarrow S$ e $\hat{\varphi}: \hat{U} \rightarrow S$ centrate in $p \in S$ otteniamo due basi $\{\partial_1, \partial_2\}$ e $\{\hat{\partial}_1, \hat{\partial}_2\}$ di $T_p S$, dove $\hat{\partial}_j = \partial \hat{\varphi} / \partial \hat{x}^j(O)$, e $(\hat{x}^1, \hat{x}^2)$ sono le coordinate in $\hat{U}$. Avendo due basi di uno stesso spazio vettoriale, deve esistere la matrice di cambiamento di base. Se indichiamo con $h = \hat{\varphi}^{-1} \circ \varphi$ il cambiamento di coordinate, abbiamo $\varphi = \hat{\varphi} \circ h$ e dunque

$$\partial_j = \frac{\partial \hat{x}^1}{\partial x^j}(O) \hat{\partial}_1 + \frac{\partial \hat{x}^2}{\partial x^j}(O) \hat{\partial}_2,$$

dove abbiamo posto $\partial \hat{x}^i / \partial x^j = \partial h^i / \partial x^j$. Quindi la matrice di cambiamento di base è la matrice jacobiana del cambiamento di coordinate.

Abbiamo visto che un modo per definire superfici è come superficie di livello di una funzione differenziabile. La seguente proposizione ci dice come trovare il piano tangente in questo caso:

Proposizione 2.3.6: Sia $a \in \mathbb{R}$ un valore regolare per una funzione $f \in C^\infty(U)$, dove $U \subseteq \mathbb{R}^3$ è un aperto. Posto $S = f^{-1}(a)$, per ogni $p \in S$ il piano tangente $T_p S$ è il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ ortogonale a $\text{grad} f(p)$.

Dimostrazione: Infatti, prendiamo $v \in T_p S$ e sia $\sigma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ una curva con $\sigma(0) = p$ e $\sigma'(0) = v$. Derivando $f \circ \sigma \equiv a$ e calcolando in 0 otteniamo

$$\frac{\partial f}{\partial x^1}(p)v^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2}(p)v^2 + \frac{\partial f}{\partial x^3}(p)v^3 = 0,$$

per cui v è ortogonale a $\text{grad} f(p)$. Dunque $T_p S \subseteq \text{grad} f(p)^\perp$; ma i due sottospazi hanno la stessa dimensione, e quindi coincidono. $\square$

Esercizio 2.3.2. Sia $f: W \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione C^∞ definita in un aperto $W \subseteq \mathbb{R}^3$, prendiamo $a \in \mathbb{R}$ e poniamo $S = f^{-1}(a) \setminus \text{Crit}(f)$. Dimostra che per ogni $p \in S$ il piano tangente $T_p S$ coincide con il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ ortogonale a $\text{grad} f(p)$.

Il modo in cui abbiamo introdotto l'applicazione φ_* , e la sua relazione con il differenziale usuale, suggerisce la seguente definizione di differenziale per una qualsiasi applicazione di classe C^∞ fra superfici:

Definizione 2.3.10: Sia $F: S_1 \rightarrow S_2$ un'applicazione C^∞ fra due superfici, e $p \in S_1$. Il differenziale di F in p è l'applicazione lineare $dF_p: T_p S_1 \rightarrow T_{F(p)} S_2$ definita da $dF_p(D) = D \circ F^*$ per ogni derivazione $D \in T_p S$ di $C^\infty(p)$. A volte si scrive $(F_*)_p$ invece di dF_p .

Esercizio 2.3.3. Siano $F: S_1 \rightarrow S_2$ e $G: S_2 \rightarrow S_3$ applicazioni C^∞ fra superfici, e $p \in S_1$. Dimostra che $d(G \circ F)_p = dG_{F(p)} \circ dF_p$, e che $d(\text{id}_{S_1})_p = \text{id}$. In particolare, se F è un diffeomorfismo allora dF_p è invertibile e $(dF_p)^{-1} = d(F^{-1})_{F(p)}$.

Non è difficile vedere che aspetto prende il differenziale quando applicato a vettori intesi come vettori tangenti a una curva:

Lemma 2.3.7: Sia $F: S_1 \rightarrow S_2$ un'applicazione C^∞ fra superfici e $p \in S_1$. Se $\sigma: (-\delta, \delta) \rightarrow S_1$ è una curva con $\sigma(0) = p$ e $\sigma'(0) = v$ allora

$$dF_p(v) = (F \circ \sigma)'(0). \quad (2.3.4)$$

Dimostrazione: Poniamo $w = (F \circ \sigma)'(0) \in T_{F(p)} S_2$. Usando le notazioni introdotte nella dimostrazione del Teorema 2.3.5, dobbiamo dimostrare che $dF_p(\beta(v)) = \beta(w)$. Ma infatti se $\mathbf{f} \in C^\infty(F(p))$ abbiamo

$$dF_p(\beta(v))(\mathbf{f}) = \beta(v)(F^*(\mathbf{f})) = \beta(v)(\mathbf{f} \circ F) = ((f \circ F) \circ \sigma)'(0) = (f \circ (F \circ \sigma))'(0) = \beta(w)(\mathbf{f}),$$

grazie a (2.3.3). □

Come per la definizione di vettore tangente, siamo di fronte a due possibili modi di introdurre il differenziale, ognuno coi propri pregi e difetti. La (2.3.4) evidenzia il significato geometrico del differenziale; la Definizione 2.3.10 rende invece evidente che il differenziale è un'applicazione lineare fra i piani tangenti, e che valgono le proprietà indicate nell'Esercizio 2.3.3.

Osservazione 2.3.12. Più in generale, se $F: S \rightarrow \mathbb{R}^n$ è un'applicazione C^∞ e $p \in S$, possiamo definire il differenziale $dF_p: T_p S \rightarrow \mathbb{R}^n$ di F in p ponendo $dF_p(v) = (F \circ \sigma)'(0)$, dove $\sigma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ è una qualsiasi curva in S con $\sigma(0) = p$ e $\sigma'(0) = v$; non è difficile (esercizio) verificare che $dF_p(v)$ dipende solo da v e non dalla curva σ , e che è un'applicazione lineare. In particolare, se $f \in C^\infty(S)$ e $v \in T_p S$ allora abbiamo

$$df_p(v) = (f \circ \sigma)'(0) = v(\mathbf{f}),$$

dove $\mathbf{f}$ è il germe di f in p , formula che mostra come l'azione del differenziale delle funzioni sui vettori tangenti sia duale all'azione dei vettori tangenti sulle funzioni.

Vediamo ora come si esprime il differenziale in coordinate locali. Data un'applicazione differenziabile $F: S_1 \rightarrow S_2$ fra superfici, scegliamo $\varphi: U \rightarrow S_1$ una parametrizzazione locale centrata in $p \in S_1$, e una parametrizzazione locale $\hat{\varphi}: \hat{U} \rightarrow S_2$ centrata in $F(p) \in S_2$ tali che $F(\varphi(U)) \subseteq \hat{\varphi}(\hat{U})$; in particolare, possiamo esprimere F in coordinate locali tramite la $\hat{F} = (\hat{F}^1, \hat{F}^2) = \hat{\varphi}^{-1} \circ F \circ \varphi$. Vogliamo la matrice che rappresenta dF_p rispetto alle basi $\{\partial_1, \partial_2\}$ di $T_p S_1$ e $\{\hat{\partial}_1, \hat{\partial}_2\}$ di $T_{F(p)} S_2$, matrice che contiene per colonne le coordinate rispetto alla base di arrivo dei trasformati tramite dF_p dei vettori della base di partenza. Possiamo procedere in due modi: o usando le curve, o usando le derivazioni. Una curva in S_1 tangente a ∂_j in p è $\sigma_j(t) = \varphi(te_j)$, per cui

$$dF_p(\partial_j) = (F \circ \sigma_j)'(0) = \left. \frac{d}{dt} (\hat{\varphi} \circ \hat{F}(te_j)) \right|_{t=0} = \frac{\partial \hat{F}^1}{\partial x^j}(0) \hat{\partial}_1 + \frac{\partial \hat{F}^2}{\partial x^j}(0) \hat{\partial}_2.$$

Quindi la matrice che rappresenta dF_p rispetto alle basi indotte dalle due parametrizzazioni locali è esattamente la matrice jacobiana dell'espressione $\hat{F}$ di F in coordinate locali.

Vediamo di riottenere lo stesso risultato usando le derivazioni. Vogliamo scrivere $dF_p(\partial_j) = a_j^1 \hat{\partial}_1 + a_j^2 \hat{\partial}_2$. Ponendo $\hat{\varphi}^{-1} = (\hat{x}^1, \hat{x}^2)$, si vede subito che

$$\hat{\partial}_h(\hat{\mathbf{x}}^k) = \delta_h^k = \begin{cases} 1 & \text{se } h = k, \\ 0 & \text{se } h \neq k, \end{cases}$$

dove $\hat{\mathbf{x}}^k$ è il germe in p della funzione $\hat{x}^k$. Quindi

$$a_j^i = dF_p(\partial_j)(\hat{\mathbf{x}}^i) = \partial_j(F^*\hat{\mathbf{x}}^i) = \frac{\partial(\hat{x}^i \circ F \circ \varphi)}{\partial x^j}(O) = \frac{\partial \hat{F}^i}{\partial x^j}(0),$$

coerentemente con quanto visto prima.

Osservazione 2.3.13. Attenzione: la matrice che rappresenta il differenziale di un'applicazione fra superfici è una matrice 2×2 , e non una matrice 3×3 o 3×2 o 2×3 , in quanto i piani tangenti hanno dimensione 2.

Il fatto che il differenziale di un'applicazione fra superfici sia rappresentato dalla matrice jacobiana dell'espressione dell'applicazione in coordinate locali permette di trasferire facilmente alle superfici risultati classici dell'analisi in $\mathbb{R}^n$ quali il teorema della funzione inversa:

Corollario 2.3.8: Sia $F: S_1 \rightarrow S_2$ un'applicazione differenziabile fra superfici. Sia $p \in S_1$ un punto tale che $dF_p: T_p S_1 \rightarrow T_{F(p)} S_2$ sia un isomorfismo. Allora esistono un intorno $V \subseteq S_1$ di p e un intorno $\hat{V} \subseteq S_2$ di $F(p)$ tali che $F|_V: V \rightarrow \hat{V}$ sia un diffeomorfismo.

Dimostrazione: Sia $\varphi: U \rightarrow S_1$ una qualsiasi parametrizzazione locale in p , e $\hat{\varphi}: \hat{U} \rightarrow S_2$ una qualsiasi carta in $F(p)$ con $F(\varphi(U)) \subseteq \hat{\varphi}(\hat{U})$. Allora la tesi segue (perché?) dal classico teorema della funzione inversa Teorema 1.3.1 applicato a $\hat{\varphi}^{-1} \circ F \circ \varphi$. $\square$

Concludiamo questo paragrafo con un'ultima caratterizzazione del piano tangente, questa volta puramente algebrica:

Esercizio 2.3.4. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie, e $p \in S$. Posto $\mathfrak{m} = \{\mathbf{f} \in C^\infty(p) \mid \mathbf{f}(p) = 0\}$, dimostra che $\mathfrak{m}$ è l'unico ideale massimale di $C^\infty(p)$, e che $T_p S$ è canonicamente isomorfo al duale (come spazio vettoriale) di $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$.

2.4 Orientabilità

Un concetto importante in teoria delle superfici è quello di orientabilità. In parole povere, una superficie è orientabile se ha due “facce”, una interna e una esterna, mentre non è orientabile se ha una faccia sola, come il nastro di Möbius (vedi l'Esempio 2.4.3).

Ci sono (almeno) due modi per definire precisamente il concetto di orientabilità: uno intrinseco, e l'altro legato all'immersione della superficie in $\mathbb{R}^3$. Cominciamo col primo.

Definizione 2.4.1: Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie. Diremo che due parametrizzazioni locali $\varphi_\alpha: U_\alpha \rightarrow S$ e $\varphi_\beta: U_\beta \rightarrow S$ determinano la stessa orientazione (o sono equiorientate) se $\det \text{Jac}(\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha) > 0$ ove definito, cioè su $\varphi_\alpha^{-1}(\varphi_\alpha(U_\alpha) \cap \varphi_\beta(U_\beta))$. Se invece $\det \text{Jac}(\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha) < 0$ su $\varphi_\alpha^{-1}(\varphi_\alpha(U_\alpha) \cap \varphi_\beta(U_\beta)) \neq \emptyset$, diremo che le due parametrizzazioni locali determinano l'orientazione opposta. La superficie S è detta orientabile se esiste un atlante $\mathcal{A} = \{\varphi_\alpha\}$ di S composto da carte a due a due equiorientate (e diremo che l'atlante è orientato). Se fissiamo un tale atlante $\mathcal{A}$ diremo che la superficie S è orientata da $\mathcal{A}$.

Quando abbiamo una parametrizzazione locale in $p \in S$, possiamo orientare il piano tangente a S in p dicendo che la base $\{\partial_1, \partial_2\}$ associata alla parametrizzazione determina l'orientazione positiva del piano. Quindi la definizione ci dice che S è orientabile se e solo se possiamo orientare contemporaneamente tutti i piani tangenti a S in maniera coerente.

ESEMPIO 2.4.1. Una superficie che possiede un atlante costituito da una sola parametrizzazione locale è chiaramente orientabile. Per esempio, i grafici sono tutti orientabili.

ESEMPIO 2.4.2. Se una superficie ha un atlante costituito da due parametrizzazioni locali le cui immagini abbiano intersezione connessa, allora è orientabile. Infatti il determinante dello jacobiano del cambiamento di coordinate deve avere (perché?) segno costante sull'intersezione, e quindi a meno di scambiare le coordinate nel dominio di una parametrizzazione (operazione che cambia il segno del determinante dello jacobiano del cambiamento di coordinate), possiamo sempre fare in modo che le due parametrizzazioni determinino la stessa orientazione. Per esempio, quindi, la sfera è orientabile.

Osservazione 2.4.1. L'orientabilità è una proprietà *globale* di una superficie: non possiamo verificarla controllando solo cosa succede su una parametrizzazione locale alla volta. L'immagine di una singola parametrizzazione locale è sempre orientabile; i problemi possono nascere da come si collegano fra di loro le varie parametrizzazioni locali.

Per dare la seconda caratterizzazione delle superfici orientabili ci serve una nuova definizione.

Definizione 2.4.2: Un *campo di vettori normali* su una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ è un'applicazione $N: S \rightarrow \mathbb{R}^3$ di classe C^∞ tale che $N(p)$ sia ortogonale a $T_p S$ per ogni $p \in S$. Se inoltre $\|N\| \equiv 1$ parleremo di *campo di versori normali* a S .

In un certo senso, un campo di versori normali indica su tutta la superficie qual è la faccia esterna: quella nella direzione del versore normale. Infatti:

Proposizione 2.4.1: Una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ è orientabile se e solo se esiste un campo di versori normali su S .

Dimostrazione: Cominciamo con qualche osservazione generale. Sia $\varphi_\alpha: U_\alpha \rightarrow S$ una parametrizzazione locale di S , e per ogni $p \in \varphi_\alpha(U_\alpha)$ poniamo

$$N_\alpha(p) = \frac{\partial_{1,\alpha} \wedge \partial_{2,\alpha}}{\|\partial_{1,\alpha} \wedge \partial_{2,\alpha}\|}(p),$$

dove $\partial_{j,\alpha} = \partial\varphi_\alpha/\partial x^j$ come al solito, e $\wedge$ è il prodotto vettore di $\mathbb{R}^3$. Siccome $\{\partial_{1,\alpha}, \partial_{2,\alpha}\}$ è una base di $T_p S$ il versore N_α è ben definito, non nullo e ortogonale a $T_p S$; inoltre dipende chiaramente in modo C^∞ da p .

Sia ora $\varphi_\beta: U_\beta \rightarrow S$ un'altra parametrizzazione locale con $\varphi_\alpha(U_\alpha) \cap \varphi_\beta(U_\beta) \neq \emptyset$. Abbiamo visto che

$$\partial_{j,\alpha} = \frac{\partial x_\beta^1}{\partial x_\alpha^j} \partial_{1,\beta} + \frac{\partial x_\beta^2}{\partial x_\alpha^j} \partial_{2,\beta},$$

dove abbiamo scritto come al solito $\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha = (x_\beta^1, x_\beta^2)$, per cui

$$\partial_{1,\alpha} \wedge \partial_{2,\alpha} = \det \text{Jac}(\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha) \partial_{1,\beta} \wedge \partial_{2,\beta}, \quad (2.4.1)$$

e quindi

$$\frac{\partial_{1,\alpha} \wedge \partial_{2,\alpha}}{\|\partial_{1,\alpha} \wedge \partial_{2,\alpha}\|} = \text{sgn}(\det \text{Jac}(\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha)) \frac{\partial_{1,\beta} \wedge \partial_{2,\beta}}{\|\partial_{1,\beta} \wedge \partial_{2,\beta}\|}. \quad (2.4.2)$$

Supponiamo ora S orientabile, e sia $\mathcal{A} = \{\varphi_\alpha\}$ un atlante orientato. Se $p \in \varphi_\alpha(U_\alpha) \cap \varphi_\beta(U_\beta)$, la (2.4.2) ci dice che $N_\alpha(p) = N_\beta(p)$; quindi l'applicazione $p \mapsto N_\alpha(p)$ non dipende dalla particolare parametrizzazione locale scelta, e definisce un campo di versori normali su S .

Viceversa, sia $N: S \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo di versori normali su S , e sia $\mathcal{A} = \{\varphi_\alpha\}$ un qualsiasi atlante di S tale che il dominio U_α di ciascun φ_α sia connesso. Ora, per definizione di prodotto vettore abbiamo

$$\left(N, \frac{\partial_{1,\alpha} \wedge \partial_{2,\alpha}}{\|\partial_{1,\alpha} \wedge \partial_{2,\alpha}\|} \right) \equiv \pm 1$$

su ciascun U_α ; essendo U_α connesso, a meno di modificare φ_α scambiando le coordinate in U_α , possiamo supporre che il prodotto scalare sia identicamente 1. Ma allora

$$\frac{\partial_{1,\alpha} \wedge \partial_{2,\alpha}}{\|\partial_{1,\alpha} \wedge \partial_{2,\alpha}\|} \equiv N$$

su ciascun U_α , e (2.4.2) implica che l'atlante è orientato. □

Definizione 2.4.3: Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie orientata da un atlante $\mathcal{A}$. Diremo che un campo di versori normali N *determina l'orientazione data* se $N = \partial_1 \wedge \partial_2 / \|\partial_1 \wedge \partial_2\|$ per ogni parametrizzazione locale $\varphi \in \mathcal{A}$.

Una conseguenza della proposizione precedente è che se S è una superficie orientata esiste sempre (perché?) un *unico* campo di versori normale che determina l'orientazione data.

Definizione 2.4.4: Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie orientata, e $N: S \rightarrow S^2$ un campo di versori normali che determina l'orientazione data. Se $p \in S$, diremo che una base $\{v_1, v_2\}$ di $T_p S$ è *positiva* (rispettivamente, *negativa*) se la base $\{v_1, v_2, N(p)\}$ di $\mathbb{R}^3$ ha la stessa orientazione (rispettivamente, l'orientazione opposta) della base canonica di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 2.4.1. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie orientata da un atlante $\mathcal{A} = \{\varphi_\alpha\}$. Presi $p \in S$ e una base $\{v_1, v_2\}$ di $T_p S$, dimostra che $\{v_1, v_2\}$ è una base positiva di $T_p S$ se e solo se determina su $T_p S$ la stessa orientazione della base $\{\partial_{1,\alpha}|_p, \partial_{2,\alpha}|_p\}$ per ogni $\varphi_\alpha \in \mathcal{A}$ tale che p appartenga all'immagine di φ_α .

Definizione 2.4.5: Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie orientata da un atlante $\mathcal{A}$. Allora l'atlante $\mathcal{A}^-$ ottenuto scambiando le coordinate in tutte le parametrizzazioni di $\mathcal{A}$, cioè $\varphi \in \mathcal{A}^-$ se e solo se $\varphi \circ \chi \in \mathcal{A}$ dove $\chi(x, y) = (y, x)$, è detto *opposto* di $\mathcal{A}$.

Esercizio 2.4.2. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie orientata da un atlante $\mathcal{A}$. Dimostra che anche $\mathcal{A}^-$ è orientato, ma che le parametrizzazioni locali di $\mathcal{A}^-$ determinano tutte l'orientazione opposta rispetto alle carte di $\mathcal{A}$.

Una domanda naturale che ci si potrebbe porre è la seguente: quante orientazioni esistono su una superficie connessa orientabile? Supponiamo di avere un atlante orientato $\mathcal{A}$; allora anche l'atlante opposto $\mathcal{A}^-$ è orientato. Quindi se c'è un'orientazione ne esiste sicuramente una seconda. Ora, se esistesse una terza orientazione dovrebbero esistere parametrizzazioni locali equiorientate ad alcune parametrizzazioni locali di $\mathcal{A}$ ma non a tutte; e invece questo non è possibile.

Corollario 2.4.2: Sia S una superficie orientata da un atlante $\mathcal{A}$, e sia $\varphi: U \rightarrow S$ un'altra parametrizzazione locale, con U connesso. Allora φ è equiorientata con tutte le parametrizzazioni locali di $\mathcal{A}$, oppure lo è con tutte le parametrizzazioni locali di $\mathcal{A}^-$.

Dimostrazione: Sia N il campo di versori normali che determina l'orientazione data, e $\{\partial_1, \partial_2\}$ la base associata a φ . Esattamente come nella dimostrazione della Proposizione 2.4.1 otteniamo che

$$\frac{\partial_1 \wedge \partial_2}{\|\partial_1 \wedge \partial_2\|} \equiv \pm N$$

su $\varphi(U)$, dove il segno è costante perché U è connesso. Quindi (2.4.2) implica che se il segno è positivo allora φ determina la stessa orientazione di tutti gli elementi di $\mathcal{A}$, mentre se il segno è negativo determina l'orientazione opposta. $\square$

In particolare, quindi, una superficie connessa o non ammette orientazioni o ne ammette esattamente due.

Esercizio 2.4.3. Dimostra il Corollario 2.4.2 usando la definizione originale di superficie orientabile. (*Suggerimento:* può essere sapere che ogni aperto connesso di una superficie è anche connesso per archi, fatto che si dimostra come per gli aperti del piano.)

ESEMPIO 2.4.3. *Il nastro di Möbius.* Sia C la circonferenza nel piano xy di centro l'origine e raggio 2, e ℓ_0 il segmento nel piano yz dato da $y = 2$ e $|z| < 1$, di centro il punto $c = (0, 2, 0)$. Indichiamo con ℓ_θ il segmento ottenuto ruotando c lungo C di un angolo θ e contemporaneamente ruotando ℓ_0 intorno a c di un angolo $\theta/2$. L'unione $S = \bigcup_{\theta \in [0, 2\pi]} \ell_\theta$ è detto *nastro di Möbius*; vogliamo dimostrare che è una superficie non orientabile. Posto $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < u < 2\pi, -1 < v < 1\}$, definiamo $\varphi, \hat{\varphi}: U \rightarrow S$ con

$$\begin{aligned} \varphi(u, v) &= \left(\left(2 - v \sin \frac{u}{2} \right) \sin u, \left(2 - v \sin \frac{u}{2} \right) \cos u, v \cos \frac{u}{2} \right), \\ \hat{\varphi}(u, v) &= \left(\left(2 - v \sin \left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right) \cos u, - \left(2 - v \sin \left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right) \sin u, v \cos \left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right). \end{aligned}$$

Si verifica facilmente (esercizio) che $\{\varphi, \hat{\varphi}\}$ è un atlante per S , costituito da due carte la cui intersezione *non* è connessa: infatti $\varphi(U) \cap \hat{\varphi}(U) = \varphi(W_1) \cup \varphi(W_2)$, con

$$W_1 = \{(u, v) \in U \mid \pi/2 < u < 2\pi\} \quad \text{e} \quad W_2 = \{(u, v) \in U \mid 0 < u < \pi/2\}.$$

Ora, se $(u, v) \in W_1$ si ha $\varphi(u, v) = \hat{\varphi}(u - \pi/2, v)$, mentre se $(u, v) \in W_2$ si ha $\varphi(u, v) = \hat{\varphi}(u + 3\pi/2, -v)$; quindi

$$\hat{\varphi}^{-1} \circ \varphi(u, v) = \begin{cases} (u - \pi/2, v) & \text{se } (u, v) \in W_1, \\ (u + 3\pi/2, -v) & \text{se } (u, v) \in W_2. \end{cases}$$

In particolare,

$$\det \text{Jac}(\hat{\varphi}^{-1} \circ \varphi) \equiv \begin{cases} +1 & \text{su } W_1, \\ -1 & \text{su } W_2. \end{cases}$$

Ora, supponiamo per assurdo che S sia orientabile, e sia N un campo di versori normali su S . A meno di cambiare segno a N possiamo supporre che N sia dato da $\partial_u \wedge \partial_v / \|\partial_u \wedge \partial_v\|$ su $\varphi(U)$, dove $\partial_u = \partial\varphi/\partial u$ e $\partial_v = \partial\varphi/\partial v$. D'altra parte, si deve avere $N = \pm \hat{\partial}_u \wedge \hat{\partial}_v / \|\hat{\partial}_u \wedge \hat{\partial}_v\|$ su $\hat{\varphi}(U)$, dove $\hat{\partial}_u = \partial\hat{\varphi}/\partial u$ e $\hat{\partial}_v = \partial\hat{\varphi}/\partial v$, con segno costante in quanto U è connesso. Ma la (2.4.2) applicata su W_1 ci dice che il segno dovrebbe essere $+1$, mentre applicata su W_2 ci dice che il segno dovrebbe essere -1 , contraddizione.

