Capitolo 6

Curvatura

6.1 Gli operatori di curvatura

Obiettivo di questo capitolo è lo studio della curvatura di una varietà Riemanniana, e delle relazioni fra la curvatura e la topologia della varietà.

Per vedere come potremmo definire la curvatura di una varietà Riemanniana, ricordiamo che la curvatura Gaussiana K di una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ può essere calcolata con la seguente formula:

$$K = \frac{1}{G}\left[\frac{\partial \Gamma_{22}^1}{\partial x^1} - \frac{\partial \Gamma_{12}^1}{\partial x^2} + \left(\Gamma_{22}^s \Gamma_{1s}^1 - \Gamma_{12}^s \Gamma_{2s}^1\right)\right], \tag{6.1.1}$$

dove i Γ_{hk}^i sono i simboli di Christoffel della connessione di Levi-Civita della metrica indotta su S dalla metrica piatta di $\mathbb{R}^3$, calcolati rispetto a una carta locale $\varphi(p) = \bigl(x^1(p), x^2(p)\bigr)$, ed $E = \|\partial_1\|$.

Siccome la formula (6.1.1) dipende solo dalla metrica su S, potremmo tentare di definire un concetto di curvatura su una varietà Riemanniana qualsiasi nel modo seguente:

Definizione 6.1.1: Sia M una varietà Riemanniana, $p \in M$ e $\pi \subset T_pM$ un 2-piano. Diremo *curvatura sezionale* di M in p lungo π la curvatura Gaussiana in p della superficie $\exp_p(\pi \cap \mathcal{E}_p) \subset M$ calcolata usando (6.1.1) applicata a un sistema di coordinate normali centrate in p ottenute estendendo a T_pM una base ortonormale di π.

Questa definizione, benché geometricamente chiara, ha però due problemi evidenti. Il primo è che bisogna verificare che sia una definizione ben posta, cioè che non dipenda dal sistema di coordinate normali scelto. La seconda è che non è chiaro che struttura abbia (ammesso che ne abbia una) l'insieme delle curvature sezionali in un punto.

Per ovviare a questi problemi procederemo per via analitica invece che geometrica. L'idea cruciale è che siccome (6.1.1) contiene i simboli di Christoffel, la curvatura dev'essere legata alla connessione di Levi-Civita. Allora cominciamo con la seguente

Definizione 6.1.2: Sia M una varietà Riemanniana con connessione di Levi-Civita ∇. Per ogni $X, Y \in \mathcal{T}(M)$ l'*endomorfismo di curvatura* $R_{XY}: \mathcal{T}_k^h(M) \to \mathcal{T}_k^h(M)$ è dato da

$$R_{XY} = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]}.$$

In realtà, R_{XY} è molto di più di un semplice endomorfismo: è $C^\infty(M)$-lineare in tutte le variabili. Infatti,

$$R_{XY}(fK) = \nabla_X\bigl(f\nabla_Y K + Y(f)K\bigr) - \nabla_Y\bigl(f\nabla_X K + X(f)K\bigr) - f\nabla_{[X,Y]}K - [X,Y](f)K = fR_{XY}K$$

per ogni $K \in \mathcal{T}_k^h(M)$ e $f \in C^\infty(M)$. Inoltre $R_{YX} = -R_{XY}$ e

$$R_{X(fY)} = f\nabla_X\nabla_Y + X(f)\nabla_Y - f\nabla_Y\nabla_X - f\nabla_{[X,Y]} - X(f)\nabla_Y = fR_{XY}.$$

Quindi $R: \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}_k^h(M) \to \mathcal{T}_k^h(M)$ determina un campo tensoriale $R \in \mathcal{T}_{h+k+2}^{h+k}(M