Una vasta famiglia di superfici orientabili è fornita dal seguente

Corollario 2.4.3: *Sia $a \in \mathbb{R}$ un valore regolare per una funzione $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^∞ , dove $U \subseteq \mathbb{R}^3$ è un aperto. Allora la superficie $S = f^{-1}(a)$ è orientabile.*

Dimostrazione: Grazie al Lemma 2.3.6 ponendo $N = \text{grad} f / \|\text{grad} f\|$ otteniamo un campo di versori normali su S . $\square$

Concludiamo il capitolo citando il seguente viceversa del corollario precedente, che non dimostreremo:

Teorema 2.4.4: *Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie orientabile, e $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un aperto contenente S tale che S è chiusa in Ω . Allora esiste una funzione $f \in C^\infty(\Omega)$ e un valore regolare $a \in \mathbb{R}$ di f tali che $S = f^{-1}(a)$.*

Capitolo 3

La geometria della mappa di Gauss

3.1 La prima forma fondamentale

Lo spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ ci giunge fornito del prodotto scalare canonico, che indicheremo con $(\cdot, \cdot)$. Se $S \subset \mathbb{R}^3$ è una superficie e $p \in S$, il piano tangente $T_p S$ può essere visto come sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$, e quindi possiamo calcolare il prodotto scalare canonico di due vettori tangenti a S in p .

Definizione 3.1.1: Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie. Per ogni $p \in S$ indicheremo con $(\cdot, \cdot)_p$ il prodotto scalare definito positivo su $T_p S$ indotto dal prodotto scalare canonico. La *prima forma fondamentale* $I_p: T_p S \rightarrow \mathbb{R}$ è la forma quadratica associata a questo prodotto scalare:

$$\forall v \in T_p S \quad I_p(v) = (v, v)_p \geq 0.$$

Osservazione 3.1.1. Conoscere la prima forma fondamentale I_p è equivalente a conoscere il prodotto scalare $(\cdot, \cdot)_p$: infatti

$$(v, w)_p = \frac{1}{2} [I_p(v + w) - I_p(v) - I_p(w)] = \frac{1}{4} [I_p(v + w) - I_p(v - w)].$$

Sia $\varphi: U \rightarrow S$ una parametrizzazione locale in $p \in S$, e $\{\partial_1, \partial_2\}$ la corrispondente base locale di $T_p S$. Prendiamo due vettori tangenti $v = v^1 \partial_1 + v^2 \partial_2$, $w = w^1 \partial_1 + w^2 \partial_2 \in T_p S$; allora

$$(v, w)_p = v^1 w^1 (\partial_1, \partial_1)_p + [v^1 w^2 + v^2 w^1] (\partial_1, \partial_2)_p + v^2 w^2 (\partial_2, \partial_2)_p.$$

Definizione 3.1.2: Sia $\varphi: U \rightarrow S$ una parametrizzazione locale di una superficie S . I *coefficienti metrici* di S rispetto a φ sono le tre funzioni $E, F, G: U \rightarrow \mathbb{R}$ date da

$$E(x) = (\partial_1, \partial_1)_{\varphi(x)}, \quad F(x) = (\partial_1, \partial_2)_{\varphi(x)}, \quad G(x) = (\partial_2, \partial_2)_{\varphi(x)},$$

per ogni $x \in U$.

Chiaramente, i coefficienti metrici sono (perché?) funzioni di classe C^∞ su U che determinano completamente la prima forma fondamentale:

$$I_p(v^1 \partial_1 + v^2 \partial_2) = E(x)(v^1)^2 + 2F(x)v^1 v^2 + G(x)(v^2)^2$$

per ogni $p = \varphi(x) \in \varphi(U)$ e $v^1 \partial_1 + v^2 \partial_2 \in T_p S$.

Osservazione 3.1.2. La notazione E, F e G , che useremo sistematicamente, è stata introdotta da Gauss ai primi dell'Ottocento. In notazione più moderna si scrive $E = g_{11}$, $F = g_{12} = g_{21}$ e $G = g_{22}$, in modo da avere

$$(v, w)_p = \sum_{h,k=1}^2 g_{hk}(p) v^h w^k.$$

Osservazione 3.1.3. Noi abbiamo introdotto E, F e G come funzioni definite su U . A volte però sarà comodo considerarle come funzioni definite su $\varphi(U)$, ovvero sostituirle con $E \circ \varphi^{-1}$, $F \circ \varphi^{-1}$ e $G \circ \varphi^{-1}$ rispettivamente. Se ci fai caso, abbiamo operato questa sostituzione proprio nell'ultima formula qui sopra.

Osservazione 3.1.4. Attenzione: i coefficienti metrici dipendono fortemente dalla parametrizzazione locale scelta! L'Esempio 3.1.3 mostra quanto possano cambiare, anche in un caso molto semplice, scegliendo una diversa parametrizzazione locale.

ESEMPIO 3.1.1. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ il piano passante per $p_0 \in \mathbb{R}^3$ e parallelo ai vettori linearmente indipendenti $a, b \in \mathbb{R}^3$. Una parametrizzazione locale di S è la $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ data da $\varphi(x^1, x^2) = p_0 + x^1 a + x^2 b$. Allora $\partial_1 \equiv a$, $\partial_2 \equiv b$, e i coefficienti metrici del piano rispetto a φ sono dati da $E \equiv \|a\|^2$, $F \equiv (a, b)$ e $G \equiv \|b\|^2$. In particolare, se a e b sono versori ortonormali troviamo $E \equiv G \equiv 1$ ed $F \equiv 0$.

ESEMPIO 3.1.2. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ il cilindro circolare retto di raggio 1 centrato sull'asse z . Una parametrizzazione locale è la $\varphi: (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ data da $\varphi(x^1, x^2) = (\cos x^1, \sin x^1, x^2)$. Rispetto a questa parametrizzazione otteniamo $\partial_1 = (-\sin x^1, \cos x^1, 0)$ e $\partial_2 = (0, 0, 1)$, per cui $E \equiv G \equiv 1$ mentre $F \equiv 0$.

ESEMPIO 3.1.3. Usando la parametrizzazione $\varphi(x, y) = (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$ della sfera unitaria S^2 descritta nell'Esempio 2.1.2 otteniamo $\partial_1 = (1, 0, -x(1 - x^2 - y^2)^{-1/2})$ e $\partial_2 = (0, 1, -y(1 - x^2 - y^2)^{-1/2})$, per cui

$$E = \frac{1 - y^2}{1 - x^2 - y^2}, \quad F = \frac{xy}{1 - x^2 - y^2}, \quad G = \frac{1 - x^2}{1 - x^2 - y^2}.$$

Invece, usando la parametrizzazione $\psi(\theta, \phi) = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$ dell'Esempio 2.1.3 otteniamo $\partial_1 = (\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, -\sin \theta)$ e $\partial_2 = (-\sin \theta \sin \phi, \sin \theta \cos \phi, 0)$, per cui

$$E \equiv 1, \quad F \equiv 0, \quad G = \sin^2 \theta.$$

ESEMPIO 3.1.4. Un *elicoide* è una superficie S parametrizzata globalmente da una $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ della forma

$$\varphi(x^1, x^2) = (x^2 \cos x^1, x^2 \sin x^1, ax^1)$$

per qualche $a \in \mathbb{R}^*$. Allora $\partial_1 = (-x^2 \sin x^1, x^2 \cos x^1, a)$ e $\partial_2 = (\cos x^1, \sin x^1, 0)$, per cui

$$E = (x^2)^2 + a^2, \quad F \equiv 0, \quad G \equiv 1.$$

ESEMPIO 3.1.5. Dato $a > 0$, sia $\sigma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ la curva contenuta nel piano xz data da

$$\sigma(t) = (a \cosh t, 0, at);$$

questa curva è spesso chiamata *catenaria*. Una *catenoide* è la superficie di rotazione (vedi l'Esempio 2.1.4) di una catenaria, per cui può avere come parametrizzazione locale la $\tilde{\varphi}: \mathbb{R} \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$ data da

$$\tilde{\varphi}(u, v) = (a \cosh u \cos v, a \cosh u \sin v, au).$$

Quindi $\partial_1 = (a \sinh u \cos v, a \sinh u \sin v, a)$ e $\partial_2 = (-a \cosh u \sin v, a \cosh u \cos v, 0)$, per cui

$$E = a^2 \cosh^2 u, \quad F \equiv 0, \quad G = a^2 \cosh^2 u.$$

ESEMPIO 3.1.6. Più in generale, sia $\varphi: I \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$ data da

$$\varphi(t, \theta) = (\alpha(t) \cos \theta, \alpha(t) \sin \theta, \beta(t))$$

una parametrizzazione locale di una superficie di rotazione ottenuta come descritto nell'Esempio 2.1.4. Allora $\partial_1 = (\alpha'(t) \cos \theta, \alpha'(t) \sin \theta, \beta'(t))$ e $\partial_2 = (-\alpha(t) \sin \theta, \alpha(t) \cos \theta, 0)$, per cui

$$E = (\alpha')^2 + (\beta')^2, \quad F \equiv 0, \quad G = \alpha^2.$$

La prima forma fondamentale permette di misurare la lunghezza di curve sulla superficie. Infatti, se $\sigma: [a, b] \rightarrow S$ è una curva la cui immagine è contenuta nella superficie S allora

$$L(\sigma) = \int_a^b \sqrt{I_{\sigma(t)}(\sigma'(t))} dt.$$

Viceversa, se sappiamo misurare le lunghezze di curve sulla superficie S possiamo recuperare la prima forma fondamentale in questo modo: dati $p \in S$ e $v \in T_p S$ sia $\sigma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ una curva con $\sigma(0) = p$ e $\sigma'(0) = v$, e poniamo $\ell(t) = L(\sigma|_{[0,t]})$. Allora

$$I_p(v) = \left[\frac{d\ell}{dt}(0) \right]^2.$$

Quindi, in un certo senso la prima forma fondamentale è legata alle proprietà metriche intrinseche della superficie, non dipendenti dal modo in cui è immersa in $\mathbb{R}^3$: un diffeomorfismo che conserva le lunghezze delle curve conserva anche la prima forma fondamentale. Per questo motivo le proprietà della superficie che dipendono solo dalla prima forma fondamentale sono dette *proprietà intrinseche* della superficie.

Le applicazioni fra superfici che conservano la prima forma fondamentale meritano un nome speciale:

Definizione 3.1.3: Sia $H: S_1 \rightarrow S_2$ un'applicazione C^∞ fra due superfici. Diremo che H è un'*isometria* in $p \in S_1$ se per ogni $v \in T_p S_1$ si ha

$$I_{H(p)}(dH_p(v)) = I_p(v);$$

ovviamente questo implica che

$$(dH_p(v), dH_p(w))_{H(p)} = (v, w)_p$$

per ogni $v, w \in T_p S_1$. Se H è un'*isometria* in p , il differenziale di H in p è invertibile, e quindi H è un diffeomorfismo di un intorno di p con un intorno di $H(p)$. Diremo che H è un'*isometria locale* in $p \in S_1$ se p ha un intorno U tale che $H|_U$ sia un'*isometria* in ogni punto di U ; che è un'*isometria locale* se lo è in ogni punto di S_1 . Infine, diremo che H è un'*isometria* se è un diffeomorfismo globale e un'*isometria* in ogni punto di S_1 .

ESEMPIO 3.1.7. Indichiamo con $S_1 \subset \mathbb{R}^3$ il piano $z = 0$, con $S_2 \subset \mathbb{R}^3$ il cilindro di equazione $x^2 + y^2 = 1$, e sia $H: S_1 \rightarrow S_2$ l'applicazione data da $H(x, y, 0) = (\cos x, \sin x, y)$. Il piano tangente a S_1 in un qualsiasi suo punto è S_1 stesso, e si ha

$$dH_p(v) = v^1 \frac{\partial H}{\partial x}(p) + v^2 \frac{\partial H}{\partial y}(p) = (-v^1 \sin x, v^1 \cos x, v^2)$$

per ogni $p = (x, y, 0) \in S_1$ e $v = (v^1, v^2, 0) \in T_p S_1$. Quindi

$$I_{H(p)}(dH_p(v)) = \|dH_p(v)\|^2 = (v^1)^2 + (v^2)^2 = \|v\|^2 = I_p(v),$$

per cui H è un'*isometria locale*. D'altra parte, H non è un'*isometria*, in quanto non è iniettiva.

Definizione 3.1.4: Diremo che la superficie S_1 è *localmente isometrica* alla superficie S_2 se per ogni $p \in S_1$ esiste un'*isometria* di un intorno di p in S_1 con un aperto di S_2 .

Dal punto di vista della geometria intrinseca possiamo quindi identificare due superfici isometriche. Inoltre, la prima forma fondamentale permette di identificare superfici localmente isometriche:

Proposizione 3.1.1: Siano $S, \tilde{S} \subset \mathbb{R}^3$ due superfici. Allora S è *localmente isometrica* a $\tilde{S}$ se e solo se per ogni punto $p \in S$ esistono un punto $\tilde{p} \in \tilde{S}$, un aperto $U \subseteq \mathbb{R}^2$, una parametrizzazione locale $\varphi: U \rightarrow S$ di S centrata in p , e una parametrizzazione locale $\tilde{\varphi}: U \rightarrow \tilde{S}$ di $\tilde{S}$ centrata in $\tilde{p}$ tali che $E \equiv \tilde{E}$, $F \equiv \tilde{F}$ e $G \equiv \tilde{G}$.

Dimostrazione: Supponiamo che S sia localmente isometrica a $\tilde{S}$. Allora dato $p \in S$ possiamo trovare un intorno V di p e un'*isometria* $H: V \rightarrow H(V) \subseteq \tilde{S}$. Sia $\varphi: U \rightarrow S$ una parametrizzazione locale centrata in p e tale che $\varphi(U) \subset V$; allora $\tilde{\varphi} = H \circ \varphi$ è una parametrizzazione locale di $\tilde{S}$ centrata in $\tilde{p} = H(p)$ che ha le proprietà richieste (verificare, prego).

Viceversa, supponiamo di avere le due parametrizzazioni φ e $\tilde{\varphi}$, e poniamo $H = \tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \rightarrow \tilde{\varphi}(U)$. Chiaramente H è un diffeomorfismo con l'immagine; dobbiamo dimostrare che è un'*isometria*. Prendiamo $q \in \varphi(U)$ e $v \in T_q S_1$, e scriviamo $v = v^1 \partial_1 + v^2 \partial_2$. Per costruzione, $dH_q(\partial_j) = \tilde{\partial}_j$; quindi $dH_q(v) = v^1 \tilde{\partial}_1 + v^2 \tilde{\partial}_2$ e dunque

$$\begin{aligned} I_{H(q)}(dH_q(v)) &= (v^1)^2 \tilde{E}(\tilde{\varphi}^{-1} \circ H(q)) + 2v^1 v^2 \tilde{F}(\tilde{\varphi}^{-1} \circ H(q)) + (v^2)^2 \tilde{G}(\tilde{\varphi}^{-1} \circ H(q)) \\ &= (v^1)^2 E(\varphi^{-1}(q)) + 2v^1 v^2 F(\varphi^{-1}(q)) + (v^2)^2 G(\varphi^{-1}(q)) = I_q(v), \end{aligned}$$

per cui H è un'*isometria*, come voluto. □

ESEMPIO 3.1.8. Un piano e un cilindro circolare retto sono quindi localmente isometrici, grazie alla Proposizione precedente e agli Esempi 3.1.1 e 3.1.2. D'altra parte, non possono essere globalmente isometrici, in quanto non sono neppure omeomorfi (un piano è semplicemente connesso, mentre un cilindro non lo è).

ESEMPIO 3.1.9. Ogni elicoide è localmente isometrico a una catenoidale. Infatti, sia S un elicoide parametrizzato come nell'Esempio 3.1.4, e sia $\tilde{S}$ la catenoidale corrispondente allo stesso valore del parametro $a \in \mathbb{R}^*$, parametrizzata come nell'Esempio 3.1.5. Scelto un punto $p_0 = \varphi(x_0^1, x_0^2) \in S$, sia $\chi: \mathbb{R} \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$ data da $\chi(u, v) = (v - \pi + x_0^1, a \sinh u)$. Chiaramente χ è un diffeomorfismo con l'immagine, per cui $\varphi \circ \chi$ è una parametrizzazione locale in p dell'elicoide. I coefficienti metrici rispetto a questa parametrizzazione sono

$$E = a^2 \cosh^2 u, \quad F \equiv 0, \quad G = a^2 \cosh^2 u,$$

e quindi la Proposizione 3.1.1 ci assicura che l'elicoide è localmente isometrico alla catenoidale. In maniera analoga si dimostra che la catenoidale è localmente isometrica all'elicoide.

Esercizio 3.1.1. Trova due superfici S_1 ed S_2 tali che S_1 sia localmente isometrica ad S_2 senza che S_2 sia localmente isometrica a S_1 .

La prima forma fondamentale permette anche di misurare gli angoli fra i vettori tangenti, e quindi fra curve che si intersecano su una superficie.

Definizione 3.1.5: Siano σ_1 e σ_2 due curve in una superficie S con $\sigma_1(0) = \sigma_2(0) = p$. Diremo *angolo* fra σ_1 e σ_2 in p l'angolo θ fra $\sigma_1'(0)$ e $\sigma_2'(0)$, cioè

$$\cos \theta = \frac{(\sigma_1'(0), \sigma_2'(0))_p}{\sqrt{I_p(\sigma_1'(0))I_p(\sigma_2'(0))}}.$$

Definizione 3.1.6: Data una parametrizzazione locale $\varphi: U \rightarrow S$, le *curve coordinate* di φ sono le curve della forma $t \mapsto \varphi(x_0, t)$ e $t \mapsto \varphi(t, y_0)$, con x_0, y_0 costanti. Diremo che la parametrizzazione è *ortogonale* se le curve coordinate si intersecano ortogonalmente.

Osservazione 3.1.5. I vettori tangenti alle curve coordinate sono ∂_1 e ∂_2 ; quindi il coseno dell'angolo fra due curve coordinate è dato da $F/\sqrt{EG}$, per cui una parametrizzazione locale è ortogonale se e solo se $F \equiv 0$. Vedremo nel prossimo capitolo che parametrizzazioni ortogonali esistono sempre.

3.2 Curvature

L'obiettivo principale di questo capitolo è arrivare a definizioni significative di curvatura di una superficie. Ci sono (almeno) due modi per procedere, uno più geometrico e uno più analitico, che però porteranno allo stesso risultato.

L'approccio geometrico per misurare la curvatura di una superficie è tramite la curvatura delle curve contenute nella superficie: se prendiamo un punto p in una superficie S , un vettore tangente $v \in T_p S$ di lunghezza unitaria e una curva regolare $\sigma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco con $\sigma(0) = p$ e $\sigma'(0) = v$, allora la curvatura di σ può essere una buona misura della curvatura della superficie nel punto nella direzione v . A priori, però, la curvatura di σ in p potrebbe non dipendere solo da v ma anche dalla curva σ scelta, e quindi essere di poco uso per misurare la curvatura di S nella direzione v . Per superare questo problema ci servono un lemma preliminare e alcune definizioni.

Lemma 3.2.1: Sia S una superficie, $p \in S$ e scegliamo un versore $N(p) \in \mathbb{R}^3$ ortogonale a $T_p S$. Dato $v \in T_p S$ di lunghezza unitaria, sia π_v il piano passante per p e parallelo a v e $N(p)$. Allora l'intersezione $\pi_v \cap S$ è, almeno nell'intorno di p , il sostegno di una curva regolare.

Dimostrazione: Il piano π_v ha equazione $(x - p, v \wedge N(p)) = 0$. Quindi se $\varphi: U \rightarrow S$ è una parametrizzazione locale centrata in p , un punto $q \in \varphi(U)$ appartiene a $\pi_v \cap S$ se e solo se $q = \varphi(y)$ con $y \in U$ che soddisfa l'equazione $f(y) = 0$, dove

$$f(y) = (\varphi(y) - p, v \wedge N(p)).$$

Se dimostriamo che $C = \{y \in U \mid f(y) = 0\}$ è il sostegno di una curva regolare σ vicino a 0 abbiamo finito, in quanto $\pi_v \cap \varphi(U) = \varphi(C)$ è allora il sostegno della curva regolare $\varphi \circ \sigma$ vicino a p .

Ora,

$$\frac{\partial f}{\partial y^i}(0) = (\partial_i|_p, v \wedge N(p));$$

quindi se 0 fosse un punto critico di f , il vettore $v \wedge N(p)$ dovrebbe essere ortogonale sia a $\partial_1|_p$ che a $\partial_2|_p$; quindi sarebbe ortogonale a $T_p S$, cioè parallelo a $N(p)$, mentre non lo è. Quindi la Proposizione 1.1.3 ci assicura che C è un grafico nell'intorno di 0, e ci siamo. $\square$

Definizione 3.2.1: Sia S una superficie. Dato $p \in S$, scegliamo un versore $N(p) \in \mathbb{R}^3$ ortogonale a $T_p S$. Preso $v \in T_p S$ di lunghezza unitaria, sia π_v il piano passante per p e parallelo a v e $N(p)$. La curva regolare parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco di sostegno l'intersezione $\pi_v \cap S$ nell'intorno di p è detta *sezione normale* di S in p lungo v . Siccome $\text{Span}\{v, N(p)\} \cap T_p S = \mathbb{R}v$, il versore tangente della sezione normale in p dev'essere $\pm v$; orienteremo quindi la curva sezione normale in modo che il suo versore tangente sia proprio v .

La sezione normale rappresenta ragionevolmente bene il comportamento di S nella direzione di v ; quindi la seguente definizione è geometricamente sensata.

Definizione 3.2.2: Sia S una superficie, $p \in S$ e sia $N(p) \in \mathbb{R}^3$ un versore ortogonale a $T_p S$. Dato $v \in T_p S$ di lunghezza unitaria, orientiamo π_v scegliendo $\{v, N(p)\}$ come base positiva. Diremo allora *curvatura normale* di S in p lungo v la curvatura orientata (come curva piana contenuta in π_v) in p della curva sezione normale di S in p lungo v .

Osservazione 3.2.1. La curva sezione normale chiaramente non dipende dalla scelta dello specifico versore $N(p)$ ortogonale a $T_p S$. La curvatura normale invece sì: se sostituiamo $-N(p)$ a $N(p)$, la curvatura normale cambia segno (perché?).

Il problema di questa definizione di curvatura è che non è chiaro che struttura abbia l'insieme delle curvature normali in un punto della superficie, ammesso che ne abbia una. Per superare questo problema introduciamo ora il secondo approccio, quello analitico. Ci serve una definizione fondamentale:

Definizione 3.2.3: Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie orientata. La *mappa di Gauss* di S è il campo di versori normali $N: S \rightarrow S^2$ che identifica l'orientazione data.

Osservazione 3.2.2. Anche se per semplicità di esposizione lavoreremo spesso solo con superfici orientate, molto di quanto diremo in questo e nel prossimo paragrafo vale per ogni superficie. Infatti, localmente ogni superficie è orientabile: se $\varphi: U \rightarrow S$ è una parametrizzazione locale in un punto p , allora $N = \partial_1 \wedge \partial_2 / \|\partial_1 \wedge \partial_2\|$ è una mappa di Gauss di $\varphi(U)$. Quindi ogni risultato di natura locale che dimostreremo usando la mappa di Gauss e che non cambia sostituendo $-N$ a N vale in realtà per superfici qualsiasi.

La mappa di Gauss determina univocamente i piani tangenti alla superficie, in quanto $T_p S$ è l'ortogonale di $N(p)$; quindi la variazione di N misura come mutano i piani tangenti, ovvero quanto la superficie dista dall'essere un piano. Quindi la nostra intuizione ci suggerisce che la curvatura di una superficie potrebbe essere legata al differenziale della mappa di Gauss, proprio come la curvatura di una curva era legata alla derivata del versore tangente. Ma vediamo alcuni esempi.

ESEMPIO 3.2.1. Nel piano dell'Esempio 3.1.1 abbiamo $N \equiv a \wedge b / \|a \wedge b\|$ per cui N è costante e $dN \equiv 0$.

Esercizio 3.2.1. Dimostra che se S è una superficie orientata connessa con $dN \equiv 0$ allora S è contenuta in un piano.

ESEMPIO 3.2.2. Sia S il cilindro di equazione $x^2 + y^2 = 1$. Usando la parametrizzazione indicata nell'Esempio 3.1.2 otteniamo $(N \circ \varphi)(x^1, x^2) = (\cos x^1, \sin x^1, 0)$, cioè $N(p) = (p^1, p^2, 0)$. Ora,

$$T_p S = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid v^1 p^1 + v^2 p^2 = 0\};$$

e (essendo N la restrizione di un'applicazione lineare di tutto $\mathbb{R}^3$ in sé) $dN_p(v) = (v^1, v^2, 0)$ per ogni $v \in T_p S$. In particolare, $dN_p(T_p S) \subseteq T_p S$, e come endomorfismo di $T_p S$ il differenziale della mappa di Gauss ha un autovalore nullo e un autovalore uguale a 1. L'autovettore relativo all'autovalore nullo è $(0, 0, 1)$, che è tangente alle direttrici del cilindro, cioè alle direzioni in cui il cilindro non si curva; l'autovettore relativo all'autovalore 1 è invece tangente alle circonferenze orizzontali del cilindro, che hanno proprio curvatura 1.

ESEMPIO 3.2.3. Sia $S = S^2$. Usando una qualsiasi delle parametrizzazioni descritte nell'Esempio 3.1.3 si trova $N(p) = p$: il piano tangente alla sfera in p è ortogonale a p . In particolare, $dN_p = \text{id}$.

ESEMPIO 3.2.4. Sia S un elicoide, parametrizzato come nell'Esempio 3.1.4. Allora

$$(N \circ \varphi)(x^1, x^2) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + (x^2)^2}}(-a \sin x^1, a \cos x^1, -x^2).$$

Sia ora $p = \varphi(x_0, y_0) \in S$, e prendiamo $v = v^1 \partial_1 + v^2 \partial_2 \in T_p S$. Una curva passante per p tangente a v è $\sigma(t) = \varphi(x_0 + tv^1, y_0 + tv^2)$; quindi

$$dN_p(v) = \frac{d(N \circ \sigma)}{dt}(0) = -\frac{a}{(a^2 + y_0^2)^{3/2}} v^2 \partial_1 - \frac{a}{(a^2 + y_0^2)^{1/2}} v^1 \partial_2.$$

In particolare, $dN_p(T_p S) \subseteq T_p S$.

ESEMPIO 3.2.5. Sia S una catenoide, parametrizzata come nell'Esempio 3.1.5. Allora

$$(N \circ \tilde{\varphi})(u, v) = \frac{1}{\cosh u}(\cos v, \sin v, -\sinh u).$$

Sia ora $p = \tilde{\varphi}(u_0, v_0) \in S$, e prendiamo $w = w^1 \partial_1 + w^2 \partial_2 \in T_p S$. Una curva passante per p tangente a w è $\sigma(t) = \tilde{\varphi}(u_0 + tw^1, v_0 + tw^2)$; quindi

$$dN_p(w) = \frac{d(N \circ \sigma)}{dt}(0) = -\frac{w^1}{a \cosh^2 u_0} \partial_1 + \frac{w^2}{a \cosh^2 u_0} \partial_2.$$

In particolare, $dN_p(T_p S) \subseteq T_p S$.

Dunque in tutti gli esempi precedenti il differenziale della mappa di Gauss manda il piano tangente alla superficie in sé. Questo non è un caso. Per definizione, dN_p manda $T_p S$ in $T_{N(p)} S^2$. Ma abbiamo appena notato che il piano tangente alla sfera in un punto è l'ortogonale di quel punto; quindi $T_{N(p)} S^2$ è l'ortogonale di $N(p)$, cioè $T_p S$ stesso. Riassumendo, *possiamo considerare il differenziale della mappa di Gauss in un punto $p \in S$ come un endomorfismo di $T_p S$* . E non è un endomorfismo qualunque:

Proposizione 3.2.2: *Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie orientata con mappa di Gauss $N: S \rightarrow S^2$. Allora dN_p è un endomorfismo di $T_p S$ simmetrico rispetto al prodotto scalare $(\cdot, \cdot)_p$ per ogni $p \in S$.*

Dimostrazione: Fissiamo una parametrizzazione locale φ centrata in p , e sia $\{\partial_1, \partial_2\}$ la base di $T_p S$ indotta da φ . Ci basta (perché?) dimostrare che dN_p è simmetrico sulla base, cioè che

$$(dN_p(\partial_1), \partial_2)_p = (\partial_1, dN_p(\partial_2))_p. \quad (3.2.1)$$

Ora, per definizione $(N \circ \varphi, \partial_2) \equiv 0$. Derivando rispetto a x^1 otteniamo

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial x^1}(N \circ \varphi, \partial_2)(O) = \left(\frac{\partial(N \circ \varphi)}{\partial x^1}(O), \frac{\partial \varphi}{\partial x^2}(O) \right) + \left(N(p), \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^1 \partial x^2}(O) \right) \\ &= (dN_p(\partial_1), \partial_2)_p + \left(N(p), \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^1 \partial x^2}(O) \right). \end{aligned}$$

Analogamente, derivando $(N \circ \varphi, \partial_1) \equiv 0$ rispetto a x^2 otteniamo

$$0 = (dN_p(\partial_2), \partial_1)_p + \left(N(p), \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^1 \partial x^2}(O) \right),$$

e (3.2.1) è dimostrata. □

Abbiamo un prodotto scalare e un'applicazione lineare simmetrica; mescoliamole.

Definizione 3.2.4: Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie orientata, con mappa di Gauss $N: S \rightarrow S^2$. La *seconda forma fondamentale* di S è la forma quadratica $Q_p: T_p S \rightarrow \mathbb{R}$ data da

$$\forall v \in T_p S \quad Q_p(v) = -(dN_p(v), v)_p.$$

Scegliendo l'altra orientazione di S la mappa di Gauss cambia di segno, e quindi anche la seconda forma fondamentale cambia di segno.

Osservazione 3.2.3. Il segno meno nella precedente definizione servirà a rendere vera la (3.2.2).

ESEMPIO 3.2.6. Ovviamente la seconda forma fondamentale di un piano è identicamente nulla.

ESEMPIO 3.2.7. La seconda forma fondamentale di un cilindro orientato con la mappa di Gauss dell'Esempio 3.2.2 è data da $Q_p(v) = -(v^1)^2 - (v^2)^2$.

ESEMPIO 3.2.8. La seconda forma fondamentale della sfera orientata con la mappa di Gauss dell'Esempio 3.2.3 è data da $Q_p = -I_p$.

ESEMPIO 3.2.9. Sia S un elicoide, orientato con la mappa di Gauss dell'Esempio 3.2.4. Allora

$$\begin{aligned} Q_p(v) &= \frac{a}{(a^2 + y_0^2)^{1/2}} \left[\frac{E(x_0, y_0)}{a^2 + y_0^2} v^1 v^2 + F(x_0, y_0) \left((v^1)^2 + \frac{(v^2)^2}{a^2 + y_0^2} \right) + G(x_0, y_0) v^1 v^2 \right] \\ &= \frac{2a}{(a^2 + y_0^2)^{1/2}} v^1 v^2 \end{aligned}$$

per ogni $p = \varphi(x_0, y_0)$ e $v = v^1 \partial_1 + v^2 \partial_2 \in T_p S$.

ESEMPIO 3.2.10. Sia S una catenode, orientata con la mappa di Gauss dell'Esempio 3.2.5. Allora

$$Q_p(w) = \frac{E(u_0, v_0)}{a \cosh^2 u_0} (w^1)^2 - \frac{G(u_0, v_0)}{a \cosh^2 u_0} (w^2)^2 = a(w^1)^2 - a(w^2)^2$$

per ogni $p = \varphi(u_0, v_0)$ e $w = w^1 \partial_1 + w^2 \partial_2 \in T_p S$.

Il punto è che la curvatura normale può venire calcolata usando la seconda forma fondamentale. Sia $\sigma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ una curva parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco con $\sigma(0) = p \in S$ e $\dot{\sigma}(0) = v \in T_p S$. Poniamo $N(s) = N(\sigma(s))$; chiaramente $(\dot{\sigma}(s), N(s)) \equiv 0$. Derivando troviamo

$$(\ddot{\sigma}(s), N(s)) \equiv -(\dot{\sigma}(s), N'(s)).$$

Ma $N'(0) = dN_p(v)$ e $\ddot{\sigma} = \kappa \mathbf{n}$. Quindi

$$Q_p(v) = (\ddot{\sigma}(0), N(p)) = \kappa(0)(\mathbf{n}(0), N(p)), \quad (3.2.2)$$

dove la seconda uguaglianza vale quando σ è regolare, e in tal caso κ è la curvatura di σ , e $\mathbf{n}$ è il versore normale di σ .

Definizione 3.2.5: Sia $\sigma: I \rightarrow S$ una curva parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco contenuta in una superficie orientata S . Diremo *curvatura normale* di σ la funzione $\kappa_n: I \rightarrow \mathbb{R}$ data da

$$\kappa_n = (\ddot{\sigma}, N \circ \sigma) = \kappa(\mathbf{n}, N \circ \sigma),$$

dove la seconda uguaglianza vale quando σ è regolare, e in tal caso $\mathbf{n}$ è il versore normale di σ e κ è la curvatura di σ . La curvatura normale di σ è la lunghezza (con segno) della proiezione del vettore accelerazione $\ddot{\sigma}$ sulla direzione normale alla superficie.

Ora, se σ è la sezione normale di S in p lungo v , il suo versore normale in p è (perché?) esattamente $N(p)$. Ma allora (3.2.2) dice che la curvatura normale di S lungo v è data proprio da $Q_p(v)$, e abbiamo dimostrato la

Proposizione 3.2.3: (Meusnier) Sia S una superficie orientata con mappa di Gauss $N: S \rightarrow S^2$, e $p \in S$. Allora:

- (i) due curve in S che passano per p tangenti alla stessa direzione hanno la stessa curvatura normale in p ;
- (ii) la curvatura normale di S in p lungo un vettore $v \in T_p S$ di lunghezza unitaria è data da $Q_p(v)$.

Vediamo di esaminare meglio le curvature normali usando le proprietà di dN_p . Il fatto cruciale è che dN_p è un endomorfismo simmetrico, e quindi è diagonalizzabile.

Definizione 3.2.6: Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie orientata con mappa di Gauss N , e $p \in S$. Un autovettore di dN_p di lunghezza unitaria sarà detto *direzione principale* di S in p , e il relativo autovalore cambiato di segno sarà chiamato *curvatura principale*.

Se $v \in T_p S$ è una direzione principale con curvatura principale k , abbiamo

$$Q_p(v) = -(dN_p(v), v)_p = -(-kv, v)_p = k,$$

per cui le curvature principali sono curvature normali. In realtà, sono curvature normali piuttosto particolari:

Proposizione 3.2.4: Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie orientata con mappa di Gauss N , e $p \in S$. Allora possiamo trovare direzioni principali $v_1, v_2 \in T_p S$ con relative curvature principali $k_1 \leq k_2$ tali che:

- (i) $\{v_1, v_2\}$ è una base ortonormale di $T_p S$;
- (ii) per ogni $v \in T_p S$ con $I_p(v) = 1$ posto $\cos \theta = (v_1, v)_p$ si ha

$$Q_p(v) = k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta \quad (3.2.3)$$

(formula di Eulero);

- (iii) k_1 è la minima curvatura normale in p , e k_2 è la massima curvatura normale in p . Più precisamente, l'insieme delle possibili curvature normali di S in p è l'intervallo $[k_1, k_2]$, cioè

$$\{Q_p(v) \mid v \in T_p S, I_p(v) = 1\} = [k_1, k_2].$$

Dimostrazione: Siccome dN_p è simmetrico, il Teorema spettrale ci fornisce una base ortonormale di autovettori $\{v_1, v_2\}$ che soddisfa (i).

Preso $v \in T_p S$ di lunghezza unitaria e posto $\cos \theta = (v_1, v)_p$, per cui θ è l'angolo da v_1 a v , possiamo scrivere $v = \cos \theta v_1 + \sin \theta v_2$, e quindi otteniamo

$$Q_p(v) = -(dN_p(v), v)_p = (k_1 \cos \theta v_1 + k_2 \sin \theta v_2, \cos \theta v_1 + \sin \theta v_2)_p = k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta.$$

Infine, se $k_1 = k_2$ allora dN_p è un multiplo dell'identità, per cui tutte le curvature normali sono uguali e la (iii) è ovvia. Invece, se $k_1 < k_2$ la (3.2.3) ci dice che

$$Q_p(v) = k_1 + (k_2 - k_1) \sin^2 \theta;$$

Quindi la curvatura normale assume massimo (rispettivamente, minimo) per $\theta = k\pi + \pi/2$ (rispettivamente, $\theta = k\pi$) cioè per $v = \pm v_2$ (rispettivamente, $v = \pm v_1$), e questo massimo (rispettivamente, minimo) è proprio k_2 (rispettivamente, k_1). Inoltre, al variare di $\theta \in [0, 2\pi]$ la curvatura normale assume tutti i possibili valori fra k_1 e k_2 , e la (iii) è dimostrata. $\square$

Definizione 3.2.7: Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie orientata con mappa di Gauss N , e $p \in S$. La *curvatura Gaussiana* di S in p è data da

$$K(p) = \det(dN_p) = k_1 k_2,$$

mentre la *curvatura media* di S in p è

$$H(p) = -\frac{1}{2} \text{tr}(dN_p) = \frac{k_1 + k_2}{2},$$

dove k_1, k_2 sono le curvature principali di S in p .

Osservazione 3.2.4. Se cambiamo orientazione su S , la mappa di Gauss N cambia di segno, per cui sia le curvature principali che la curvatura media cambiano di segno; invece la curvatura Gaussiana K non varia. Quindi possiamo definire la curvatura Gaussiana anche di superfici non orientabili: se p è un punto di una superficie qualsiasi S , la curvatura Gaussiana di S in p è la curvatura Gaussiana in p dell'immagine di una qualsiasi parametrizzazione locale di S centrata in p (ricorda anche l'Osservazione 3.2.2).

Definizione 3.2.8: Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie orientata con mappa di Gauss N . Diremo che $p \in S$ è *ellittico* se $K > 0$ (e quindi tutte le curvature normali hanno lo stesso segno); *iperbolico* se $K < 0$ (e quindi ci sono curvature normali di segno opposto); *parabolico* se $K = 0$ ma $dN_p \neq O$; *planare* se $dN_p = O$; e *ombelicale* se dN_p è un multiplo dell'identità (per cui $k_1 = k_2$ e $K \geq 0$).

Osservazione 3.2.5. Se $p \in S$ è un punto ellittico, tutte le curvature normali in p hanno lo stesso segno. Intuitivamente questo vuol dire che tutte le sezioni normali si curvano dalla stessa parte rispetto a $T_p S$, cioè che vicino a p la superficie è da un solo lato del piano tangente. Invece, se p è iperbolico abbiamo curvature normali di segno diverso; questo vuol dire che le sezioni normali possono essere curvate da parti opposte rispetto a $T_p S$, cioè che vicino a p la superficie ha pezzi da entrambe le parti del piano tangente. Nulla del genere si può invece dire a priori per i punti parabolici o planari. Gli Esercizi 3.2.2 e 3.2.3 formalizzano meglio queste idee intuitive.

Esercizio 3.2.2. Sia $p \in S$ un punto di una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$. Dimostra che se p è ellittico allora esiste un intorno V di p in S tale che tutti i punti di V appartengono a uno dei due semispazi chiusi determinati dal piano $p + T_p S$. Dimostra invece che se p è iperbolico ogni intorno di p in S interseca entrambi i semispazi aperti determinati dal piano $p + T_p S$. (*Suggerimento:* Sia $\varphi: U \rightarrow S$ una parametrizzazione locale centrata in p . La distanza con segno $d(x)$ di $\varphi(x)$ dal piano $p + T_p S$ è data da $d(x) = (\varphi(x) - p, N(p))$. Sviluppa in serie di Taylor la funzione d e studiane il segno vicino all'origine.)

Esercizio 3.2.3. Sia S il grafico della funzione $f(u, v) = u^3 - 3v^2u$ (questa superficie è a volte chiamata *sella della scimmia*). Dimostra che il punto $O \in S$ è planare e che ogni intorno di O in S interseca entrambi i semispazi aperti determinati dal piano $T_O S$.

Abbiamo visto che piani e sfere sono composti da punti ombelicali. Di fatto vale il viceversa:

Proposizione 3.2.5: Una superficie S orientata connessa composta solo da punti ombelicali è necessariamente contenuta in una sfera o in un piano.

Dimostrazione: L'ipotesi è che esista una funzione $\lambda: S \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $dN_p(v) = \lambda(p)v$ per ogni $v \in T_p S$ e $p \in S$. In particolare, se φ è una parametrizzazione locale si ha

$$\frac{\partial(N \circ \varphi)}{\partial x^1} = dN(\partial_1) = (\lambda \circ \varphi)\partial_1, \quad \frac{\partial(N \circ \varphi)}{\partial x^2} = dN(\partial_2) = (\lambda \circ \varphi)\partial_2.$$

Derivando un'altra volta otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2(N \circ \varphi)}{\partial x^2 \partial x^1} &= \frac{\partial(\lambda \circ \varphi)}{\partial x^2} \partial_1 + (\lambda \circ \varphi) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2 \partial x^1}, \\ \frac{\partial^2(N \circ \varphi)}{\partial x^1 \partial x^2} &= \frac{\partial(\lambda \circ \varphi)}{\partial x^1} \partial_2 + (\lambda \circ \varphi) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^1 \partial x^2}, \end{aligned}$$

e quindi

$$\frac{\partial(\lambda \circ \varphi)}{\partial x^2} \partial_1 - \frac{\partial(\lambda \circ \varphi)}{\partial x^1} \partial_2 \equiv O.$$

Ma ∂_1 e ∂_2 sono linearmente indipendenti, per cui

$$\frac{\partial(\lambda \circ \varphi)}{\partial x^2} \equiv \frac{\partial(\lambda \circ \varphi)}{\partial x^1} \equiv 0,$$

cioè $\lambda \circ \varphi$ è costante.

Abbiamo quindi dimostrato che λ è localmente costante: essendo S connessa, λ è costante su tutta S . Infatti, scelto $p_0 \in S$ consideriamo l'insieme $R = \{p \in S \mid \lambda(p) = \lambda(p_0)\}$. Questo insieme è non vuoto ($p_0 \in R$), è chiuso, perché λ è continua, ed è aperto, perché λ è localmente costante; quindi la connessione di S implica $R = S$, e λ è costante.

Se $\lambda \equiv 0$, il differenziale della mappa di Gauss è identicamente nullo, e quindi S è contenuta in un piano (Esercizio 3.2.1). Se $\lambda \equiv \lambda_0 \neq 0$, sia $q: S \rightarrow \mathbb{R}^3$ data da $q(p) = p - \lambda_0^{-1} N(p)$. Allora

$$dq_p = \text{id} - \frac{1}{\lambda_0} dN_p = \text{id} - \frac{1}{\lambda_0} \lambda_0 \text{id} \equiv O,$$

per cui q è (localmente costante e quindi) costante; chiamiamo q_0 il valore di q , cioè $q \equiv q_0$. Ma allora $p - q_0 \equiv \lambda_0^{-1} N(p)$ e quindi

$$\forall p \in S \quad \|p - q_0\|^2 = \frac{1}{\lambda_0^2},$$

cioè S è contenuta nella sfera di centro q_0 e raggio $1/|\lambda_0|$. $\square$

Vediamo ora come si esprime la seconda forma fondamentale in coordinate locali. Fissiamo una parametrizzazione locale $\varphi: U \rightarrow S$ in $p \in S$ di una superficie orientata $S \subset \mathbb{R}^3$ con mappa di Gauss $N: S \rightarrow S^2$. Se $v = v^1 \partial_1 + v^2 \partial_2 \in T_p S$ allora

$$Q_p(v) = Q_p(\partial_1)(v^1)^2 - 2(dN_p(\partial_1), \partial_2)_p v^1 v^2 + Q_p(\partial_2)(v^2)^2.$$

Viene quindi naturale introdurre la seguente

Definizione 3.2.9: Sia $\varphi: U \rightarrow S$ una parametrizzazione locale di una superficie S . I coefficienti di forma di S rispetto a φ sono le tre funzioni $e, f, g: U \rightarrow \mathbb{R}$ date da

$$\begin{aligned} e(x) &= Q_{\varphi(x)}(\partial_1) = -(dN_{\varphi(x)}(\partial_1), \partial_1)_{\varphi(x)} = \left((N \circ \varphi)(x), \frac{\partial^2 \varphi}{\partial (x^1)^2}(x) \right), \\ f(x) &= -(dN_{\varphi(x)}(\partial_1), \partial_2)_{\varphi(x)} = \left((N \circ \varphi)(x), \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^1 \partial x^2}(x) \right), \\ g(x) &= Q_{\varphi(x)}(\partial_2) = -(dN_{\varphi(x)}(\partial_2), \partial_2)_{\varphi(x)} = \left((N \circ \varphi)(x), \frac{\partial^2 \varphi}{\partial (x^2)^2}(x) \right) \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

per ogni $x \in U$, dove $N = \partial_1 \wedge \partial_2 / \|\partial_1 \wedge \partial_2\|$, come al solito, e le uguaglianze a destra in (3.2.4) sono ottenute derivando $(N \circ \varphi, \partial_j) \equiv 0$.

Chiaramente, i coefficienti di forma sono (perché?) funzioni di classe C^∞ su U che determinano completamente la seconda forma fondamentale:

$$Q_p(v^1 \partial_1 + v^2 \partial_2) = e(x)(v^1)^2 + 2f(x)v^1 v^2 + g(x)(v^2)^2$$

per ogni $p = \varphi(x) \in \varphi(U)$ e $v^1 \partial_1 + v^2 \partial_2 \in T_p S$.

Osservazione 3.2.6. Di nuovo, questa è la notazione di Gauss. Useremo anche la notazione più moderna $e = h_{11}$, $f = h_{12} = h_{21}$ e $g = h_{22}$.

Osservazione 3.2.7. Noi abbiamo introdotto e, f e g come funzioni definite su U . A volte però sarà comodo considerarle come funzioni definite su $\varphi(U)$, ovvero sostituirle con $e \circ \varphi^{-1}$, $f \circ \varphi^{-1}$ e $g \circ \varphi^{-1}$ rispettivamente. Infine, anche i coefficienti di forma dipendono fortemente dalla parametrizzazione locale scelta, come si può verificare facilmente (vedi l'Esempio 3.2.13).

Possiamo esprimere anche la matrice A che rappresenta dN_p rispetto alla base $\{\partial_1, \partial_2\}$ tramite le funzioni E, F, G, e, f e g . Infatti, per ogni $v = v^1 \partial_1 + v^2 \partial_2$, $w = w^1 \partial_1 + w^2 \partial_2 \in T_p S$ abbiamo

$$\begin{vmatrix} w^1 & w^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} e & f \\ f & g \end{vmatrix} \begin{vmatrix} v^1 \\ v^2 \end{vmatrix} = -(dN_p(v), w)_p = - \begin{vmatrix} w^1 & w^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix} \begin{vmatrix} v^1 \\ v^2 \end{vmatrix},$$

e quindi

Proposizione 3.2.6: Sia $\varphi: U \rightarrow S$ una parametrizzazione locale di una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$, e poniamo $N = \partial_1 \wedge \partial_2 / \|\partial_1 \wedge \partial_2\|$. Allora la matrice $A \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ che rappresenta l'endomorfismo dN rispetto alla base $\{\partial_1, \partial_2\}$ è

$$A = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}^{-1} \begin{vmatrix} e & f \\ f & g \end{vmatrix} = - \frac{1}{EG - F^2} \begin{vmatrix} eG - fF & fG - gF \\ fE - eF & gE - fF \end{vmatrix}. \quad (3.2.5)$$

In particolare la curvatura Gaussiana è data da

$$K = \det(A) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}, \quad (3.2.6)$$

mentre la curvatura media è data da

$$H = -\frac{1}{2}\text{tr}(A) = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}. \quad (3.2.7)$$

Osservazione 3.2.8. I coefficienti metrici e di forma dipendono dalla parametrizzazione locale scelta, ma la curvatura Gaussiana e il valore assoluto della curvatura media no, in quanto definiti direttamente a partire dalla mappa di Gauss senza passare tramite una parametrizzazione locale.

ESEMPIO 3.2.11. Nel piano abbiamo $e \equiv f \equiv g \equiv 0$ quale che sia la parametrizzazione, in quanto la seconda forma fondamentale è identicamente nulla. In particolare, la curvatura Gaussiana e la curvatura media sono identicamente nulle.

ESEMPIO 3.2.12. Per il cilindro con la parametrizzazione dell'Esempio 3.1.2 abbiamo $e \equiv -1$ e $f \equiv g \equiv 0$, per cui $K \equiv 0$ e $H \equiv -1/2$.

ESEMPIO 3.2.13. Abbiamo visto nell'Esempio 3.2.8 che sulla sfera orientata come nell'Esempio 3.2.3 si ha $Q_p = -I_p$. Questo vuol dire che per qualsiasi parametrizzazione i coefficienti di forma sono l'opposto dei corrispondenti coefficienti metrici. In particolare, $K \equiv 1$ e $H \equiv -1$.

Esercizio 3.2.4. Dimostra che la curvatura Gaussiana di una sfera di raggio $R > 0$ è $K \equiv 1/R^2$, mentre la curvatura media è $H \equiv -1/R$.

ESEMPIO 3.2.14. Per un elicoide parametrizzato come nell'Esempio 3.1.4 troviamo $f = a/\sqrt{a^2 + (x^2)^2}$ e $e \equiv g \equiv 0$, per cui $K = -a^2/(a^2 + (x^2)^2)^2$ e $H \equiv 0$.

ESEMPIO 3.2.15. Per una catenoidale parametrizzata come nell'Esempio 3.1.5 troviamo $e \equiv a$, $f \equiv 0$ e $g \equiv -a$, per cui $K = -1/a^2 \cosh^4 u$ e $H \equiv 0$.

ESEMPIO 3.2.16. Sia S una superficie di rotazione, parametrizzata come nell'Esempio 3.1.6. Allora

$$(N \circ \varphi)(t, \theta) = \frac{1}{\sqrt{\alpha'(t)^2 + \beta'(t)^2}} (-\beta'(t) \cos \theta, -\beta'(t) \sin \theta, \alpha'(t)).$$

I coefficienti di forma sono quindi dati da

$$e = \frac{\alpha' \beta'' - \beta' \alpha''}{\sqrt{(\alpha')^2 + (\beta')^2}}, \quad f \equiv 0, \quad g = \frac{\alpha \beta'}{\sqrt{(\alpha')^2 + (\beta')^2}},$$

e dunque

$$K = \frac{\beta'(\alpha' \beta'' - \beta' \alpha'')}{\alpha[(\alpha')^2 + (\beta')^2]^2}, \quad H = \frac{\alpha(\alpha' \beta'' - \beta' \alpha'') + \beta'((\alpha')^2 + (\beta')^2)}{2\alpha((\alpha')^2 + (\beta')^2)^{3/2}}.$$

Se la curva che viene ruotata è parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco, le formule precedenti si semplificano alquanto. Infatti derivando $(\alpha')^2 + (\beta')^2 \equiv 1$ otteniamo $\alpha' \alpha'' + \beta' \beta'' \equiv 0$, per cui si ha

$$K = -\frac{\alpha''}{\alpha}, \quad H = \frac{\beta' + \alpha(\alpha' \beta'' - \beta' \alpha'')}{2\alpha}.$$

ESEMPIO 3.2.17. La curva $\sigma: (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$ data da

$$\sigma(t) = \left(\sin t, \log \tan \frac{t}{2} + \cos t \right)$$

è chiamata *trattrice*; la superficie S di rotazione della trattrice è chiamata *pseudosfera*. Usando l'esempio precedente si vede facilmente che la pseudosfera ha curvatura Gaussiana costante -1 .

Osservazione 3.2.9. Il piano è un esempio di superficie con curvatura Gaussiana costante nulla, e le sfere sono un esempio di superficie con curvatura Gaussiana costante positiva. Altri esempio di superfici con curvatura Gaussiana costante nulla sono i *cilindri*: superfici chiuse di $\mathbb{R}^3$ ottenute come unione disgiunta di rette parallele. La pseudosfera è invece un esempio di superficie con curvatura Gaussiana costante negativa ma, contrariamente al piano e alla sfera, non è una superficie chiusa di $\mathbb{R}^3$. Questo non è un caso: un teorema di Hilbert dice che *non esistono* superfici chiuse in $\mathbb{R}^3$ di curvatura Gaussiana costante negativa. Per completezza, citiamo senza dimostrazione la seguente classificazione delle superfici di curvatura Gaussiana costante:

Teorema 3.2.7: (i) Se $S \subset \mathbb{R}^3$ è una superficie chiusa di curvatura Gaussiana costante nulla, allora S è un piano o un cilindro (Teorema di Hadamard-Hartman-Nirenberg).
(ii) Se $S \subset \mathbb{R}^3$ è una superficie chiusa di curvatura Gaussiana costante positiva, allora S è una sfera (Teorema di Liebmann-Bonnet).
(iii) Non esistono superfici chiuse in $\mathbb{R}^3$ di curvatura Gaussiana costante negativa (Teorema di Hilbert).

Concludiamo questo paragrafo introducendo alcune curve speciali su una superficie.

Definizione 3.2.10: Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie orientata con mappa di Gauss N . Una curva σ in S tale che $\dot{\sigma}(t)$ sia sempre una direzione principale è detta *linea di curvatura* della superficie S .

Proposizione 3.2.8: Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie orientata con mappa di Gauss N . Allora una curva σ in S è una linea di curvatura se e solo se $N'(t) = \lambda(t)\sigma'(t)$ per un'opportuna funzione λ di classe C^∞ , dove $N(t) = N(\sigma(t))$. In questo caso, $-\lambda(t)$ è la curvatura (principale) di S lungo $\sigma'(t)$.

Dimostrazione: Infatti,

$$dN_{\sigma(t)}(\sigma'(t)) = \frac{d(N \circ \sigma)}{dt}(t) = N'(t),$$

per cui $\sigma'(t)$ è un autovettore di $dN_{\sigma(t)}$ se e solo se $N'(t) = \lambda(t)\sigma'(t)$ per un opportuno $\lambda(t) \in \mathbb{R}$. $\square$

Definizione 3.2.11: Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie orientata con mappa di Gauss N . Una $v \in T_p S$ tale che $Q_p(v) = 0$ è detta *direzione asintotica*. Una curva σ in S tale che $\dot{\sigma}(t)$ sia sempre una direzione asintotica sarà detta *linea asintotica* della superficie S .

Chiaramente, direzioni asintotiche esistono solo nei punti iperbolici o parabolici (o planari, nel qual caso tutte le direzioni sono asintotiche).

Osservazione 3.2.10. Con le tecniche che introdurremo nel paragrafo 4.1 si può dimostrare che se $p \in S$ non è un punto ombelicale allora esiste una parametrizzazione locale in p le cui curve coordinate sono linee di curvatura; e che se p è un punto iperbolico allora esiste una parametrizzazione locale in p le cui curve coordinate sono linee asintotiche.

Esercizio 3.2.5. Sia $\varphi: U \rightarrow S$ una parametrizzazione locale di una superficie orientata, e sia $\sigma: I \rightarrow \varphi(U)$ una curva regolare il cui sostegno sia contenuto in $\varphi(U)$, in modo da poter scrivere $\sigma(t) = \varphi(u(t), v(t))$. Dimostra che σ è una linea asintotica se e solo se

$$e(u')^2 + 2fu'v' + g(v')^2 \equiv 0.$$

Deduci in particolare che le curve coordinate sono linee asintotiche nell'intorno di un punto iperbolico se e solo se $e = g = 0$.

Esercizio 3.2.6. Sia $\varphi: U \rightarrow S$ una parametrizzazione locale di una superficie orientata, e sia $\sigma: I \rightarrow \varphi(U)$ una curva regolare il cui sostegno sia contenuto in $\varphi(U)$, in modo da poter scrivere $\sigma(t) = \varphi(u(t), v(t))$. Dimostra che σ è una linea di curvatura se e solo se

$$(fE - eF)(u')^2 + (gE - eG)u'v' + (gF - fG)(v')^2 \equiv 0.$$

Deduci in particolare che le curve coordinate sono linee di curvatura nell'intorno di un punto non ombelicale se e solo se $F = f = 0$.

3.3 Il Teorema Egregium di Gauss

L'obiettivo di questo paragrafo è dimostrare che la curvatura Gaussiana è una proprietà intrinseca di una superficie: dipende solo dalla prima forma fondamentale, e non dal modo con cui la superficie è immersa in $\mathbb{R}^3$. L'idea è procedere in modo non dissimile da come ottenemmo le formule di Frenet-Serret per le curve.

Sia allora $\varphi: U \rightarrow S$ una parametrizzazione locale di una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$, e sia $N: \varphi(U) \rightarrow S^2$ la mappa di Gauss di $\varphi(U)$ data da $N = \partial_1 \wedge \partial_2 / \|\partial_1 \wedge \partial_2\|$ come al solito. La terna $\{\partial_1, \partial_2, N\}$ è sempre una base di $\mathbb{R}^3$, per cui possiamo esprimere qualsiasi vettore di $\mathbb{R}^3$ come una sua combinazione lineare. In particolare devono esistere delle funzioni $\Gamma_{ij}^h, h_{ij}, a_i^j \in C^\infty(U)$ tali che

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^j} &= \Gamma_{ij}^1 \partial_1 + \Gamma_{ij}^2 \partial_2 + h_{ij} N, \\ \frac{\partial(N \circ \varphi)}{\partial x^i} &= a_i^1 \partial_1 + a_i^2 \partial_2, \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

per $i, j = 1, 2$, dove nell'ultima formula non ci sono termini proporzionali a N perché $\|N\| \equiv 1$ implica che tutte le derivate parziali di $N \circ \varphi$ sono ortogonali a N . Notiamo inoltre che le Γ_{ij}^r sono simmetriche rispetto agli indici in basso, cioè $\Gamma_{ji}^r = \Gamma_{ij}^r$ per ogni $i, j, r = 1, 2$, in quanto le derivate parziali commutano, cioè $\partial^2 \varphi / \partial x^j \partial x^i = \partial^2 \varphi / \partial x^i \partial x^j$.

Alcune delle funzioni che compaiono nelle (3.3.1) ci sono già note: per esempio, le a_i^j non sono altro che le componenti della matrice A che rappresenta dN_p rispetto alla base $\{\partial_1, \partial_2\}$, dato che $\partial(N \circ \varphi) / \partial x^i = dN_p(\partial_i)$, e quindi le a_i^j sono date dalla (3.2.5). Anche le h_{ij} sono note: infatti la (3.2.4) ci dice che sono proprio le componenti della matrice che rappresenta la seconda forma fondamentale rispetto alla base $\{\partial_1, \partial_2\}$ (e quindi la notazione è coerente con l'Osservazione 3.2.6). Le uniche quantità per il momento incognite sono le Γ_{ij}^r .

Definizione 3.3.1: Le funzioni Γ_{ij}^r sono dette *simboli di Christoffel* della parametrizzazione locale φ .

Vogliamo allora calcolare i simboli di Christoffel. Moltiplicando scalarmente per ∂_1 e per ∂_2 la prima equazione in (3.3.1) con $i = j = 1$ otteniamo

$$\begin{cases} E\Gamma_{11}^1 + F\Gamma_{11}^2 = \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial (x^1)^2}, \partial_1 \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^1} (\partial_1, \partial_1) = \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial x^1}, \\ F\Gamma_{11}^1 + G\Gamma_{11}^2 = \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial (x^1)^2}, \partial_2 \right) = \frac{\partial}{\partial x^1} (\partial_1, \partial_2) - \left(\partial_1, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^1 \partial x^2} \right) = \frac{\partial F}{\partial x^1} - \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial x^2}. \end{cases} \quad (3.3.2)$$

Analogamente si trova

$$\begin{cases} E\Gamma_{12}^1 + F\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial x^2}, \\ F\Gamma_{12}^1 + G\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial x^1}, \end{cases} \quad (3.3.3)$$

e

$$\begin{cases} E\Gamma_{22}^1 + F\Gamma_{22}^2 = \frac{\partial F}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial x^1}, \\ F\Gamma_{22}^1 + G\Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial x^2}. \end{cases} \quad (3.3.4)$$

Questi sono tre sistemi lineari quadrati la cui matrice dei coefficienti ha determinante $EG - F^2 \neq 0$; quindi ammettono un'unica soluzione, che è esprimibile in termine dei coefficienti metrici e delle loro derivate. In particolare, *i simboli di Christoffel dipendono solo dalla prima forma fondamentale di S* , per cui qualsiasi quantità esprimibile tramite i simboli di Christoffel è intrinseca: dipende solo dalla struttura metrica della superficie, e non dal modo in cui la superficie è immersa in $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 3.3.1. Dimostra che i simboli di Christoffel possono essere calcolati con la seguente formula

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^2 g^{kl} \left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right),$$

dove $g_{11} = E$, $g_{12} = g_{21} = F$, $g_{22} = G$, e (g^{ij}) è la matrice inversa della matrice (g_{ij}) .

Osservazione 3.3.1. Notiamo esplicitamente, in quanto ci sarà utile in seguito, che se la parametrizzazione è ortogonale (cioè $F \equiv 0$) i simboli di Christoffel hanno un'espressione particolarmente semplice:

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2E} \frac{\partial E}{\partial x^1}, & \Gamma_{12}^1 &= \Gamma_{21}^1 = \frac{1}{2E} \frac{\partial E}{\partial x^2}, & \Gamma_{22}^1 &= -\frac{1}{2E} \frac{\partial G}{\partial x^1}, \\ \Gamma_{11}^2 &= -\frac{1}{2G} \frac{\partial E}{\partial x^2}, & \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{2G} \frac{\partial G}{\partial x^1}, & \Gamma_{22}^2 &= \frac{1}{2G} \frac{\partial G}{\partial x^2}.\end{aligned}\quad (3.3.5)$$

ESEMPIO 3.3.1. Calcoliamo i simboli di Christoffel di una superficie di rotazione parametrizzata come nell'Esempio 3.1.6. Le (3.3.5) danno

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= \frac{\alpha' \alpha'' + \beta' \beta''}{(\alpha')^2 + (\beta')^2}, & \Gamma_{12}^1 &= \Gamma_{21}^1 \equiv 0, & \Gamma_{22}^1 &= -\frac{\alpha \alpha'}{(\alpha')^2 + (\beta')^2}, \\ \Gamma_{11}^2 &\equiv 0, & \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{\alpha'}{\alpha}, & \Gamma_{22}^2 &\equiv 0.\end{aligned}\quad (3.3.6)$$

Non contenti, calcoliamo ora anche le derivate terze della parametrizzazione. Esattamente come prima, devono esistere delle funzioni $A_{ijk}^r, B_{ijk} \in C^\infty(U)$ tali che

$$\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^i \partial x^j \partial x^k} = A_{ijk}^1 \partial_1 + A_{ijk}^2 \partial_2 + B_{ijk} N.$$

Di nuovo, la permutabilità delle derivate parziali ci assicura che le funzioni A_{ijk}^r e B_{ijk} sono simmetriche negli indici in basso. In particolare,

$$A_{kij}^r = A_{ijk}^r = A_{ikj}^r \quad \text{e} \quad B_{kij} = B_{ijk} = B_{ikj} \quad (3.3.7)$$

per ogni $i, j, k, r = 1, 2$.

Per calcolare A_{ijk}^r e B_{ijk} deriviamo le (3.3.1) e poi inseriamo le stesse (3.3.1) nelle espressioni trovate. Si ottiene

$$\begin{aligned}A_{ijk}^r &= A_{kij}^r = \frac{\partial \Gamma_{ij}^r}{\partial x^k} + \Gamma_{ij}^1 \Gamma_{1k}^r + \Gamma_{ij}^2 \Gamma_{2k}^r + h_{ij} a_k^r, \\ B_{ijk} &= B_{kij} = \Gamma_{ij}^1 h_{1k} + \Gamma_{ij}^2 h_{2k} + \frac{\partial h_{ij}}{\partial x^k}.\end{aligned}$$

Ricordando che $A_{ijk}^r - A_{ikj}^r = 0$ ricaviamo per ogni $i, j, k, r = 1, 2$ le fondamentali equazioni di Gauss:

$$\frac{\partial \Gamma_{ij}^r}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^r}{\partial x^j} + \sum_{s=1}^2 (\Gamma_{ij}^s \Gamma_{sk}^r - \Gamma_{ik}^s \Gamma_{sj}^r) = -(h_{ij} a_k^r - h_{ik} a_j^r). \quad (3.3.8)$$

Prima di vedere cosa si ottiene dalla simmetria dei B_{ijk} , notiamo una importantissima conseguenza delle equazioni di Gauss. Se scriviamo la (3.3.8) per $i = k = 1$ e $j = r = 2$ otteniamo

$$\frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial x^1} - \frac{\partial \Gamma_{11}^2}{\partial x^2} + \sum_{s=1}^2 (\Gamma_{12}^s \Gamma_{s1}^2 - \Gamma_{11}^s \Gamma_{s2}^2) = -(h_{12} a_1^2 - h_{11} a_2^2) = \frac{(f^2 - eg)E}{EG - F^2} = -EK. \quad (3.3.9)$$

Esercizio 3.3.2. Verifica che le (3.3.8) scritte per gli altri possibili valori di i, j, k ed r sono identicamente soddisfatte, oppure sono conseguenze della simmetria dei simboli di Christoffel, oppure sono equivalenti a (3.3.9).

Siccome, come abbiamo già notato, i simboli di Christoffel dipendono solo dalla prima forma fondamentale, abbiamo dimostrato il famosissimo *Teorema Egregium di Gauss*:

Teorema 3.3.1: (Egregium di Gauss) *La curvatura Gaussiana di una superficie è una proprietà intrinseca, cioè dipende soltanto dalla prima forma fondamentale.*

In particolare, questo ci dice che due superfici localmente isometriche devono avere la stessa curvatura Gaussiana:

Corollario 3.3.2: *Sia $F: S \rightarrow \tilde{S}$ un'isometria locale fra due superfici. Allora $\tilde{K} \circ F = K$, dove K è la curvatura Gaussiana di S e $\tilde{K}$ è la curvatura Gaussiana di $\tilde{S}$.*

Dimostrazione: Segue subito dal Teorema 3.3.1 e dalla Proposizione 3.1.1. $\square$

Per esempio, non può esistere alcuna isometria locale fra un pezzo di sfera e un pezzo di piano, in quanto la sfera ha curvatura Gaussiana sempre positiva mentre il piano ha curvatura Gaussiana identicamente nulla. In altri termini, non è possibile disegnare su un foglio una mappa della sfera che conservi le distanze.

Esercizio 3.3.3. Siano $\varphi, \tilde{\varphi}: \mathbb{R}^+ \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$ date da

$$\varphi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, \log u), \quad \tilde{\varphi}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v);$$

l'immagine S di φ è la superficie di rotazione generata dalla curva $(t, \log t)$, mentre l'immagine $\tilde{S}$ di $\tilde{\varphi}$ è un pezzo di elicoide. Dimostra che $K \circ \varphi = \tilde{K} \circ \tilde{\varphi}$, dove K (rispettivamente, $\tilde{K}$) è la curvatura Gaussiana di S (rispettivamente, $\tilde{S}$), ma $\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1}$ non è un'isometria. In particolare, il viceversa del Corollario 3.3.2 non è vero.

Nel seguito ci servirà un'altra formula esplicita per il calcolo della curvatura Gaussiana:

Lemma 3.3.3: *Sia $\varphi: U \rightarrow S$ una parametrizzazione locale ortogonale di una superficie S . Allora*

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{\partial E}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{\partial G}{\partial x^1} \right) \right\}.$$

Dimostrazione: Se mettiamo (3.3.6) dentro (3.3.9) otteniamo

$$\begin{aligned} K &= -\frac{1}{E} \left[\frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{1}{2G} \frac{\partial G}{\partial x^1} \right) + \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\frac{1}{2G} \frac{\partial E}{\partial x^2} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4EG} \left(\frac{\partial E}{\partial x^2} \right)^2 - \frac{1}{4EG} \frac{\partial E}{\partial x^1} \frac{\partial G}{\partial x^1} + \frac{1}{4G^2} \left(\frac{\partial G}{\partial x^1} \right)^2 + \frac{1}{4G^2} \frac{\partial E}{\partial x^2} \frac{\partial G}{\partial x^2} \right] \\ &= \frac{1}{4E^2G^2} \left(E \frac{\partial G}{\partial x^2} + G \frac{\partial E}{\partial x^2} \right) \frac{\partial E}{\partial x^2} - \frac{1}{2EG} \frac{\partial^2 E}{\partial (x^2)^2} + \frac{1}{4E^2G^2} \left(G \frac{\partial E}{\partial x^1} + E \frac{\partial G}{\partial x^1} \right) \frac{\partial G}{\partial x^1} - \frac{1}{2EG} \frac{\partial^2 G}{\partial (x^1)^2} \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{\partial E}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{\partial G}{\partial x^1} \right) \right\}. \end{aligned}$$

$\square$

Concludiamo il capitolo con un'ultima conseguenza delle (3.3.7). La condizione $B_{ijk} - B_{ikj} = 0$ ci fornisce per ogni $i, j, k = 1, 2$ le equazioni di Codazzi-Mainardi:

$$\sum_{s=1}^2 (\Gamma_{ij}^s h_{sk} - \Gamma_{ik}^s h_{sj}) = \frac{\partial h_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial h_{ij}}{\partial x^k}. \quad (3.3.10)$$

Dunque se φ è una parametrizzazione locale di una superficie regolare, le coordinate di φ devono soddisfare il sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali (3.3.1), i cui coefficienti dipendono dai coefficienti E, F, G, e, f e g della prima e seconda forma fondamentale, che a loro volta soddisfano le condizioni di compatibilità (3.3.8) e (3.3.10). La teoria delle equazioni differenziali alle derivate parziali, usata in modo non dissimile da come usammo le equazioni differenziali ordinarie per derivare il teorema fondamentale della teoria locale delle curve, ha allora come conseguenza il seguente *teorema fondamentale della teoria locale delle superfici*, che non dimostriamo:

Teorema 3.3.4: (Bonnet) Siano $E, F, G, e, f, g \in C^\infty(V)$, dove $V \subset \mathbb{R}^2$ è un aperto del piano, funzioni tali che $E, G, EG - F^2 > 0$ e soddisfacenti le equazioni di Gauss e di Codazzi-Mainardi. Allora per ogni $q \in V$ esiste un intorno connesso $U \subseteq V$ di q e una superficie immersa $\varphi: U \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^3$ tale che $\varphi(U)$ sia una superficie regolare con E, F, G come coefficienti metrici ed e, f, g come coefficienti di forma. Inoltre, se $\tilde{\varphi}: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ è un'altra superficie immersa che soddisfa le stesse condizioni esistono una rotazione $\rho \in SO(3)$ e un vettore $b \in \mathbb{R}^3$ tali che $\tilde{\varphi} = \rho \circ \varphi + b$.

Capitolo 4

Il teorema di Gauss-Bonnet

4.1 Campi vettoriali

In questa sezione introduciamo la nozione fondamentale di campo vettoriale tangente a una superficie, e come prima applicazione dimostreremo l'esistenza di parametrizzazioni ortogonali.

Definizione 4.1.1: Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie. Un *campo vettoriale (tangente)* su S è un'applicazione $X: S \rightarrow \mathbb{R}^3$ di classe C^∞ tale che $X(p) \in T_p S$ per ogni $p \in S$. Indicheremo con $\mathcal{T}(S)$ lo spazio vettoriale dei campi vettoriali tangenti a S .

Esercizio 4.1.1. Dimostra che un'applicazione $X: S \rightarrow \mathbb{R}^3$ è un campo vettoriale su S se e solo se per ogni parametrizzazione locale $\varphi: U \rightarrow S$ possiamo trovare $X^1, X^2 \in C^\infty(U)$ tali che $X \circ \varphi = X^1 \partial_1 + X^2 \partial_2$.

Un campo vettoriale è quindi un modo liscio di associare un vettore tangente a ciascun punto della superficie. Siccome i vettori tangenti della superficie possono essere pensati come vettori tangenti a curve sulla superficie, è naturale chiedersi se esistono curve i cui vettori tangenti danno il campo vettoriale dato:

Definizione 4.1.2: Una *curva integrale* (o *traiettoria*) di un campo vettoriale $X \in \mathcal{T}(S)$ è una curva $\sigma: I \rightarrow S$ tale che $\sigma'(t) = X(\sigma(t))$ per ogni $t \in I$.

Supponiamo di avere un campo vettoriale $X \in \mathcal{T}(S)$ e di voler trovare una traiettoria di X che parta da un punto $p \in S$. Prendiamo una parametrizzazione locale $\varphi: U \rightarrow S$ centrata in p , e scriviamo $X \circ \varphi = X^1 \partial_1 + X^2 \partial_2$. Ogni curva $\sigma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \varphi(U) \subseteq S$ con $\sigma(0) = p$ sarà della forma $\sigma = \varphi \circ \sigma_o = \varphi(\sigma_o^1, \sigma_o^2)$ per un'opportuna curva $\sigma_o: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ con $\sigma_o(0) = O$. Allora σ è una curva integrale di X se e solo se

$$(\sigma_o^1)' \partial_1 + (\sigma_o^2)' \partial_2 = \sigma' = X \circ \sigma = (X^1 \circ \sigma_o) \partial_1 + (X^2 \circ \sigma_o) \partial_2,$$

cioè se e solo se σ_o è soluzione del sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$\begin{cases} (\sigma_o^1)' = X^1 \circ \sigma_o, \\ (\sigma_o^2)' = X^2 \circ \sigma_o. \end{cases}$$

Ricordiamo allora il fondamentale Teorema di esistenza e unicità delle soluzioni dei sistemi di equazioni differenziali ordinarie:

Teorema 4.1.1: Dati un aperto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ e funzioni $a^1, \dots, a^n \in C^\infty(U)$, si consideri il seguente problema di Cauchy per una curva $\sigma: I \rightarrow U$:

$$\begin{cases} \frac{d\sigma^j}{dt}(t) = a^j(\sigma(t)), & j = 1, \dots, n, \\ \sigma(t_0) = x \in U. \end{cases} \quad (4.1.1)$$

- (i) Per ogni $t_0 \in \mathbb{R}$ e $x_0 \in U$ esistono $\delta > 0$ e un intorno aperto $U_0 \subseteq U$ di x_0 tali che per ogni $x \in U_0$ esiste una curva $\sigma_x: (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \rightarrow U$ soluzione di (4.1.1).
- (ii) L'applicazione $\Sigma: U_0 \times (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \rightarrow U$ data da $\Sigma(x, t) = \sigma_x(t)$ è di classe C^∞ .
- (iii) Due soluzioni di (4.1.1) coincidono sempre nell'intersezione dei loro domini di definizione.

Applicando questo teorema al caso delle curve integrali otteniamo il seguente risultato:

Teorema 4.1.2: Sia $X \in \mathcal{T}(S)$ un campo vettoriale su una superficie S . Allora:

- (i) Per ogni $p_0 \in S$ esiste una curva integrale $\sigma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ di X con $\sigma(0) = p_0$. Due tali curve integrali coincidono nell'intersezione degli intervalli di definizione.
- (ii) Per ogni $p_0 \in S$ esistono $\varepsilon > 0$, un intorno V di p_0 in S e un'applicazione $\Sigma: V \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ di classe C^∞ tale che per ogni $p \in V$ la curva $\sigma_p = \Sigma(p, \cdot)$ sia una curva integrale di X con $\sigma_p(0) = p$.

Definizione 4.1.3: Sia $X \in \mathcal{T}(S)$ un campo vettoriale su una superficie S , e $p_0 \in S$. La $\Sigma: V \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ definita nel Teorema 4.1.2.(ii) è detta *flusso locale* di X vicino a p_0 .

Ovviamente trovare esplicitamente le traiettorie di un campo vettoriale è un problema tutt'altro che banale. Una delle tecniche utilizzabili è vedere le traiettorie come curve di livello di una funzione sulla superficie:

Definizione 4.1.4: Sia $X \in \mathcal{T}(S)$ un campo vettoriale su una superficie S , e $U \subseteq S$ un aperto. Una funzione $f \in C^\infty(U)$ costante sulle curve integrali di X contenute in U si dice *integrale primo* di X in U . Inoltre, diremo che f è un integrale primo *proprio* se $df_q \neq 0$ per ogni $q \in U$ (e quindi, in particolare, non è costante).

Osservazione 4.1.1. Se f è un integrale primo proprio del campo vettoriale $X \in \mathcal{T}(S)$ in un aperto U di una superficie S , e $p_0 \in S$, allora l'insieme $C_{p_0} = \{q \in U \mid f(q) = f(p_0)\}$ è il sostegno di una curva regolare (perché? Ricorda la Proposizione 1.1.3). D'altra parte, il sostegno della curva integrale di X che esce da p_0 dev'essere contenuta in C_{p_0} , per definizione di integrale primo. Quindi C_{p_0} è il sostegno della curva integrale di X uscente da p_0 . Quindi determinare un integrale primo permette di trovare i sostegni delle curve integrali di un campo vettoriale.

È possibile caratterizzare gli integrali primi senza bisogno di tirare in ballo le traiettorie:

Lemma 4.1.3: Sia $X \in \mathcal{T}(S)$ un campo vettoriale su una superficie S , e $U \subseteq S$ un aperto. Allora una funzione $f \in C^\infty(U)$ è un integrale primo di X se e solo se $X(f) \equiv 0$.

Dimostrazione: Sia $\sigma: I \rightarrow U$ una curva integrale di X . Allora

$$X_{\sigma(t)}(f) = \frac{d(f \circ \sigma)}{dt}(t),$$

per cui f è costante lungo tutte le curve integrali se e solo se $X(f) \equiv 0$. □

Non è difficile dimostrare l'esistenza di integrali primi propri:

Proposizione 4.1.4: Sia $X \in \mathcal{T}(S)$ un campo vettoriale su una superficie S , e $p \in S$ tale che $X(p) \neq 0$. Allora esiste un integrale primo proprio f di X definito in un intorno V di p .

Dimostrazione: Sia $\varphi: U \rightarrow S$ una parametrizzazione locale centrata in p , e scriviamo $X(p) = a^1 \partial_1|_p + a^2 \partial_2|_p$. Sia $A \in GL(2, \mathbb{R})$ una matrice invertibile tale che

$$A \begin{vmatrix} a^1 \\ a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix};$$

allora non è difficile verificare che $\tilde{\varphi} = \varphi \circ A^{-1}$ è una parametrizzazione locale di S centrata in p e tale che $X(p) = \tilde{\partial}_1|_p$, dove $\tilde{\partial}_1 = \partial \tilde{\varphi} / \partial x^1$.

Poniamo allora $X_o = d\tilde{\varphi}^{-1} \circ X$. Allora X_o è un campo vettoriale su $\tilde{U} = A(U)$ con $X_o(O) = \partial / \partial x^1$, e se troviamo un integrale primo proprio f_o di X_o in un intorno dell'origine allora $f = f_o \circ \tilde{\varphi}^{-1}$ è un integrale primo proprio di X in un intorno di p , in quanto

$$X(f) = d\tilde{\varphi}(X_o)(f) = X_o(f \circ \tilde{\varphi}) = X_o(f_o) \equiv 0.$$

Quindi il nostro obiettivo ora è trovare un integrale primo proprio di X_o . Sia $\Sigma: U_o \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ il flusso locale di X_o vicino a O , e sia $\hat{\Sigma}$ la restrizione di Σ al rettangolo $(U_o \cap \{x^1 = 0\}) \times (-\varepsilon, \varepsilon)$, cioè

$$\hat{\Sigma}(x^2, t) = \Sigma((0, x^2), t).$$

L'idea è che $\hat{\Sigma}$ manda i segmenti $\{x^2 = \text{cost.}\}$ in curve integrali di X_o ; quindi se $\hat{\Sigma}$ fosse invertibile, la coordinata x^2 dell'applicazione inversa sarebbe costante sulle curve integrali, cioè un integrale primo.

Vogliamo quindi dimostrare che $\hat{\Sigma}$ è invertibile in un intorno dell'origine. Per definizione abbiamo

$$d\hat{\Sigma}_O \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) = \sigma'_O(0) = X_o(O) = \frac{\partial}{\partial x^1}, \quad d\hat{\Sigma}_O \left(\frac{\partial}{\partial x^2} \right) = \frac{\partial}{\partial x^2},$$

e quindi $d\hat{\Sigma}_O$ è invertibile, in quanto manda una base in una base. Sia allora $V \subset U$ un intorno di O su cui $\hat{\Sigma}^{-1}$ esiste. Come già osservato, $\hat{\Sigma}^{-1}$ manda le curve integrali di X_o nei segmenti $\{x^2 = \text{cost.}\}$, in quanto $\hat{\Sigma}$ manda i segmenti $\{x^2 = \text{cost.}\}$ in curve integrali di X_o . Quindi se indichiamo con $\pi: (U_o \cap \{x^1 = 0\}) \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ la proiezione $\pi((0, x^2), t) = x^2$, la funzione $f_o = \pi \circ \hat{\Sigma}^{-1}$ è di classe C^∞ e costante sulle curve integrali di X_o , per cui è un integrale primo di X_o . Inoltre,

$$d(f_o)_O \left(\frac{\partial}{\partial x^2} \right) = \pi \circ d\hat{\Sigma}_O^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial x^2} \right) = \frac{\partial}{\partial x},$$

dove $\{\partial/\partial x\}$ è la base canonica di $T_0\mathbb{R}$; quindi $d(f_o)_O \neq 0$, e dunque f_o è un integrale primo proprio in un intorno dell'origine. $\square$

Torneremo a parlare di campi vettoriali in generale nel paragrafo 4.3; qui concludiamo il paragrafo mostrando come usare gli integrali primi per ottenere parametrizzazioni ortogonali. Il risultato che ci permetterà di procedere è il seguente

Teorema 4.1.5: *Siano $X_1, X_2 \in \mathcal{T}(S)$ campi vettoriali su una superficie S tali che $X_1(p) \wedge X_2(p) \neq 0$ per un qualche $p \in S$. Allora esiste una parametrizzazione locale $\varphi: U \rightarrow S$ centrata in p tale che ∂_j sia proporzionale a X_j per $j = 1, 2$.*

Dimostrazione: Scegliamo un intorno W di p tale che esista un integrale primo proprio $f_j \in C^\infty(W)$ di X_j , per $j = 1, 2$; a meno di sottrarre una costante a f_1 ed f_2 possiamo anche supporre che si abbia $f_1(p) = f_2(p) = 0$. Definiamo $\psi: W \rightarrow \mathbb{R}^2$ ponendo $\psi(q) = (f_2(q), f_1(q))$. Allora

$$d\psi(X_1) = (df_2(X_1), df_1(X_1)) = (a_1, 0), \quad d\psi(X_2) = (df_2(X_2), df_1(X_2)) = (0, a_2), \quad (4.1.2)$$

per opportune funzioni $a_1, a_2: W \rightarrow \mathbb{R}$. Notiamo che $a_1(p), a_2(p) \neq 0$: infatti, se si avesse, per esempio, $a_1(p) = 0$ allora seguirebbe $d(f_2)_p(X_1) = 0 = d(f_2)_p(X_2)$ e quindi $d(f_2)_p$, annullandosi su una base di T_pS , sarebbe nullo, contro l'ipotesi che f_2 fosse un integrale primo proprio. A meno di restringere W , possiamo quindi supporre $a_1(q), a_2(q) \neq 0$ per ogni $q \in W$.

In particolare, quindi, (4.1.2) implica che $d\psi_p: T_pS \rightarrow \mathbb{R}^2$ è invertibile; dunque esiste un intorno $V \subset W$ di p tale che $\psi|_V: V \rightarrow \psi(V) = U \subset \mathbb{R}^2$ sia un diffeomorfismo.

Poniamo $\varphi = \psi^{-1}$; allora φ è una parametrizzazione locale centrata in p , ed è la parametrizzazione cercata. Infatti, (4.1.2) dice che $d\psi(X_j) = a_j e_j$, dove $\{e_1, e_2\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^2$, per cui

$$X_j = a_j d\varphi(e_j) = a_j \partial_j$$

per $j = 1, 2$. $\square$

Corollario 4.1.6: *Se $S \subset \mathbb{R}^3$ è una superficie, per ogni $p \in S$ esiste una parametrizzazione locale ortogonale centrata in p .*

Dimostrazione: Sia $\varphi: U \rightarrow S$ una parametrizzazione locale qualunque centrata in p , e poniamo $X_1 = \partial_1$ e

$$X_2 = \partial_2 - \frac{(\partial_1, \partial_2)}{(\partial_1, \partial_1)} \partial_1 = \partial_2 - \frac{F}{E} \partial_1.$$

Allora X_1 è sempre perpendicolare a X_2 , per cui applicando il Teorema 4.1.5 otteniamo la parametrizzazione ortogonale cercata. $\square$

Osservazione 4.1.2. Ci si potrebbe chiedere se esistono parametrizzazioni locali *ortonormali*, cioè tali che $\|\partial_1\| \equiv \|\partial_2\| \equiv 1$ e $(\partial_1, \partial_2) \equiv 0$. La risposta è che questo accade se e solo se la superficie S è localmente isometrica a un piano. Infatti, in una parametrizzazione locale ortonormale si ha $E \equiv G \equiv 1$ e $F \equiv 0$, e la tesi segue dalla Proposizione 3.1.1. In particolare, la curvatura Gaussiana di S dev'essere nulla; quindi se $K \neq 0$ non possono esserci parametrizzazioni locali ortonormali.

Osservazione 4.1.3. Una conseguenza dell'osservazione precedente è che dati due campi vettoriali X_1, X_2 su una superficie S tali che $X_1(p) \wedge X_2(p) \neq O$, non è detto che esista una parametrizzazione locale φ centrata in p tale che si abbia esattamente $X_1 = \partial_1$ e $X_2 = \partial_2$ vicino a p . Infatti, se così fosse si potrebbe applicare la dimostrazione del Corollario precedente (dividendo i campi vettoriali lì ottenuti per la loro norma) per ricavare sempre una parametrizzazione ortonormale, mentre abbiamo appena visto che in generale questo non è possibile.

I prossimi due esercizi presentano altre applicazioni del Teorema 4.1.5:

Esercizio 4.1.2. Dimostra che se $p \in S$ non è ombelicale, allora esiste una parametrizzazione locale centrata in p le cui curve coordinate sono linee di curvatura.

Esercizio 4.1.3. Dimostra che se $p \in S$ è un punto iperbolico allora esiste una parametrizzazione locale centrata in p le cui curve coordinate sono linee asintotiche.

4.2 Geodetiche

Le rette nel piano sono ovviamente estremamente importanti per lo studio della geometria del piano; in questo paragrafo vogliamo introdurre l'equivalente delle rette per superfici qualsiasi.

Le rette (e più in generale i segmenti) possono essere caratterizzati in due modi: da un punto di vista globale come le curve più brevi congiungenti due punti, e da un punto di vista locale come le curve con vettore tangente costante. Per il nostro studio delle superfici converrà usare il punto di vista locale (coerentemente con l'approccio da noi seguito finora), e dedurremo la caratterizzazione globale in seguito, caratterizzazione che risulterà lievemente ma significativamente diversa da quella delle rette nel piano.

Dunque vogliamo identificare le curve su una superficie con vettore tangente "costante". Questo concetto di "costante" dev'essere intrinseco alla superficie; se il vettore tangente varia solo nella direzione normale alla superficie S , stando su S questa variazione non è visibile, e quindi per i nostri scopi è come se il vettore tangente non variasse affatto.

Per formalizzare questa intuizione iniziamo col definire la classe di oggetti di cui i vettori tangenti a una curva sono un tipico esempio.

Definizione 4.2.1: Un *campo vettoriale* lungo una curva $\sigma: I \rightarrow S$ è un'applicazione $\xi: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ di classe C^∞ tale che $\xi(t) \in T_{\sigma(t)}S$ per ogni $t \in I$. Lo spazio vettoriale dei campi vettoriali lungo σ sarà indicato con $\mathcal{T}(\sigma)$.

Osservazione 4.2.1. Se $\sigma: I \rightarrow S$ è una curva regolare a tratti, per noi un *campo vettoriale lungo* σ sarà un'applicazione *continua* $\xi: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $\xi(t) \in T_{\sigma(t)}S$ per ogni $t \in I$, e che sia di classe C^∞ in ogni sub-intervallo di I in cui σ è regolare.

ESEMPIO 4.2.1. Se $\sigma: I \rightarrow S$ è di classe C^∞ , il suo vettore tangente σ' è un buon esempio di campo vettoriale lungo σ .

Se ξ è un campo vettoriale lungo una curva σ contenuta in una superficie S , possiamo considerare la sua derivata ξ' in $\mathbb{R}^3$. Ma, come detto prima, questa derivata non ha significato lungo la superficie; solo la componente tangente a S è visibile dall'interno della superficie. Quindi un concetto geometricamente più significativo di derivata di un campo vettoriale lungo una curva contenuta in una superficie è il seguente:

Definizione 4.2.2: La *derivata covariante* di un campo vettoriale ξ lungo una curva σ è il campo vettoriale $D\xi \in \mathcal{T}(\sigma)$ dato da

$$D\xi(t) = \pi_{\sigma(t)} \left(\frac{d\xi}{dt}(t) \right),$$

dove $\pi_{\sigma(t)}: \mathbb{R}^3 \rightarrow T_{\sigma(t)}S$ è la proiezione ortogonale sul piano tangente a S in $\sigma(t)$.

Osservazione 4.2.2. Se $V \subset \mathbb{R}^3$ è un piano passante per l'origine, la proiezione ortogonale $\pi: \mathbb{R}^3 \rightarrow V$ è data dalla formula

$$\pi(v) = v - (v, N)N,$$

dove $N \in \mathbb{R}^3$ è un qualsiasi versore ortogonale a V .

Osservazione 4.2.3. Se ξ è un campo vettoriale lungo una curva $\sigma: I \rightarrow S$, allora esiste $w: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che possiamo scrivere $\xi'(t) = D\xi(t) + w(t)$, con $w(t)$ ortogonale a $T_{\sigma(t)}S$ per ogni $t \in I$. Quindi

$$(\xi', \tilde{\xi}) \equiv (D\xi, \tilde{\xi})$$

per ogni altro campo vettoriale $\tilde{\xi} \in \mathcal{T}(\sigma)$. Da questo segue subito che

$$\frac{d}{dt}(\xi, \tilde{\xi})_\sigma = (D\xi, \tilde{\xi})_\sigma + (\xi, D\tilde{\xi})_\sigma \quad (4.2.1)$$

per ogni coppia di campi vettoriali $\xi, \tilde{\xi} \in \mathcal{T}(\sigma)$.

Dalla definizione potrebbe sembrare che la derivata covariante dipenda dal modo in cui la superficie è immersa in $\mathbb{R}^3$. Invece, la derivata covariante è un concetto puramente intrinseco: dipende solo dalla prima forma fondamentale di S . Per vederlo, esprimiamo $D\xi$ in coordinate locali. Sia $\varphi: U \rightarrow S$ una parametrizzazione locale la cui immagine contenga il sostegno di una curva $\sigma: I \rightarrow S$. Se ξ è un campo vettoriale lungo σ , possiamo scrivere $\sigma(t) = \varphi(\sigma^1(t), \sigma^2(t))$ e $\xi(t) = \xi^1(t)\partial_1|_{\sigma(t)} + \xi^2(t)\partial_2|_{\sigma(t)}$ per ogni $t \in I$. Allora

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\xi^1 \frac{\partial \varphi}{\partial x^1} \circ \sigma \right) + \frac{d}{dt} \left(\xi^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x^2} \circ \sigma \right) = \sum_{i=1}^2 \left[\frac{d\xi^i}{dt} \partial_i|_\sigma + \xi^i \left((\sigma^1)' \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^1 \partial x^i} \circ \sigma + (\sigma^2)' \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2 \partial x^i} \circ \sigma \right) \right],$$

per cui

$$D\xi = \sum_{k=1}^2 \left[\frac{d\xi^k}{dt} + \sum_{i,j=1}^2 (\Gamma_{ij}^k \circ \sigma) (\sigma^i)' \xi^j \right] \partial_k|_\sigma. \quad (4.2.2)$$

Dunque D si esprime in termine dei simboli di Christoffel, e quindi dipende solo dalla prima forma fondamentale, come affermato.

La seguente definizione formalizza quindi la nostra idea di campo vettoriale “costante” lungo una curva contenuta in una superficie:

Definizione 4.2.3: Un campo vettoriale ξ lungo una curva σ il cui sostegno è contenuto in una superficie S è *parallelo* se $D\xi \equiv O$.

Il prossimo risultato mostra che campi vettoriali paralleli lungo una curva esistono (e ne esistono tanti), e che si comportano nei confronti della prima forma fondamentale in modo coerente con l'idea intuitiva di campi paralleli:

Proposizione 4.2.1: Sia $\sigma: I \rightarrow S$ una curva in una superficie S . Allora:

- (i) Dato $t_0 \in I$ e $v \in T_{\sigma(t_0)}S$, esiste un unico campo vettoriale $\xi \in \mathcal{T}(\sigma)$ parallelo tale che $\xi(t_0) = v$.
- (ii) Se $\xi, \tilde{\xi} \in \mathcal{T}(\sigma)$ sono campi vettoriali paralleli lungo σ , il prodotto scalare $(\xi, \tilde{\xi})_\sigma$ è costante. In particolare, la norma di un campo parallelo è costante.

Dimostrazione: (i) La (4.2.2) dice che localmente $D\xi \equiv O$ è un sistema di due equazioni differenziali ordinarie lineari; quindi l'asserto segue dall'usuale Teorema 1.2.4 di esistenza e unicità delle soluzioni dei sistemi lineari di equazioni differenziali ordinarie. Infatti, prima di tutto il Teorema 1.2.4 ci assicura l'esistenza di un'unica soluzione definita su un sottointervallo $\tilde{I}$ di I contenente t_0 e tale che $\sigma(\tilde{I})$ sia contenuto nell'immagine di una parametrizzazione locale. Sia ora $I_0 \subset I$ l'intervallo massimale contenente t_0 su cui sia definito un campo vettoriale ξ parallelo tale che $\xi(t_0) = v$. Se $I_0 \neq I$, sia $t_1 \in I$ un estremo di I_0 e prendiamo una parametrizzazione locale $\psi: V \rightarrow S$ centrata in $\sigma(t_1)$. Allora esiste sicuramente un $t_2 \in I_0$ tale che $\sigma(t_2) \in \psi(V)$, e il Teorema 1.2.4 ci assicura l'esistenza di un unico campo vettoriale $\tilde{\xi}$ definito

su $\sigma^{-1}(\psi(V))$ tale che $\tilde{\xi}(t_2) = \xi(t_2)$; in particolare, $\tilde{\xi}$ è definito anche in t_1 . Ma l'unicità ci assicura che $\tilde{\xi}$ e ξ coincidono sull'intersezione degli intervalli di definizione, per cui $\tilde{\xi}$ estende ξ anche a t_1 , contro l'ipotesi che t_1 fosse un estremo di I_0 . Quindi $I_0 = I$, come affermato.

(ii) La (4.2.1) implica

$$\frac{d}{dt}(\xi, \tilde{\xi})_\sigma = (\xi', \tilde{\xi}) + (\xi, \tilde{\xi}') = (D\xi, \tilde{\xi}) + (\xi, D\tilde{\xi}) \equiv 0,$$

e $(\xi, \tilde{\xi})$ è costante. $\square$

Osservazione 4.2.4. Non è difficile estendere questa proposizione al caso di curve regolari a tratti. Se $a = t_0 < \dots < t_k = b$ è una partizione di $[a, b]$ tale che la curva $\sigma: [a, b] \rightarrow S$ sia regolare in ciascun intervallo $[t_{j-1}, t_j]$ per $j = 1, \dots, k$, diremo che un campo vettoriale $\xi: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ lungo σ è *parallelo* se lo è ristretto a ciascun intervallo $[t_{j-1}, t_j]$. Allora basta applicare la Proposizione 4.2.1 a ciascun sub-intervallo $[t_{j-1}, t_j]$ per ottenere esattamente lo stesso enunciato anche per curve regolari a tratti.

Da questo punto di vista, la generalizzazione del concetto di “retta” per una superficie qualsiasi è una curva con vettore tangente parallelo:

Definizione 4.2.4: Una *geodetica* su una superficie S è una curva $\sigma: I \rightarrow S$ tale che σ' sia parallelo lungo σ .

Prima di tutto notiamo che per (4.2.2) l'equazione delle geodetiche in coordinate locali è

$$(\sigma^i)'' + \sum_{h,k=1}^2 (\Gamma_{hk}^i \circ \sigma)(\sigma^h)'(\sigma^k)' = 0, \quad (4.2.3)$$

per $i = 1, 2$. Quindi è un sistema di equazioni differenziali ordinarie non lineari, del second'ordine. Possiamo trasformarlo in un sistema di equazioni differenziali ordinarie del primo ordine introducendo delle variabili ausiliarie $v^1, \dots, v^n$ per rappresentare le componenti di σ' , in modo da ridurci al sistema equivalente del primo ordine

$$\begin{cases} (v^i)' + \sum_{h,k=1}^2 (\Gamma_{hk}^i \circ \sigma) v^h v^k = 0, \\ (\sigma^i)' = v^i. \end{cases} \quad (4.2.4)$$

In particolare:

Proposizione 4.2.2: Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regolare. Allora per ogni $p \in S$ e $v \in T_p S$ esiste una geodetica $\sigma: I \rightarrow S$ tale che $0 \in I$, $\sigma(0) = p$ e $\sigma'(0) = v$. Inoltre, se $\tilde{\sigma}: \tilde{I} \rightarrow S$ è un'altra geodetica soddisfacente le stesse condizioni allora σ e $\tilde{\sigma}$ coincidono in $I \cap \tilde{I}$. In particolare, per ogni $p \in S$ e $v \in T_p S$ esiste un massimo $\varepsilon_v \in (0, +\infty]$ e un'unica geodetica $\sigma_v: (-\varepsilon_v, \varepsilon_v) \rightarrow S$ tale che $\sigma_v(0) = p$ e $\sigma_v'(0) = v$.

Dimostrazione: Il Teorema 4.1.1 applicato a (4.2.4) ci dice che esistono $\varepsilon > 0$ e una curva $\sigma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U \subset S$ che è soluzione di (4.2.3) con condizioni iniziali $\sigma(0) = p$ e $\sigma'(0) = v$. Inoltre, se $\tilde{\sigma}$ è un'altra geodetica che soddisfa le stesse condizioni iniziali allora σ e $\tilde{\sigma}$ coincidono in un qualche intorno di 0. Sia I_0 il massimo intervallo contenuto in $I \cap \tilde{I}$ su cui σ e $\tilde{\sigma}$ coincidono. Se I_0 è strettamente contenuto in $I \cap \tilde{I}$, esiste un estremo t_0 di I_0 contenuto in $I \cap \tilde{I}$, e possiamo applicare il solito Teorema 4.1.1 con condizioni iniziali $\sigma(t_0)$ e $\sigma'(t_0)$. Ma allora σ e $\tilde{\sigma}$ coincidono anche in un intorno di t_0 , contro la definizione di I_0 . Quindi $I_0 = I \cap \tilde{I}$, e dunque esiste un'unica geodetica massimale uscente da un punto in una data direzione tangente. $\square$

Esercizio 4.2.1. Sia $F: S_1 \rightarrow S_2$ un'isometria locale fra superfici. Dimostra che se $\sigma: I \rightarrow S_1$ è una geodetica su S_1 allora $\tilde{\sigma} = F \circ \sigma$ è una geodetica su S_2 .

La prossima proposizione contiene alcune proprietà elementari delle geodetiche:

Proposizione 4.2.3: Sia $\sigma: I \rightarrow S$ una curva regolare in una superficie S . Allora:

- (i) σ è una geodetica se e solo se σ'' è sempre ortogonale alla superficie, cioè $\sigma''(t) \perp T_{\sigma(t)} S$ per ogni $t \in I$;
- (ii) se σ è una geodetica allora è parametrizzata rispetto a un multiplo della lunghezza d'arco, cioè $\|\sigma'\|$ è costante;

(iii) σ è una geodetica se e solo se è parametrizzata rispetto a un multiplo della lunghezza d'arco e la sua curvatura κ coincide con il modulo della curvatura normale $|\kappa_n|$ del versore tangente $\dot{\sigma}$.

Dimostrazione: (i) Segue dalla definizione di $D\sigma'$ come proiezione ortogonale di σ'' sui piani tangenti a S .

(ii) Segue subito dalla Proposizione 4.2.1.

(iii) Siccome l'enunciato è locale, possiamo supporre S orientabile, e sia N un campo di versori normali su S ; notiamo che il modulo della curvatura normale non dipende dalla scelta di N , e che vale la formula

$$\kappa_n = (\ddot{\sigma}, N \circ \sigma) = \frac{(\sigma'', N \circ \sigma)}{\|\sigma'\|^2}. \quad (4.2.5)$$

Per la (i), σ è una geodetica se e solo se σ'' è parallelo a $N \circ \sigma$. Inoltre, si verifica subito che $\|\sigma'\|$ è costante se e solo se $\ddot{\sigma} = \sigma''/\|\sigma'\|^2$, nel qual caso $\kappa = \|\sigma''\|/\|\sigma'\|^2$.

Supponiamo allora che σ sia una geodetica, per cui σ'' è parallelo a $N \circ \sigma$. Inoltre, per (ii), $\|\sigma'\|$ è costante; quindi $\kappa = \|\sigma''\|/\|\sigma'\|^2$ e la formula (4.2.5) implica

$$|\kappa_n| = \frac{|(\sigma'', N \circ \sigma)|}{\|\sigma'\|^2} = \frac{\|\sigma''\|}{\|\sigma'\|^2} = \kappa.$$

Viceversa, se $\|\sigma'\|$ è costante e $|\kappa_n| \equiv \kappa$, da (4.2.5) otteniamo $|(\sigma'', N \circ \sigma)| \equiv \|\sigma''\|$, che può avvenire solo se σ'' è parallelo a $N \circ \sigma$, e quindi, grazie a (i), solo se σ è una geodetica. $\square$

Dunque quanto una curva è o meno una geodetica si può misurare vedendo quanto la curvatura della curva differisce dalla curvatura normale della superficie nella direzione del vettore tangente alla curva. Vogliamo quantificare questa osservazione.

Sia $\sigma: I \rightarrow S$ una curva regolare su una superficie orientata S , e sia $N: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo di versori normali lungo σ , cioè tale che $\|N\| \equiv 1$ e $N(t) \perp T_{\sigma(t)}S$ per ogni $t \in I$. Se $\xi \in \mathcal{T}(\sigma)$ è un campo di *versori* lungo σ , derivando $(\xi, \xi) \equiv 1$ ricordando (4.2.1) si ottiene

$$0 = \frac{d}{dt}(\xi, \xi) = 2(D\xi, \xi)_\sigma.$$

Dunque $D\xi$ è ortogonale sia a N che a ξ ; quindi deve esistere una funzione $\lambda: I \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $D\xi = \lambda N \wedge \xi$. Inoltre, siccome $N \wedge \xi$ è un versore, otteniamo $\lambda = (D\xi, N \wedge \xi)$.

Definizione 4.2.5: Sia $\sigma: I \rightarrow S$ una curva regolare parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco su una superficie orientata S , e sia $N: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo di versori normali lungo σ . La *curvatura geodetica* di σ è la funzione $\kappa_g: I \rightarrow \mathbb{R}$ data da

$$\kappa_g = (D\dot{\sigma}, N \wedge \dot{\sigma}) = (\ddot{\sigma}, N \wedge \dot{\sigma}),$$

in modo che $D\dot{\sigma} = \kappa_g N \wedge \dot{\sigma}$. Nota che sostituendo N con $-N$ la curvatura geodetica cambia di segno.

In particolare, $\|D\dot{\sigma}\|^2 = \kappa_g^2$. Siccome $\ddot{\sigma} = D\dot{\sigma} + (\ddot{\sigma}, N)N$ è una decomposizione ortogonale, e abbiamo $\|\ddot{\sigma}\|^2 = \kappa^2$ e $|(\ddot{\sigma}, N)|^2 = |\kappa_n|^2$, si ricava subito la formula

$$\kappa^2 = \kappa_n^2 + \kappa_g^2. \quad (4.2.6)$$

In particolare, una curva σ parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco è una geodetica se e solo se la sua curvatura geodetica è identicamente nulla.

Nel seguito ci servirà la seguente formula per il calcolo della curvatura geodetica. Cominciamo con un

Lemma 4.2.4: Sia $\varphi: U \rightarrow S$ una parametrizzazione ortogonale di una superficie S , e poniamo $\xi_j = \partial_j/\|\partial_j\|$ per $j = 1, 2$. Sia poi $\sigma: I \rightarrow \varphi(U) \subseteq S$ una curva regolare parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco, e scriviamo $\sigma(s) = \varphi(\sigma^1(s), \sigma^2(s))$. Allora

$$(D\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left[\dot{\sigma}^2 \frac{\partial G}{\partial x^1} - \dot{\sigma}^1 \frac{\partial E}{\partial x^2} \right].$$

Dimostrazione: Abbiamo

$$(D\xi_1, \xi_2) = \left(\frac{d(\xi_1 \circ \sigma)}{dt}, \xi_2 \right) = \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x^1}, \xi_2 \right) \dot{\sigma}^1 + \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x^2}, \xi_2 \right) \dot{\sigma}^2.$$

Essendo $F = (\partial_1, \partial_2) \equiv 0$, troviamo

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial (x^1)^2}, \frac{\partial \varphi}{\partial x^2} \right) = - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^1}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^1 \partial x^2} \right) = - \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial x^2},$$

per cui

$$\left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x^1}, \xi_2 \right) = \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \varphi}{\partial x^1} \right), \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \varphi}{\partial x^2} \right) = - \frac{1}{2\sqrt{EG}} \frac{\partial E}{\partial x^2}.$$

Analogamente si trova

$$\left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x^2}, \xi_2 \right) = \left(\frac{\partial}{\partial x^2} \left(\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \varphi}{\partial x^1} \right), \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \varphi}{\partial x^2} \right) = \frac{1}{2\sqrt{EG}} \frac{\partial G}{\partial x^1},$$

e ci siamo. □

Da questo ricaviamo la seguente

Proposizione 4.2.5: Sia $\varphi: U \rightarrow S$ una parametrizzazione ortogonale di una superficie S , $\sigma: I \rightarrow \varphi(U) \subseteq S$ una curva regolare parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco, e scriviamo $\sigma(s) = \varphi(\sigma^1(s), \sigma^2(s))$. Allora

$$\kappa_g = \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left[\dot{\sigma}^2 \frac{\partial G}{\partial x^1} - \dot{\sigma}^1 \frac{\partial E}{\partial x^2} \right] + \frac{d\theta}{ds},$$

dove $\theta(s)$ è una determinazione continua dell'angolo da $\partial_1|_{\sigma(s)}$ a $\dot{\sigma}(s)$.

Dimostrazione: Poniamo $\xi_1 = \partial_1 / \|\partial_1\|$, $\xi_2 = \partial_2 / \|\partial_2\|$, e $N = \xi_1 \wedge \xi_2$; in particolare, $N \wedge \xi_1 = \xi_2$. Essendo $\{\xi_1, \xi_2\}$ una base ortonormale, possiamo scrivere $\dot{\sigma} = (\cos \theta)\xi_1 + (\sin \theta)\xi_2$. Quindi otteniamo

$$\begin{aligned} N \wedge \dot{\sigma} &= -(\sin \theta)\xi_1 + (\cos \theta)\xi_2, \\ \ddot{\sigma} &= -(\sin \theta)\dot{\theta}\xi_1 + (\cos \theta)\dot{\xi}_1 + (\cos \theta)\dot{\theta}\xi_2 + (\sin \theta)\dot{\xi}_2, \end{aligned}$$

da cui

$$D\dot{\sigma} = -(\sin \theta)\dot{\theta}\xi_1 + (\cos \theta)D\xi_1 + (\cos \theta)\dot{\theta}\xi_2 + (\sin \theta)D\xi_2.$$

Dunque essendo $(D\xi_1, \xi_1) = (D\xi_2, \xi_2) \equiv 0$ e $(D\xi_1, \xi_2) = -(\xi_1, D\xi_2)$, si ha

$$\kappa_g = (D\dot{\sigma}, N \wedge \dot{\sigma}) = (\sin \theta)^2 \dot{\theta} + (\cos \theta)^2 (D\xi_1, \xi_2) + (\cos \theta)^2 \dot{\theta} - (\sin \theta)^2 (\xi_1, D\xi_2) = (D\xi_1, \xi_2) + \dot{\theta}.$$

La tesi segue allora dal Lemma 4.2.4. □

ESEMPIO 4.2.2. Se σ è una curva regolare il cui sostegno è contenuto in un piano S , il vettore σ'' può essere ortogonale a S solo se è nullo (perché?). Quindi le geodetiche di un piano sono le curve con derivata seconda identicamente nulla, cioè le rette. Questo lo si può vedere anche notando che i simboli di Christoffel di un piano sono identicamente nulli.

ESEMPIO 4.2.3. Vogliamo determinare tutte le geodetiche di un cilindro circolare retto S parametrizzato come nell'Esempio 3.1.2. Prima di tutto, una retta è sempre una geodetica, per cui i meridiani del cilindro (le rette verticali contenute nel cilindro) sono geodetiche. Anche i paralleli (le circonferenze ottenute intersecando il cilindro con un piano ortogonale all'asse) parametrizzati rispetto a un multiplo della lunghezza d'arco sono geodetiche: infatti, il loro versore normale è parallelo al versore normale del cilindro (vedi l'Esempio 3.2.2), per cui possiamo applicare la Proposizione 4.2.3.(i). Per trovare le altre geodetiche, cominciamo dalle geodetiche uscenti dal punto $p_0 = (1, 0, 0)$. Ora, come visto nell'Esempio 3.1.8, l'applicazione $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow S$

data da $\varphi(x^1, x^2) = (\cos x^1, \sin x^1, x^2)$ è un'isometria locale, e quindi (Esercizio 4.2.1) manda geodetiche in geodetiche. Le geodetiche uscenti dall'origine nel piano sono le rette $t \mapsto (at, bt)$, con $(a, b) \neq (0, 0)$; quindi le curve

$$\sigma_{a,b}(t) = (\cos(at), \sin(at), bt)$$

sono geodetiche del cilindro uscenti da p_0 . Siccome si verifica facilmente che per ogni $v \in T_{p_0}S$ esiste una coppia $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tale che $\sigma'_{a,b}(0) = v$, la Proposizione 4.2.2 ci assicura che abbiamo ottenuto tutte le geodetiche uscenti da p_0 (e quindi se non sono un parallelo o un meridiano sono delle eliche circolari). Infine, tramite una traslazione e una rotazione, che sono chiaramente isometrie, possiamo portare p_0 in qualsiasi altro punto del cilindro, e quindi le geodetiche del cilindro sono tutte e sole le eliche circolari contenute nel cilindro (oltre ai meridiani e ai paralleli).

ESEMPIO 4.2.4. Le geodetiche sulla sfera sono i cerchi massimi. Infatti, un cerchio massimo è dato dall'intersezione della sfera con un piano passante per il centro della sfera, e quindi il suo versore normale è parallelo al versore normale della sfera (vedi l'Esempio 3.2.3). D'altra parte, dato un punto e una direzione tangente esiste sempre un cerchio massimo passante per quel punto e tangente a quella direzione, per cui non ci sono altre geodetiche.

ESEMPIO 4.2.5. Vogliamo studiare localmente le geodetiche su una superficie di rotazione, parametrizzata come nell'Esempio 3.1.6. Usando i simboli di Christoffel calcolati nell'Esempio 3.3.1 vediamo che una curva $\sigma(t) = \varphi(x(t), \theta(s))$ è una geodetica se e solo se

$$\begin{cases} \theta'' + \frac{2\alpha'}{\alpha}\theta'x' = 0, \\ x'' - \frac{\alpha\alpha'}{(\alpha')^2 + (\beta')^2}(\theta')^2 + \frac{\alpha'\alpha'' + \beta'\beta''}{(\alpha')^2 + (\beta')^2}(x')^2 = 0. \end{cases} \quad (4.2.7)$$

Prima di tutto, i meridiani, cioè le curve $\sigma(s) = \varphi(x(s), \theta_0)$, parametrizzati rispetto alla lunghezza d'arco, sono geodetiche. Infatti, la prima delle (4.2.7) è chiaramente soddisfatta. Inoltre, dire che σ è parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco equivale a dire che $E(x')^2 \equiv 1$ cioè

$$(x')^2 \equiv \frac{1}{(\alpha')^2 + (\beta')^2}, \quad (4.2.8)$$

grazie all'Esempio 3.1.6. Derivando rispetto a s , ricordando che il secondo membro è valutato in $x(s)$, si ottiene

$$2x'x'' = -\frac{2(\alpha'\alpha'' + \beta'\beta'')}{((\alpha')^2 + (\beta')^2)^2}x' = -\frac{2(\alpha'\alpha'' + \beta'\beta'')}{(\alpha')^2 + (\beta')^2}(x')^3,$$

e quindi, essendo x' sempre diverso da zero per la (4.2.8),

$$x'' = -\frac{\alpha'\alpha'' + \beta'\beta''}{(\alpha')^2 + (\beta')^2}(x')^2,$$

per cui anche la seconda delle (4.2.7) è soddisfatta.

Vediamo ora quando un parallelo, cioè una curva $\sigma(s) = \varphi(x_0, \theta(s))$, parametrizzato rispetto alla lunghezza d'arco, è una geodetica. La prima delle (4.2.7) ci dice che θ' dev'essere costante; per l'esattezza, si deve avere $|\theta'| \equiv \alpha(x_0)^{-1}$, grazie all'Esempio 3.1.6. La seconda delle (4.2.7) allora diventa

$$\frac{\alpha'(x_0)}{\alpha(x_0)(\alpha'(x_0)^2 + \beta'(x_0)^2)} = 0,$$

cioè $\alpha'(x_0) = 0$. In altre parole, un parallelo è una geodetica se e solo se è ottenuto ruotando un punto della generatrice in cui il vettore tangente della generatrice sia parallelo all'asse di rotazione della superficie.

Vogliamo ora dedurre una proprietà importante delle geodetiche su una superficie di rotazione. La prima delle (4.2.7), moltiplicata per α^2 , è equivalente a $(\alpha^2\theta')' = 0$; quindi la quantità $\alpha^2\theta$ è costante lungo una

geodetica. D'altra parte, l'angolo $\psi \in [0, \pi/2]$ di una geodetica $\sigma(s) = \varphi(x(s), \theta(s))$, parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco, con il parallelo che la interseca è dato da

$$\cos \psi = \frac{|(\partial_2, \dot{\sigma})_\sigma|}{\sqrt{G}} = |\alpha \theta'|.$$

Siccome α è il raggio r del parallelo nel punto d'intersezione otteniamo la *relazione di Clairaut*: il prodotto $r \cos \psi$ del raggio del parallelo per il coseno dell'angolo fra il parallelo e la geodetica è costante lungo ogni geodetica parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco. Questa relazione è molto utile per lo studio qualitativo del comportamento delle geodetiche sulle superfici di rotazione.

Il resto di questo paragrafo sarà dedicato alla dimostrazione del fatto che le curve più brevi fra due punti di una superficie sono delle geodetiche, e che il viceversa vale localmente.

La Proposizione 4.2.2 ci dice che per ogni $p \in S$ e $v \in T_p S$ esiste un'unica geodetica massimale $\sigma_v: (-\varepsilon_v, \varepsilon_v) \rightarrow S$ con $\sigma_v(0) = p$ e $\sigma'_v(0) = v$. Una conseguenza del prossimo lemma è che il sostegno di σ_v dipende solo dalla direzione di v :

Lemma 4.2.6: Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie, $p \in M$, $v \in T_p M$ e $c, t \in \mathbb{R}$. Allora si ha

$$\sigma_{cv}(t) = \sigma_v(ct) \quad (4.2.9)$$

non appena uno dei due membri è definito. In particolare, $\varepsilon_{cv} = \varepsilon_v/|c|$ se $c \neq 0$.

Dimostrazione: Se $c = 0$ non c'è nulla da dimostrare. Se $c \neq 0$, cominciamo col dimostrare che (4.2.9) vale non appena $\sigma_v(ct)$ esiste. Poniamo $\tilde{\sigma}(t) = \sigma_v(ct)$; chiaramente $\tilde{\sigma}(0) = p$ e $\tilde{\sigma}'(0) = cv$, per cui basta dimostrare che $\tilde{\sigma}$ è una geodetica. Ma infatti in coordinate locali abbiamo

$$\begin{aligned} D\tilde{\sigma}'(t) &= \sum_{k=1}^2 \left[\frac{d}{dt}(\tilde{\sigma}^k)'(t) + \sum_{i,j=1}^2 \Gamma_{ij}^k(\tilde{\sigma}(t))(\tilde{\sigma}^i)'(t)(\tilde{\sigma}^j)'(t) \right] \partial_k|_{\tilde{\sigma}(t)} \\ &= \sum_{k=1}^2 \left[c^2(\sigma_v^k)''(ct) + c^2 \sum_{i,j=1}^2 \Gamma_{ij}^k(\sigma_v(ct))(\sigma_v^i)'(ct)(\sigma_v^j)'(ct) \right] \partial_k|_{\sigma_v(ct)} = c^2 D\sigma'_v(ct) = 0, \end{aligned}$$

e ci siamo.

Infine, supponiamo che $\sigma_{cv}(t)$ esista, e poniamo $v' = cv$ e $s = ct$. Allora $\sigma_{cv}(t) = \sigma_{v'}(c^{-1}s)$ esiste, per cui è uguale a $\sigma_{c^{-1}v'}(s) = \sigma_v(ct)$, e ci siamo. $\square$

Definizione 4.2.6: Sia S una superficie, e $p \in S$. Posto $\mathcal{E}_p = \{v \in T_p S \mid \varepsilon_v > 1\}$, la mappa esponenziale $\exp_p: \mathcal{E}_p \rightarrow S$ di S in p è data da $\exp_p(v) = \sigma_v(1)$.

Lemma 4.2.7: Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie e $p \in S$. Allora $\mathcal{E}_p$ è un intorno aperto dell'origine in $T_p S$; inoltre l'applicazione $\exp_p: \mathcal{E}_p \rightarrow S$ è di classe C^∞ , ed è un diffeomorfismo di un intorno di O in $T_p S$ con un intorno U di p in S .

Dimostrazione: Il fatto che $\mathcal{E}_p$ sia aperto, e che $\exp_p$ sia di classe C^∞ , è conseguenza immediata del Teorema 4.1.1. Calcoliamo il differenziale di $\exp_p$ nell'origine. Se $w \in T_p S$, per definizione abbiamo

$$d(\exp_p)_O(w) = \frac{d}{dt}(\exp_p \circ \tau) \Big|_{t=0},$$

dove τ è una curva in $T_p S$ con $\tau(0) = O$ e $\tau'(0) = w$. Una tale curva è $\tau(t) = tw$; quindi

$$d(\exp_p)_O(w) = \frac{d}{dt} \exp_p(tw) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \sigma_{tw}(1) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \sigma_w(t) \Big|_{t=0} = w,$$

grazie a (4.2.9). Dunque $d(\exp_p)_O = \text{id}$ è invertibile, e quindi la mappa esponenziale è un diffeomorfismo di un intorno di O in $T_p S$ con un intorno di p in S . $\square$

In particolare notiamo che (4.2.9) implica che le geodetiche uscenti da un punto $p \in S$ si possono scrivere nella forma

$$\sigma_v(t) = \exp_p(tv).$$

Definizione 4.2.7: Se $p \in S$ e $\delta > 0$ poniamo $B_p(O, \delta) = \{v \in T_p S \mid \|v\|_p < \delta\}$. Il raggio d'iniettività $\text{inj rad}(p)$ di S in p è il più grande $\delta > 0$ tale che $\exp_p: B_p(O, \delta) \rightarrow S$ sia un diffeomorfismo con l'immagine. Se $0 < \delta \leq \text{inj rad}(p)$, diremo che l'insieme $B_\delta(p) = \exp_p(B_p(O, \delta))$ è la *palla geodetica* di centro p e raggio δ . Le geodetiche uscenti da p , cioè le curve della forma $t \mapsto \exp_p(tv)$, sono dette *geodetiche radiali*; le curve immagine tramite $\exp_p$ delle circonferenze di centro l'origine in $T_p S$ sono dette *circonferenze geodetiche*. Posto $B_\delta^*(p) = B_\delta(p) \setminus \{p\}$, definiamo il *campo radiale* $\partial/\partial r \in \mathcal{T}(B_\delta^*(p))$ con la formula

$$\forall q = \exp_p(v) \in B_\delta^*(p) \quad \left. \frac{\partial}{\partial r} \right|_q = \frac{\sigma'_v(1)}{\|v\|} = \dot{\sigma}_v(1) = \dot{\sigma}_{v/\|v\|}(\|v\|),$$

dove la penultima eguaglianza segue dal fatto che $\|\sigma'_v(1)\| = \|\sigma'_v(0)\| = \|v\|$, e l'ultima eguaglianza si ottiene derivando $\sigma_{v/\|v\|}(t) = \sigma_v(t/\|v\|)$.

Lemma 4.2.8: (Gauss) Dato $p \in S$, sia $B_\delta(p) \subset S$ una palla geodetica di centro p . Allora il campo radiale è ortogonale a tutte le circonferenze geodetiche in $B_\delta(p)$.

Dimostrazione: Prendiamo $q \in B_\delta^*(p)$, e $v \in T_p S$ tale che $q = \exp_p(v)$. Fissiamo inoltre una base ortonormale $\{E_1, E_2\}$ di $T_p S$ tale che $E_1 = v/\|v\|$. Allora la geodetica radiale da p a q parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco è $\sigma_{E_1}(t) = \exp_p(tE_1)$, mentre la circonferenza geodetica passante per q è parametrizzata dalla curva $\tau(s) = \exp_p(\|v\|(\cos s)E_1 + \|v\|(\sin s)E_2)$. Infine, il campo radiale nei punti di σ_{E_1} è dato da

$$\left. \frac{\partial}{\partial r} \right|_{\sigma_{E_1}(t)} = \dot{\sigma}_{E_1}(t).$$

Il nostro obiettivo è dimostrare che $\dot{\sigma}_{E_1}(\|v\|)$ è ortogonale a $\tau'(0)$. Per far ciò, introduciamo l'applicazione $\Sigma: (-\pi, \pi) \times (0, \delta) \rightarrow S$ definita da

$$\Sigma(s, t) = \exp_p(t(\cos s)E_1 + t(\sin s)E_2),$$

in modo che $\sigma_{E_1}(t) = \Sigma(0, t)$ e $\tau(s) = \Sigma(s, \|v\|)$. In particolare, il nostro obiettivo è calcolare

$$\left(\frac{\partial \Sigma}{\partial t}(0, \|v\|), \frac{\partial \Sigma}{\partial s}(0, \|v\|) \right).$$

Poniamo $v_s = (\cos s)E_1 + (\sin s)E_2$, in modo da poter scrivere $\Sigma(s, t) = \sigma_{v_s}(t)$. Ora abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial t}(s, t), \frac{\partial \Sigma}{\partial s}(s, t) \right) &= \left(\frac{\partial}{\partial t} \dot{\sigma}_{v_s}(t), \frac{\partial \Sigma}{\partial s}(s, t) \right) + \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial t}(s, t), \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial t \partial s}(s, t) \right) \\ &= \left(D \dot{\sigma}_{v_s}(t), \frac{\partial \Sigma}{\partial s}(s, t) \right) + \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial t}(s, t), \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial s \partial t}(s, t) \right) \\ &= \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial t}(s, t), \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial s \partial t}(s, t) \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} \left\| \frac{\partial \Sigma}{\partial t}(s, t) \right\|^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} \|\dot{\sigma}_{v_s}(t)\|^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} \|\dot{\sigma}_{v_s}(0)\|^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} \|v_s\|^2 \\ &= 0, \end{aligned}$$

in quanto $\|v_s\| \equiv 1$. Ma allora $(\partial \Sigma / \partial t, \partial \Sigma / \partial s)$ non dipende da t , e

$$\left(\frac{\partial \Sigma}{\partial t}(0, \|v\|), \frac{\partial \Sigma}{\partial s}(0, \|v\|) \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial t}(0, t), \frac{\partial \Sigma}{\partial s}(0, t) \right) = 0,$$

come voluto, in quanto

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial \Sigma}{\partial t}(0, t) = \lim_{t \rightarrow 0} \dot{\sigma}_{E_1}(t) = E_1 \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial \Sigma}{\partial s}(0, t) = \lim_{t \rightarrow 0} t d(\exp_p)_{tE_1}(E_2) = 0.$$

□

Abbiamo quindi la caratterizzazione delle geodetiche come curve (localmente) minimizzanti la distanza fra due punti:

Teorema 4.2.9: *Sia S una superficie, e $p \in S$. Allora:*

- (i) *Se $0 < \delta \leq \text{inj rad}(p)$, allora per ogni $q \in B_\delta(p)$ la geodetica radiale da p a q è l'unica (a meno di riparametrizzazioni) curva più breve in S congiungente p e q .*
- (ii) *Sia $\sigma: [0, 1] \rightarrow S$ è una curva regolare in S congiungente due punti p e q . Se σ è la curva più breve fra quelle regolari a tratti congiungenti p e q allora σ è una geodetica.*

Dimostrazione: (i) Sia $q_0 \in B_\delta(p)$, scegliamo $v_0 \in T_p S$ tale che $q_0 = \exp_p(v_0)$, e sia $E_1 = v_0/\|v_0\|$, in modo che $\sigma_{E_1}: [0, \|v_0\|] \rightarrow S$ sia la geodetica radiale parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco tale che $\sigma_{E_1}(\|v_0\|) = q_0$; dimostreremo che se $\tau: [0, \ell] \rightarrow S$ è un'altra curva regolare a tratti parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco in S da p a q_0 allora $L(\tau) \geq L(\sigma_{E_1})$, con uguaglianza se e solo se $\tau = \sigma_{E_1}$.

Se τ ritorna più volte in p , chiaramente non può essere la curva più corta da p a q_0 ; quindi possiamo supporre che $\tau(t) \neq p$ per ogni $t > 0$.

Supponiamo inoltre che il sostegno di τ sia contenuto in $B_\delta(p)$; dopo vedremo come rimuovere questa ipotesi. In questo caso, per ogni $s \in (0, \ell]$ in cui τ sia derivabile esiste $a(s) \in \mathbb{R}$ tale che possiamo scrivere

$$\dot{\tau}(s) = a(s) \frac{\partial}{\partial r} \Big|_{\tau(s)} + w(s)$$

per un opportuno $w(s) \in T_{\tau(s)} S$ ortogonale al campo radiale, e quindi (per il lemma precedente) tangente alla circonferenza geodetica passante per $\tau(s)$.

Ora, sia $r: B_\delta(p) \rightarrow \mathbb{R}^+$ definita da $r(q) = \|\exp_p^{-1}(q)\|$. Chiaramente, le circonferenze geodetiche sono le curve di livello di r ; quindi $dr_q(w) = 0$ per ogni vettore $w \in T_q S$ tangente alla circonferenza geodetica passante per q . Inoltre, se $q = \exp_p(v)$ si ha

$$dr_q \left(\frac{\partial}{\partial r} \Big|_q \right) = dr_{\exp_p(v)} \left(\frac{\sigma'_v(1)}{\|v\|} \right) = \frac{1}{\|v\|} \frac{d}{dt} (r \circ \exp_p(tv)) = \frac{1}{\|v\|} \frac{d}{dt} (t\|v\|) \equiv 1,$$

e quindi otteniamo

$$\frac{d(r \circ \tau)}{ds}(s) = dr_{\tau(s)}(\dot{\tau}(s)) = a(s).$$

Siamo pronti a stimare la lunghezza di τ . Infatti:

$$\begin{aligned} L(\tau) &= \int_0^\ell \|\dot{\tau}(s)\| ds = \int_0^\ell \sqrt{|a(s)|^2 + \|w(s)\|^2} ds \\ &\geq \int_0^\ell |a(s)| ds \geq \int_0^\ell a(s) ds = \int_0^\ell \frac{d(r \circ \tau)}{ds}(s) ds \\ &= r(\tau(\ell)) - r(\tau(0)) = r(q_0) - r(p) = \|v_0\| = L(\sigma_{E_1}). \end{aligned}$$

Dunque τ è lunga almeno quanto σ_{E_1} . L'uguaglianza è possibile solo se $w(t) = 0$ e $a(t) \geq 0$ per ogni t ; ma allora, essendo $\dot{\tau}$ di lunghezza unitaria, ne segue che τ dev'essere una traiettoria del campo radiale passante per q_0 . Ma σ_{E_1} è una traiettoria del campo radiale passante per q_0 , e quindi il Teorema 4.1.2 implica $\tau = \sigma_{E_1}$, come voluto.

Infine, se l'immagine di τ non è contenuta in $B_p(\delta)$, sia $t_1 > 0$ il primo valore per cui τ interseca $\partial B_p(\delta)$. Allora il ragionamento precedente mostra che

$$L(\tau) \geq L(\tau|_{[0, t_1]}) \geq \delta > \|v_0\|,$$

ed è fatta.

(ii) Se σ è la curva più breve fra p e q , lo è anche fra due qualsiasi punti della sua immagine: se così non fosse, potremmo sostituirne un pezzo con uno più breve e ottenere una curva regolare a tratti da p a q più corta di σ . Ma abbiamo appena fatto vedere che localmente le curve più brevi fra due punti sono geodetiche; quindi σ dev'essere una geodetica. $\square$

Osservazione 4.2.5. Un segmento di cerchio massimo sulla sfera unitaria S^2 che sia più lungo di π è un esempio di geodetica che non è la curva più breve fra i suoi estremi: il segmento complementare dello stesso cerchio massimo è più corto.

Osservazione 4.2.6. Non sempre esiste la curva più breve che congiunge due punti di una superficie. Per esempio, se $S = \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$ e $p \in S$, allora quale che sia la curva in S che collega p e $-p$ esiste sempre una curva più corta in S da p a $-p$. Si può però dimostrare che se $S \subset \mathbb{R}^3$ è una superficie chiusa in $\mathbb{R}^3$, allora ogni coppia di punti di S può venire collegata da una curva in S di lunghezza minima, che è necessariamente una geodetica.

4.3 Il teorema di Gauss-Bonnet

Questo paragrafo è dedicato alla dimostrazione del teorema di Gauss-Bonnet, che è indubbiamente uno dei risultati più importanti (se non il più importante in assoluto) della geometria differenziale delle superfici. Infatti, il teorema di Gauss-Bonnet rivela una relazione inaspettata e profonda fra concetti puramente locali e definiti in termini differenziali, quali la curvatura Gaussiana e la curvatura geodetica, e la topologia globale della superficie.

Come vedremo, il teorema di Gauss-Bonnet ha una versione locale e una versione globale. Abbiamo già introdotto la maggior parte degli elementi necessari per la dimostrazione della versione locale (che è comunque un prerequisito per la versione globale): la curvatura Gaussiana (e in particolare il Lemma 3.3.3); la curvatura geodetica (e in particolare la Proposizione 4.2.5); e il Teorema 1.4.1 delle tangenti. Passiamo ora agli ingredienti mancanti, cominciando col definire esattamente su quali sottoinsiemi di una superficie vogliamo concentrare la nostra attenzione.

Prima di tutto, adattiamo al caso di una superficie la Definizione 1.4.2 di poligono curvilineo.

Definizione 4.3.1: Sia $\sigma: [a, b] \rightarrow S$ una curva regolare a tratti in una superficie orientata, e scegliamo una suddivisione $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$ di $[a, b]$ tale che $\sigma|_{[t_{j-1}, t_j]}$ sia regolare per $j = 1, \dots, k$. Supponiamo anche che σ sia parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco. Come nel caso di curve piane poniamo

$$\dot{\sigma}(t_j^-) = \lim_{t \rightarrow t_j^-} \dot{\sigma}(t) \quad \text{e} \quad \dot{\sigma}(t_j^+) = \lim_{t \rightarrow t_j^+} \dot{\sigma}(t);$$

entrambi sono vettori di $T_{\sigma(t_j)}S$, in generale distinti. Ovviamente, $\dot{\sigma}(t_0^-)$ e $\dot{\sigma}(t_k^+)$ non sono definiti, a meno che la curva sia chiusa, nel qual caso si pone $\dot{\sigma}(t_0^-) = \dot{\sigma}(t_k^-)$ e $\dot{\sigma}(t_k^+) = \dot{\sigma}(t_0^+)$. Diremo che t_j è una *cuspid* di σ se $\dot{\sigma}(t_j^-) = -\dot{\sigma}(t_j^+)$. Se t_j non è una cuspid, l'angolo esterno $\varepsilon_j \in (-\pi, \pi)$ è l'angolo fra $\dot{\sigma}(t_j^-)$ e $\dot{\sigma}(t_j^+)$ in $T_{\sigma(t_j)}S$, positivo se $\{\dot{\sigma}(t_j^-), \dot{\sigma}(t_j^+)\}$ è una base orientata positivamente di $T_{\sigma(t_j)}S$, negativo altrimenti. I punti in cui l'angolo esterno è diverso da zero saranno detti *vertici* della curva. Infine, un *poligono curvilineo* è una curva regolare a tratti semplice chiusa parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco e priva di cuspidi.

Per poligoni curvilinei contenuti nell'immagine di una parametrizzazione locale possiamo definire anche il concetto di indice di rotazione.

Definizione 4.3.2: Sia $\sigma: [a, b] \rightarrow S$ un poligono curvilineo in una superficie S , e supponiamo che il sostegno di σ sia contenuto nell'immagine di una parametrizzazione locale $\varphi: U \rightarrow S$. Sia $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$ una partizione di $[a, b]$ tale che $\sigma|_{[t_{j-1}, t_j]}$ sia regolare per $j = 1, \dots, k$. Definiamo la funzione *angolo di rotazione* $\theta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ nel seguente modo: sia $\theta: [a, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$ la determinazione continua dell'angolo fra l'asse $\partial_1|_\sigma$ e $\dot{\sigma}$ scelta in modo che $\theta(a) \in (-\pi, \pi]$. Poniamo poi

$$\theta(t_1) = \lim_{t \rightarrow t_1^-} \theta(t) + \varepsilon_1,$$

dove ε_1 è l'angolo esterno in t_1 . Estendiamo poi con continuità θ su $[t_1, t_2]$ — cioè $\theta: [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}$ è la determinazione continua dell'angolo fra $\partial_1|_\sigma$ e $\dot{\sigma}$ che parte da $\theta(t_1)$ — e continuiamo per induzione, ponendo infine

$$\theta(b) = \lim_{t \rightarrow b^-} \theta(t) + \varepsilon_k,$$

dove ε_k è l'angolo esterno in $b = t_k$. Infine, diremo *indice di rotazione* della curva σ il numero

$$\rho(\sigma) = \frac{1}{2\pi}(\theta(b) - \theta(a)).$$

Siccome $\dot{\sigma}(t_k^+) = \dot{\sigma}(t_0^+)$, l'indice di rotazione dev'essere un numero intero.

Viene naturale confrontare l'indice di rotazione così definito con quello della curva $\sigma_o = \varphi^{-1} \circ \sigma$ nel piano. Non è difficile verificare che coincidono:

Lemma 4.3.1: *Sia $\sigma: [a, b] \rightarrow S$ un poligono curvilineo contenuto nell'immagine di una parametrizzazione locale $\varphi: U \rightarrow S$ di una superficie S , e poniamo $\sigma_o = \varphi^{-1} \circ \sigma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$. Allora l'indice di rotazione di σ coincide con quello di σ_o .*

Dimostrazione: Il punto è confrontare come calcoliamo l'angolo di rotazione e gli angoli esterni per σ e per σ_o . L'angolo di rotazione per σ_o è ottenuto calcolando l'angolo fra la direzione costante $\partial/\partial x^1$ e il versore tangente $\dot{\sigma}_o(t)$ usando il prodotto scalare canonico $(\cdot, \cdot)^0$ di $\mathbb{R}^2$. Invece, l'angolo di rotazione per σ è ottenuto calcolando l'angolo fra la direzione variabile $\partial_1|_{\sigma(t)} = d\varphi_{\sigma_o(t)}(\partial/\partial x^1)$ e il versore tangente $\dot{\sigma}(t) = d\varphi_{\sigma_o(t)}(\dot{\sigma}_o(t))$ usando il prodotto scalare in $T_{\sigma(t)}S$ dato dalla prima forma fondamentale. Una situazione analoga vale anche per il calcolo degli angoli esterni.

Questo vuol dire che possiamo ottenere l'angolo di rotazione e gli angoli esterni di σ lavorando solo con $\partial/\partial x^1$ e i vettori tangenti di σ_o se per calcolare l'angolo di vettori applicati nel punto $\sigma_o(t)$ usiamo il prodotto scalare

$$\forall v, w \in \mathbb{R}^2 \quad (v, w)_t^1 = (d\varphi_{\sigma_o(t)}(v), d\varphi_{\sigma_o(t)}(w))_{\sigma(t)}.$$

Questo suggerisce l'idea di misurare angoli di rotazione e angoli esterni nel punto $\sigma_o(t)$ usando più in generale il prodotto scalare

$$(\cdot, \cdot)_t^s = (1-s)(\cdot, \cdot)^0 + s(\cdot, \cdot)_t^1$$

al variare di $s \in [0, 1]$. In questo modo otteniamo per ogni $s \in [0, 1]$ un indice di rotazione ρ_s , che dipende chiaramente con continuità da s . Ma d'altra parte ρ_s è sempre un intero, in quanto $\dot{\sigma}_o(b^+) = \dot{\sigma}_o(a^+)$; quindi ρ_s è costante. Siccome ρ_0 è l'indice di rotazione di σ_o , e ρ_1 è l'indice di rotazione di σ , abbiamo finito. $\square$

Introduciamo ora gli insiemi su cui potremo dimostrare il Teorema di Gauss-Bonnet.

Definizione 4.3.3: Una *regione regolare* $R \subseteq S$ in una superficie S è un compatto ottenuto come chiusura di un aperto connesso il cui bordo è costituito da un numero finito di poligoni curvilinei disgiunti. Una regione regolare è detta *semplice* se è omeomorfa a un disco chiuso (per cui in particolare il bordo è costituito da un solo poligono curvilineo).

Osservazione 4.3.1. Notiamo esplicitamente che una conseguenza (non ovvia) dell'Esercizio 1.3.3 è che una regione regolare R con bordo costituito da un solo poligono curvilineo e contenuta nell'immagine di una parametrizzazione locale è necessariamente semplice. Questo *non* è vero se R non è contenuta nell'immagine di una parametrizzazione locale. Per esempio, una circonferenza piccola in un toro è bordo di due regioni regolari: una semplice, contenuta nell'immagine di una parametrizzazione locale, e l'altra non semplice (e non contenuta nell'immagine di alcuna parametrizzazione locale).

Se R è una regione regolare contenuta in una superficie orientata, possiamo orientare il bordo di R .

Definizione 4.3.4: Sia $R \subset S$ una regione regolare di una superficie orientata. Se $p \in \partial R$ e $v \in T_p S$, diremo che v *punta verso l'interno di R* se per ogni curva $\tau: (-\delta, \delta) \rightarrow S$ con $\tau(0) = p$ e $\tau'(0) = v$ esiste un $0 < \varepsilon < \delta$ tale che $\tau(t) \in R$ per ogni $t \in (0, \varepsilon)$. Se $\sigma: [a, b] \rightarrow S$ è un poligono curvilineo parametrizzante una componente del bordo di R , diremo che σ è *orientata positivamente rispetto a R* se, per ogni $t \in [a, b]$ tale che $p = \sigma(t)$ non sia un vertice, l'unico versore $v \in T_p S$ tale che $\{\dot{\sigma}(t), v\}$ sia una base ortonormale orientata positivamente di $T_p S$ punta verso l'interno di R . Infine, diremo che il bordo di R è *orientato positivamente* se ogni sua componente è orientata positivamente rispetto a R .

Lemma 4.3.2: Sia $R \subset S$ una regione regolare semplice di una superficie contenuta nell'immagine di una parametrizzazione locale ortogonale $\varphi: U \rightarrow S$. Sia $\sigma: [a, b] \rightarrow S$ una parametrizzazione del bordo di R , e poniamo $\sigma_o = \varphi^{-1} \circ \sigma$. Orientiamo $\varphi(U)$ prendendo $N = \partial_1 \wedge \partial_2 / \|\partial_1 \wedge \partial_2\|$ come campo di versori normali. Allora σ è orientata positivamente rispetto a R se e solo se σ_o è orientata positivamente in $\mathbb{R}^2$.

Dimostrazione: La curva σ_o è un poligono curvilineo del piano, bordo della regione regolare semplice del piano $R_o = \varphi^{-1}(R)$. Indichiamo con $\mathbf{n}_o$ il versore normale di σ_o , ove definito. Allora $d\varphi_{\sigma_o(t)}(\mathbf{n}_o)$ punta verso l'interno di R se e solo se $\mathbf{n}_o$ punta verso l'interno di R_o , cioè se e solo se σ_o è orientata positivamente.

D'altra parte, essendo φ ortogonale, $\{\dot{\sigma}(t), d\varphi_{\sigma_o(t)}(\mathbf{n}_o)\}$ è una base ortogonale orientata positivamente (rispetto all'orientazione data) di $T_{\sigma(t)}S$. Quindi $d\varphi_{\sigma_o(t)}(\mathbf{n}_o)$ punta verso l'interno di R se e solo se σ è orientata positivamente rispetto a R , e ci siamo. $\square$

Un altro concetto che ci servirà è quello di integrale di funzioni definite su regioni regolari contenute nell'immagine di una parametrizzazione locale. Per far ciò, ricordiamo il teorema di cambiamento di variabile negli integrali multipli:

Teorema 4.3.3: Sia $h: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ un diffeomorfismo fra aperti di $\mathbb{R}^n$. Allora per ogni funzione $f: \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile, la funzione $(f \circ h)|\det \text{Jac}(h)|$ è integrabile in Ω_1 e si ha

$$\int_{\Omega_1} (f \circ h) |\det \text{Jac}(h)| dx^1 \cdots dx^n = \int_{\Omega_2} f dx^1 \cdots dx^n.$$

Allora:

Lemma 4.3.4: Sia $R \subseteq S$ una regione regolare di una superficie S , e $f \in C^\infty(S)$. Supponiamo esista una parametrizzazione locale $\varphi: U \rightarrow S$ di S tale che $R \subset \varphi(U)$. Allora l'integrale

$$\int_{\varphi^{-1}(R)} (f \circ \varphi) \sqrt{EG - F^2} dx^1 dx^2$$

non dipende da φ .

Dimostrazione: Supponiamo che $\tilde{\varphi}: \tilde{U} \rightarrow S$ sia un'altra parametrizzazione locale tale che $R \subset \tilde{\varphi}(\tilde{U})$, e poniamo $h = \varphi^{-1} \circ \tilde{\varphi}$. Siccome $\sqrt{EG - F^2} = \|\partial_1 \wedge \partial_2\|$, per la formula (2.4.1) e il Teorema 4.3.3 abbiamo

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\varphi}^{-1}(R)} (f \circ \tilde{\varphi}) \sqrt{\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2} dx^1 dx^2 &= \int_{\tilde{\varphi}^{-1}(R)} [(f \circ \varphi) \|\partial_1 \wedge \partial_2\|] \circ h |\det \text{Jac}(h)| dx^1 dx^2 \\ &= \int_{\varphi^{-1}(R)} (f \circ \varphi) \sqrt{EG - F^2} dx^1 dx^2. \end{aligned}$$

$\square$

Definizione 4.3.5: Sia $R \subseteq S$ una regione regolare di una superficie S contenuta nell'immagine di una parametrizzazione locale $\varphi: U \rightarrow S$. Allora per ogni $f \in C^\infty(S)$ diremo *integrale di f su R* il numero

$$\int_R f d\nu = \int_{\varphi^{-1}(R)} (f \circ \varphi) \sqrt{EG - F^2} dx^1 dx^2.$$

Ricordiamo infine la famosa formula di Gauss-Green:

Teorema 4.3.5: (Gauss-Green) Sia $R \subset \mathbb{R}^2$ una regione regolare del piano, e $P, Q \in C^\infty(\bar{R})$. Allora

$$\int_{\partial R} P dx^1 + Q dx^2 = \int_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x^1} - \frac{\partial P}{\partial x^2} \right) dx^1 dx^2.$$

Siamo finalmente in grado di dimostrare la versione locale del teorema di Gauss-Bonnet:

Teorema 4.3.6: (Gauss-Bonnet locale) Sia $R \subset S$ una regione regolare semplice contenuta nell'immagine di una parametrizzazione locale ortogonale $\varphi: U \rightarrow S$. Indichiamo con $\sigma: [a, b] \rightarrow S$ una parametrizzazione rispetto alla lunghezza d'arco del bordo di R , orientata positivamente rispetto a R , di angoli esterni $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$. Infine, orientiamo $\varphi(U)$ scegliendo $N = \partial_1 \wedge \partial_2 / \|\partial_1 \wedge \partial_2\|$ come campo di versori normali, e indichiamo con κ_g la curvatura geodetica di σ (dove definita). Allora

$$\int_R K \, d\nu + \int_a^b \kappa_g \, ds + \sum_{j=1}^k \varepsilon_j = 2\pi. \quad (4.3.1)$$

Dimostrazione: Scriviamo $\sigma = \varphi(\sigma^1, \sigma^2)$. La Proposizione 4.2.5 ci dice che

$$\kappa_g(s) = \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left[\dot{\sigma}^2 \frac{\partial G}{\partial x^1} - \dot{\sigma}^1 \frac{\partial E}{\partial x^2} \right] + \frac{d\theta}{ds},$$

dove θ è l'angolo di rotazione di σ . Dunque se $a = t_0 < \dots < t_k = b$ è una suddivisione di $[a, b]$ tale che $\sigma|_{[t_{j-1}, t_j]}$ sia regolare per $j = 1, \dots, k$, abbiamo

$$\begin{aligned} \int_a^b \kappa_g \, ds &= \sum_{j=1}^k \int_{t_{j-1}}^{t_j} \kappa_g(s) \, ds \\ &= \int_{\varphi^{-1} \circ \sigma} \left[\frac{1}{2\sqrt{EG}} \frac{\partial G}{\partial x^1} dx^2 - \frac{1}{2\sqrt{EG}} \frac{\partial E}{\partial x^2} dx^1 \right] + \sum_{j=1}^k [\theta(t_j) - \theta(t_{j-1}) - \varepsilon_j] \\ &= \int_{\varphi^{-1}(R)} \left[\frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{1}{2\sqrt{EG}} \frac{\partial G}{\partial x^1} \right) + \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\frac{1}{2\sqrt{EG}} \frac{\partial E}{\partial x^2} \right) \right] dx^1 dx^2 + 2\pi\rho(\sigma) - \sum_{j=1}^k \varepsilon_j, \end{aligned}$$

grazie alla formula di Gauss-Green, dove $\rho(\sigma)$ è l'indice di rotazione di σ . Ma il Teorema 1.4.1 delle tangenti e i Lemmi 4.3.1 e 4.3.2 implicano $\rho(\sigma) = 1$. Ricordando il Lemma 3.3.3 otteniamo dunque

$$\int_a^b \kappa_g \, ds = - \int_{\varphi^{-1}(R)} K \sqrt{EG} \, dx^1 dx^2 + 2\pi - \sum_{j=1}^k \varepsilon_j = - \int_R K \, d\nu + 2\pi - \sum_{j=1}^k \varepsilon_j,$$

ed è fatta. □

In realtà, l'ipotesi che R sia contenuta nell'immagine di una parametrizzazione locale è solo un'ipotesi tecnica, e scomparirà dalla versione globale del teorema di Gauss-Bonnet. Ma per rimuoverla ci servono alcuni risultati di topologia che adesso richiamiamo.

L'idea cruciale è che per ottenere una versione globale del teorema di Gauss-Bonnet possiamo suddividere la regione regolare in pezzettini piccoli su cui applicare la versione locale, e poi sommiamo il risultato. Quindi il nostro primo obiettivo è formalizzare il procedimento di suddivisione di una regione regolare in pezzi più piccoli.

Definizione 4.3.6: Un *triangolo* (liscio) su una superficie è un poligono curvilineo semplice T in cui sono stati evidenziati tre punti del bordo, detti *vertici* del triangolo, includenti tutti i vertici di T come poligono curvilineo. In altre parole, T ha al più tre vertici come poligono curvilineo, che sono tutti vertici di T come triangolo, ma qualcuno dei vertici di T come triangolo potrebbe non essere un vertice di T come poligono curvilineo. I vertici dividono il bordo del triangolo in tre parti, dette (ovviamente) *lati*. Più in generale, un *2-simplesso* su una superficie è un'immagine omeomorfa del *triangolo standard*

$$T_0 = \{(t^1, t^2) \in \mathbb{R}^2 \mid t^1, t^2 \geq 0, t^1 + t^2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2.$$

I *vertici* del 2-simplesso sono l'immagine dei vertici $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 1)$ del triangolo standard.

Definizione 4.3.7: Sia $R \subseteq S$ è una regione regolare ($R = S$ con S compatta è ammesso). Una *triangolazione* di R è una famiglia finita $\mathbf{T} = \{T_1, \dots, T_r\}$ di triangoli (detti *facce* della triangolazione) tali che

- (a) $R = \bigcup_{j=1}^r T_j$,
- (b) l'intersezione di due facce distinte può consistere solo o di un singolo vertice (comune a entrambe le facce), o di un intero lato (comune a entrambe le facce);
- (c) l'intersezione di una faccia con il bordo di R può consistere solo in vertici o lati interi; e
- (d) ogni vertice del bordo di R è vertice di (almeno) una faccia della triangolazione.

Indicheremo con $V(\mathbf{T})$ l'insieme dei vertici dei triangoli di $\mathbf{T}$, con $L(\mathbf{T})$ l'insieme dei lati dei triangoli di $\mathbf{T}$, con $v(\mathbf{T})$ il numero dei vertici di $\mathbf{T}$, con $l(\mathbf{T})$ il numero dei lati di $\mathbf{T}$, e con $f(\mathbf{T}) = r$ il numero di facce di $\mathbf{T}$. Infine, una *triangolazione topologica* di R è definita nello stesso modo usando 2-simpletti invece di triangoli lisci.

Osservazione 4.3.2. In altre parole, gli interni delle facce di una triangolazione sono sempre a due a due disgiunti; e due facce (o una faccia e il bordo di una regione) non possono intersecarsi in un pezzo di lato senza contenere entrambe il lato intero.

Osservazione 4.3.3. Un fatto di topologia delle superfici che daremo per buono, dipendente dal fatto che ogni punto di una superficie ha un intorno omeomorfo a un aperto del piano, è il seguente: *ogni lato di una triangolazione topologica di una regione regolare R appartiene a esattamente una faccia della triangolazione se è contenuto in ∂R , ed esattamente a due facce della triangolazione altrimenti.*

Il primo risultato cruciale di topologia delle triangolazioni che non dimostreremo è che esistono:

Teorema 4.3.7: Sia $R \subseteq S$ una regione regolare su una superficie S , e $\mathcal{U}$ un ricoprimento aperto di R . Allora esiste una triangolazione $\mathbf{T}$ di R tale che per ogni $T \in \mathbf{T}$ esiste $U \in \mathcal{U}$ con $T \subset U$.

Data una triangolazione, ci sono alcune operazioni canoniche per crearne altre.

Definizione 4.3.8: Sia $\mathbf{T} = \{T_1, \dots, T_r\}$ una triangolazione topologica di una regione regolare R . La *prima mossa canonica* consiste nel prendere un punto interno a una faccia della triangolazione e collegarlo ai tre vertici della faccia, ottenendo tre triangoli dove prima ce n'era uno solo. La *seconda mossa canonica* consiste nel prendere un punto interno a un lato della triangolazione e collegarlo con il vertice opposto di ciascuna faccia (una o due a seconda che il punto appartenga o meno al bordo della regione) che contiene quel lato.

Osservazione 4.3.4. La prima mossa canonica aumenta di 1 il numero dei vertici della triangolazione, di 3 il numero dei lati, e di 2 il numero delle facce. La seconda mossa canonica applicata a un punto del bordo della regione aumenta di 1 il numero dei vertici della triangolazione, di 2 il numero dei lati, e di 1 il numero delle facce. La seconda mossa canonica applicata a un punto dell'interno della regione aumenta di 1 il numero dei vertici della triangolazione, di 3 il numero dei lati, e di 2 il numero delle facce.

Una sequenza di mosse canoniche trasforma una triangolazione in un'altra triangolazione con facce più piccole. Diamo un nome a questa situazione:

Definizione 4.3.9: Una triangolazione $\mathbf{T}'$ è un *raffinamento* di una triangolazione $\mathbf{T}$ se ogni triangolo di $\mathbf{T}'$ è contenuto in un triangolo di $\mathbf{T}$.

La seconda proprietà cruciale delle triangolazioni (che non dimostriamo) è che due triangolazioni diverse della stessa regione regolare ammettono un raffinamento comune:

Teorema 4.3.8: Siano $\mathbf{T}$ e $\mathbf{T}'$ due triangolazioni (topologiche) di una regione regolare. Allora esiste sempre una triangolazione (topologica) $\mathbf{T}^*$ che è un raffinamento sia di $\mathbf{T}$ che di $\mathbf{T}'$. Inoltre, $\mathbf{T}^*$ può venire ottenuta usando solo mosse canoniche partendo da una qualunque delle altre due.

Questo risultato ci permette di definire un invariante topologico fondamentale.

Proposizione 4.3.9: Siano $\mathbf{T}$ e $\mathbf{T}'$ due triangolazioni topologiche di una regione regolare $R \subseteq S$. Allora

$$f(\mathbf{T}) - l(\mathbf{T}) + v(\mathbf{T}) = f(\mathbf{T}') - l(\mathbf{T}') + v(\mathbf{T}').$$

Dimostrazione: Sia $\mathbf{T}^*$ un raffinamento comune di $\mathbf{T}$ e $\mathbf{T}'$ ottenuto tramite mosse canoniche. L'Osservazione 4.3.4 ci assicura che la quantità data dal numero di facce meno il numero di lati più il numero di vertici non viene cambiata effettuando mosse canoniche; quindi

$$f(\mathbf{T}) - l(\mathbf{T}) + v(\mathbf{T}) = f(\mathbf{T}^*) - l(\mathbf{T}^*) + v(\mathbf{T}^*) = f(\mathbf{T}') - l(\mathbf{T}') + v(\mathbf{T}').$$

□

Definizione 4.3.10: La caratteristica di Eulero-Poincaré $\chi(R)$ di una regione regolare R è data da

$$\chi(R) = f(\mathbf{T}) - l(\mathbf{T}) + v(\mathbf{T}),$$

dove $\mathbf{T}$ è una qualunque triangolazione topologica di R .

Chiaramente, se X è uno spazio topologico omeomorfo a una regione regolare R , siamo sicuri che esistono triangolazioni topologiche di X , e che $\chi(X) = \chi(R)$. In particolare:

Lemma 4.3.10: La caratteristica di Eulero-Poincaré di una regione regolare semplice è 1. La caratteristica di Eulero-Poincaré della sfera è 2.

Dimostrazione: Una regione regolare semplice è omeomorfa a un disco chiuso, che è omeomorfo al triangolo standard, la cui caratteristica di Eulero-Poincaré è chiaramente 1. La sfera è omeomorfa a un tetraedro, che ha 4 facce, 4 vertici e 6 lati, per cui $\chi(S^2) = 2$. □

Tanto per dare un'idea dell'importanza della caratteristica di Eulero-Poincaré enunciamo il *Teorema di classificazione delle superfici compatte orientabili* (che comunque non ci servirà per dimostrare la versione globale del teorema di Gauss-Bonnet):

Teorema 4.3.11: Ogni superficie compatta orientabile è omeomorfa a una sfera con $g \geq 0$ manici, che ha caratteristica di Eulero-Poincaré $2 - 2g$. In particolare, due superfici compatte orientabili sono omeomorfe se e solo se hanno la stessa caratteristica di Eulero-Poincaré; la sfera è l'unica superficie compatta orientabile con caratteristica di Eulero-Poincaré positiva; e il toro è l'unica superficie compatta orientabile con caratteristica di Eulero-Poincaré nulla.

Infine, usando le triangolazioni possiamo definire l'integrale di una funzione f su qualsiasi regione regolare $R \subseteq S$.

Definizione 4.3.11: Sia $R \subseteq S$ una regione regolare di una superficie S , e $f \in C^\infty(S)$. Allora l'integrale di f su R è definito da

$$\int_R f d\nu = \sum_{j=1}^r \int_{T_r} f d\nu, \quad (4.3.2)$$

dove $\mathbf{T} = \{T_1, \dots, T_r\}$ è una qualsiasi triangolazione di R i cui triangoli siano contenuti nelle immagini di parametrizzazioni locali, triangolazione che esiste grazie al Teorema 4.3.7. Chiaramente se a $\mathbf{T}$ sostituiamo un suo raffinamento l'integrale non cambia; quindi il Teorema 4.3.8 ci assicura che (4.3.2) non dipende dalla triangolazione scelta, e l'integrale è ben definito.

E allora abbiamo il

Teorema 4.3.12: (Gauss-Bonnet globale) Sia $R \subseteq S$ una regione regolare ($R = S$ è ammesso) di una superficie S orientata, con ∂R orientato positivamente. Siano $C_1, \dots, C_s$ le componenti del bordo di R , parametrizzate dalle curve $\sigma_j: [a_j, b_j] \rightarrow S$ con curvatura geodetica κ_g^j , per $j = 1, \dots, s$ (e se $R = S$ allora $\partial R = \emptyset$). Indichiamo inoltre con $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p\}$ l'insieme di tutti gli angoli esterni delle curve $\sigma_1, \dots, \sigma_s$. Allora

$$\int_R K d\nu + \sum_{j=1}^s \int_{a_j}^{b_j} \kappa_g^j ds + \sum_{h=1}^p \varepsilon_j = 2\pi\chi(R). \quad (4.3.3)$$

Dimostrazione: Sia $\mathbf{T}$ una triangolazione di R tale che ogni triangolo di $\mathbf{T}$ sia contenuto nell'immagine di una parametrizzazione locale ortogonale compatibile con l'orientazione. Orientiamo positivamente il bordo di ciascun triangolo.

Applichiamo il Teorema di Gauss-Bonnet locale a ciascun triangolo; sommando il risultato e notando che gli integrali della curvatura geodetica sui lati interni della triangolazione si elidono a due a due otteniamo

$$\int_R K d\nu + \sum_{j=1}^s \int_{a_j}^{b_j} \kappa_g^j ds + \sum_{i=1}^{f(\mathbf{T})} \sum_{j=1}^3 \varepsilon_{ij} = 2\pi f(\mathbf{T}), \quad (4.3.4)$$

dove ε_{i1} , ε_{i2} ed ε_{i3} sono gli angoli esterni del triangolo $T_i \in \mathbf{T}$. Indichiamo con $\phi_{ij} = \pi - \varepsilon_{ij}$ gli angoli interni del triangolo T_i . Allora

$$\sum_{i=1}^{f(\mathbf{T})} \sum_{j=1}^3 \varepsilon_{ij} = 3\pi f(\mathbf{T}) - \sum_{i=1}^{f(\mathbf{T})} \sum_{j=1}^3 \phi_{ij}.$$

Indichiamo con l_i (rispettivamente, l_e) il numero di lati della triangolazione interni a R (rispettivamente, sul bordo di R), e con v_i (rispettivamente, v_e) il numero di vertici della triangolazione interni a R (rispettivamente, esterni a R , cioè appartenenti al bordo di R); in particolare, $l_i + l_e = l(\mathbf{T})$ e $v_i + v_e = v(\mathbf{T})$. Siccome il bordo di R è costituito da poligoni curvilinei, $l_e = v_e$. Inoltre, ogni faccia ha tre lati, ogni lato interno è lato di due facce, e ogni lato esterno di una faccia sola (Osservazione 4.3.3), per cui

$$3f(\mathbf{T}) = 2l_i + l_e.$$

Quindi

$$\sum_{i=1}^{f(\mathbf{T})} \sum_{j=1}^3 \varepsilon_{ij} = 2\pi l_i + \pi l_e - \sum_{i=1}^{f(\mathbf{T})} \sum_{j=1}^3 \phi_{ij}.$$

Scriviamo $v_e = v_{ec} + v_{et}$, dove $v_{ec} = p$ è il numero di vertici delle curve formanti il bordo di R , e v_{et} è il numero degli altri vertici esterni della triangolazione. Ora, la somma degli angoli interni attorno a ciascun vertice interno è 2π ; la somma degli angoli interni su ciascun vertice esterno che non è vertice di ∂R è π ; e la somma degli angoli interni su un vertice di ∂R è π meno l'angolo esterno corrispondente. Quindi otteniamo

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{f(\mathbf{T})} \sum_{j=1}^3 \varepsilon_{ij} &= 2\pi l_i + \pi l_e - 2\pi v_i - \pi v_{et} - \sum_{h=1}^p (\pi - \varepsilon_j) \\ &= 2\pi l_i + 2\pi l_e - \pi v_e - 2\pi v_i - \pi v_{et} - \pi v_{ec} + \sum_{h=1}^p \varepsilon_j \\ &= 2\pi l(\mathbf{T}) - 2\pi v(\mathbf{T}) + \sum_{h=1}^p \varepsilon_j, \end{aligned}$$

e ricordando (4.3.4) abbiamo concluso. $\square$

Non è possibile sovrastimare l'importanza del teorema di Gauss-Bonnet sullo sviluppo della geometria differenziale. Qui ci limitiamo a riportare tre conseguenze, due immediate (in questo paragrafo), una meno (nel prossimo paragrafo).

La prima conseguenza rivela in pieno la relazione fra la curvatura Gaussiana e la topologia di una superficie compatta orientabile:

Corollario 4.3.13: *Sia S una superficie compatta orientabile. Allora*

$$\int_S K d\nu = 2\pi \chi(S). \quad (4.3.5)$$

In particolare, una superficie compatta orientabile con curvatura Gaussiana $K \geq 0$ e positiva in almeno un punto è omeomorfa a una sfera.

Dimostrazione: La (4.3.5) segue subito dal Teorema di Gauss-Bonnet, in quanto S è una regione regolare senza bordo. Il resto della tesi segue dal fatto che la sfera è l'unica superficie compatta orientabile con caratteristica di Eulero-Poincaré positiva (Teorema 4.3.11). $\square$

Dunque abbiamo un legame fra un oggetto prettamente locale e dipendente dalla struttura differenziabile (la curvatura Gaussiana) e un oggetto prettamente globale e dipendente solo dalla topologia (la caratteristica di Eulero-Poincaré).

Osservazione 4.3.5. Si può dimostrare che ogni superficie compatta orientabile con curvatura Gaussiana strettamente positiva è *diffeomorfa* alla sfera; il diffeomorfismo è la mappa di Gauss $N: S \rightarrow S^2$. Viceversa, ogni superficie chiusa di $\mathbb{R}^3$ semplicemente connessa con curvatura Gaussiana $K \leq 0$ è diffeomorfa a un piano; il diffeomorfismo è la mappa esponenziale $\exp_p: T_p S \rightarrow S$.

L'applicazione che ha motivato Gauss è la seguente:

Corollario 4.3.14: Sia $T \subset S$ un triangolo geodetico, cioè un triangolo i cui tre lati siano geodetiche, e indichiamo con $\phi_j = \pi - \varepsilon_j$, per $j = 1, 2, 3$ i tre angoli interni (dove $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ sono gli angoli esterni). Allora

$$\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = \pi + \int_T K \, d\nu.$$

In particolare, se K è costante la somma degli angoli interni di un triangolo geodetico è π più K volte l'area del triangolo.

Dimostrazione: Segue subito da (4.3.3). □

Una delle condizioni equivalenti al postulato delle parallele di Euclide è proprio che la somma degli angoli interni di un triangolo sia esattamente uguale a π . Quindi questo corollario dà una misurazione quantitativa della non validità del postulato di Euclide in superfici che non siano il piano (usando le geodetiche come “rette” sulla superficie).

4.4 Il Teorema di Poincaré-Hopf

La terza applicazione del Teorema di Gauss-Bonnet che presentiamo riguarda i campi vettoriali su una superficie.

Definizione 4.4.1: Sia $\xi \in \mathcal{T}(S)$ un campo vettoriale su una superficie S . Diremo che $p \in S$ è un *punto singolare* di ξ se $\xi(p) = 0$. L'insieme dei punti singolari di ξ sarà indicato con $\text{Sing}(\xi)$.

Definizione 4.4.2: Sia $\xi \in \mathcal{T}(S)$ un campo vettoriale su una superficie S , e $p \in S$. Prendiamo una parametrizzazione locale ortogonale $\varphi: U \rightarrow S$ centrata in p , con U omeomorfo a un disco aperto, e supponiamo che $\varphi(U) \cap \text{Sing}(\xi) \subseteq \{p\}$, cioè che $\varphi(U)$ non contenga punti singolari di ξ tranne al più p . Se $\sigma: [a, b] \rightarrow \varphi(U)$ è una curva chiusa semplice orientata positivamente che gira intorno a p (nel senso che $\varphi^{-1} \circ \sigma$ ha indice di avvolgimento rispetto all'origine uguale a $+1$), definiamo $g: [a, b] \rightarrow S^1$ ponendo

$$g(t) = \frac{d\varphi^{-1}(\xi(\sigma(t)))}{\|d\varphi^{-1}(\xi(\sigma(t)))\|}.$$

Allora l'indice di ξ in p è definito da $\text{ind}_p(\xi) = \deg g \in \mathbb{Z}$.

Osservazione 4.4.1. La definizione che abbiamo dato si applica solo a punti regolari di ξ o a punti singolari *isolati* di ξ ; non definiamo un indice in punti singolari non isolati.

Osservazione 4.4.2. Se ξ è un campo vettoriale definito su un aperto del piano, allora g è semplicemente data da $\xi \circ \sigma / \|\xi \circ \sigma\|$, per cui $\text{ind}_p(\xi)$ misura il numero di giri fatti da ξ intorno a p . Il caso generale è ridotto a questo usando una parametrizzazione locale, come al solito. Nota in particolare che se esprimiamo ξ in coordinate locali come al solito scrivendo $\xi = \xi^1 \partial_1 + \xi^2 \partial_2$ allora

$$d\varphi^{-1}(\xi) = (\xi^1, \xi^2).$$

ESEMPIO 4.4.1. Sia $S = \mathbb{R}^2$ e $\xi \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^2)$ dato da $\xi(x^1, x^2) = (-x^1, -x^2)$. L'origine è un punto singolare isolato di ξ . Se prendiamo come curva $\sigma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ la circonferenza $\sigma(t) = (\cos t, \sin t)$ troviamo $g(t) = (-\cos t, -\sin t)$, per cui, usando per esempio il Corollario 1.3.7, si calcola $\text{ind}_O(\xi) = 1$.

ESEMPIO 4.4.2. Sia $\xi \in \mathcal{T}(S^2)$ il campo vettoriale definito da $\xi(p) = \pi_p(e_3)$, dove $\pi_p: \mathbb{R}^3 \rightarrow T_p S^2$ è la proiezione ortogonale, ed $e_3 = (0, 0, 1)$. Allora ξ ha esattamente due punti singolari, il polo nord $N = e_3$ e il polo sud $S = -N$. Per calcolare l'indice di ξ in N , scegliamo come parametrizzazione locale $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^2$ la prima dell'Esempio 2.1.2, cioè $\varphi(x, y) = (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$, e come curva

$$\sigma(t) = \varphi\left(\frac{1}{2} \cos t, \frac{1}{2} \sin t\right) = \left(\frac{1}{2} \cos t, \frac{1}{2} \sin t, \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Ora, si verifica subito che $\xi(p) = (-p_1 p_3, -p_2 p_3, 1 - p_3^2)$ per ogni $p = (p_1, p_2, p_3) \in S^2$, per cui

$$\xi(\sigma(t)) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{4} \cos t, -\frac{\sqrt{3}}{4} \sin t, \frac{1}{4}\right).$$

Per trovare $d\varphi^{-1}(\xi \circ \sigma)$ dobbiamo scrivere $\xi \circ \sigma = \xi^1 \partial_1|_\sigma + \xi^2 \partial_2|_\sigma$, in modo da avere $d\varphi^{-1}(\xi \circ \sigma) = (\xi^1, \xi^2)$. Siccome $\partial_1|_\sigma = (1, 0, -\frac{1}{\sqrt{3}} \cos t)$ e $\partial_2|_\sigma = (0, 1, -\frac{1}{\sqrt{3}} \sin t)$, troviamo

$$d\varphi^{-1}(\xi(\sigma(t))) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{4} \cos t, -\frac{\sqrt{3}}{4} \sin t\right),$$

per cui $g(t) = (-\cos t, -\sin t)$, e $\text{ind}_N(\xi) = 1$. In maniera analoga (esercizio) si trova $\text{ind}_S(\xi) = 1$.

La definizione di indice sembrerebbe dipendere sia dalla scelta della parametrizzazione φ che dalla scelta della curva σ ; quindi prima di proseguire dobbiamo mostrare che non è così.

Proposizione 4.4.1: Sia $\xi \in \mathcal{T}(S)$ un campo vettoriale su una superficie S , e $p \in S$ un punto regolare o singolare isolato di S . Allora l'indice di ξ in p è ben definito, nel senso che dipende solo dal comportamento di ξ in un intorno di p . Inoltre:

- (i) $\text{ind}_p(\xi) = 0$ se p è un punto regolare.
- (ii) Sia $\sigma: [a, b] \rightarrow S$ una parametrizzazione rispetto alla lunghezza d'arco del bordo di una regione regolare semplice $R \subset S$ contenente p nel suo interno e contenuta nell'immagine di una parametrizzazione ortogonale $\varphi: U \rightarrow S$. Allora

$$\text{ind}_p(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_R K \, d\nu - \frac{1}{2\pi} [\phi(b) - \phi(a)], \quad (4.4.1)$$

dove $\phi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è una determinazione continua dell'angolo da $\xi \circ \sigma$ a η , e $\eta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ è un qualsiasi campo vettoriale parallelo lungo σ .

Dimostrazione: Prima di tutto, per le solite proprietà del grado l'indice non dipende dalla curva σ scelta, in quanto due tali curve sono sempre omotope fra loro. Inoltre, se $p \in S$ non è un punto singolare di ξ abbiamo $\text{ind}_p(\xi) = 0$: infatti se $\xi(p) \neq 0$ allora $d\varphi^{-1}(\xi(p)) / \|d\varphi^{-1}(\xi(p))\|$ è definito, per cui basta prendere una curva σ sufficientemente vicina a p per assicurarsi che la funzione g non sia surgettiva, e quindi abbia grado zero.

Per far vedere che l'indice non dipende dalla parametrizzazione, prima di tutto notiamo che se indichiamo con $\theta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una determinazione dell'angolo fra $\partial_1|_\sigma$ e $\xi \circ \sigma$, lo stesso ragionamento usato per dimostrare il Corollario 4.3.1 ci dà

$$\text{ind}_p(\xi) = \frac{1}{2\pi} [\theta(b) - \theta(a)]. \quad (4.4.2)$$

Sia allora $\tilde{\varphi}: \tilde{U} \rightarrow S$ un'altra parametrizzazione centrata in p con $\tilde{U}$ omeomorfo a un disco aperto, e poniamo $\tilde{\partial}_j = \partial \tilde{\varphi} / \partial x^j$. Scegliamo un disco $V \subset U \cap \tilde{U}$ contenente l'origine, e indichiamo con $\psi: \varphi(V) \rightarrow \mathbb{R}$ una determinazione dell'angolo fra $\tilde{\partial}_1$ e ∂_1 . Senza perdita di generalità possiamo anche supporre che il sostegno di σ sia contenuto in $\varphi(V)$, in modo che se poniamo $\tilde{\theta} = \theta + \psi \circ \sigma$ allora $\tilde{\theta}$ è una determinazione dell'angolo fra $\tilde{\partial}_1|_\sigma$ e $\xi \circ \sigma$. Ma allora chiaramente

$$\theta(b) - \theta(a) = \tilde{\theta}(b) - \tilde{\theta}(a),$$

per cui l'indice non dipende dalla parametrizzazione scelta.

Scegliamo infine R , φ e σ come in (ii), e sia $\eta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ un qualsiasi campo vettoriale parallelo lungo σ , la cui esistenza è assicurata dall'Osservazione 4.2.4, che ci dice anche che $\|\eta\|$ è costante. Notiamo esplicitamente che la stessa osservazione ci dice che due tali campi formano un angolo costante fra loro, per cui sarà facile verificare (esercizio) che tutti i conti successivi, e in particolare la formula (4.4.1), non dipendono da quale η prendiamo.

Indichiamo con $\psi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una determinazione dell'angolo fra $\partial_1|_\sigma$ e η . Vogliamo dimostrare che

$$\frac{d\psi}{dt} = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left[\dot{\sigma}^2 \frac{\partial G}{\partial x^1} - \dot{\sigma}^1 \frac{\partial E}{\partial x^2} \right], \quad (4.4.3)$$

dove abbiamo scritto come al solito $\sigma = \varphi(\sigma^1, \sigma^2)$. Poniamo $\xi_j = \partial_j|_\sigma / \|\partial_j|_\sigma\|$ per $j = 1, 2$, in modo da poter scrivere $\eta / \|\eta\| = (\cos \psi) \xi_1 + (\sin \psi) \xi_2$. Il Lemma 4.2.4 ci dice che per ottenere (4.4.3) basta dimostrare che

$$\frac{d\psi}{dt} + (D\xi_1, \xi_2) \equiv 0.$$

Ora, $\{\xi_1, \xi_2\}$ è una base ortonormale lungo σ . Quindi $(D\xi_1, \xi_1) \equiv (D\xi_2, \xi_2) \equiv 0$, $(D\xi_1, \xi_2) = -(\xi_1, D\xi_2)$, per cui da $D\xi_j = (D\xi_j, \xi_1)\xi_1 + (D\xi_j, \xi_2)\xi_2$ otteniamo

$$D\xi_1 = (D\xi_1, \xi_2)\xi_2 \quad \text{e} \quad D\xi_2 = -(D\xi_1, \xi_2)\xi_1.$$

Ricordando che η è parallelo deduciamo quindi

$$\begin{aligned} O = D(\eta / \|\eta\|) &= -\dot{\psi}(\sin \psi)\xi_1 + (\cos \psi)D\xi_1 + \dot{\psi}(\cos \psi)\xi_2 + (\sin \psi)D\xi_2 \\ &= \left(\frac{d\psi}{dt} + (D\xi_1, \xi_2) \right) [-(\sin \psi)\xi_1 + (\cos \psi)\xi_2]. \end{aligned}$$

Quindi $d\psi/dt + (D\xi_1, \xi_2) \equiv 0$, e (4.4.3) è dimostrata.

Integrando (4.4.3) fra a e b troviamo dunque

$$\psi(b) - \psi(a) = \int_a^b \frac{d\psi}{dt} dt = - \int_a^b \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left[\dot{\sigma}^2 \frac{\partial G}{\partial x^1} - \dot{\sigma}^1 \frac{\partial E}{\partial x^2} \right] dt = \int_R K d\nu,$$

dove l'ultima eguaglianza segue dal conto già visto nella dimostrazione del Teorema 4.3.6. Mettendo questa formula insieme a (4.4.2) otteniamo allora la (4.4.1) nella forma

$$\int_R K d\nu - 2\pi \operatorname{ind}_p(\xi) = \phi(b) - \phi(a), \quad (4.4.4)$$

dove $\phi = \psi - \theta$ è una determinazione dell'angolo da ξ a η , per cui non dipende dalla parametrizzazione φ . Siccome anche l'integrale della curvatura Gaussiana non dipende dalla parametrizzazione scelta, abbiamo dimostrato che l'indice di ξ in p non dipende dalla parametrizzazione, come voluto. $\square$

A questo punto siamo in grado di dimostrare la terza applicazione del teorema di Gauss-Bonnet:

Teorema 4.4.2: (Poincaré-Hopf) *Sia $\xi \in \mathcal{T}(S)$ un campo vettoriale con solo punti singolari isolati su una superficie compatta orientabile S . Allora*

$$\sum_{p \in S} \operatorname{ind}_p(\xi) = \chi(S).$$

In particolare, se S non è omeomorfa a un toro ogni campo vettoriale su S ha necessariamente dei punti singolari.

Dimostrazione: Sia $\mathbf{T}$ una triangolazione di S con triangoli contenuti nell'immagine di parametrizzazioni ortogonali. Possiamo anche supporre che ogni triangolo contenga nel suo interno al più un punto singolare

di S (che sono in numero finito, essendo S compatta), e che nessun punto singolare sia sul bordo di un triangolo. Infine, orientiamo positivamente il bordo di ciascun triangolo.

Scriviamo (4.4.4) per ciascun triangolo, e sommiamo; si ottiene

$$\int_S K d\nu - 2\pi \sum_{p \in S} \text{ind}_p(\xi) = \sum_{i=1}^{f(\mathbf{T})} \sum_{j=1}^3 [\phi(v_{i,j}) - \phi(v_{i,j-1})], \quad (4.4.5)$$

dove abbiamo indicato con $\{v_{i,0} = v_{i,3}, v_{i,1}, v_{i,2}\}$ i tre vertici della i -esima faccia di $\mathbf{T}$, elencati nell'ordine in cui sono percorsi lungo il bordo del triangolo. Ora, ogni lato della triangolazione è lato di esattamente due facce distinte, ma viene percorso in direzione opposta nelle due facce. Questo vuol dire che per ogni coppia (v, v') di vertici di uno stesso lato nella sommatoria a destra in (4.4.5) compare una volta $\phi(v') - \phi(v)$ e una volta $\phi(v) - \phi(v')$. Dunque il membro destro di (4.4.5) si annulla, e la tesi segue dal Corollario 4.3.13. $\square$

In particolare, otteniamo il famoso *Teorema del parrucchiere*: *ogni campo vettoriale sulla sfera ha almeno un punto singolare*.

Esercizio 4.4.1. Dimostra che ogni campo vettoriale sulla sfera ha in realtà almeno 2 punti singolari.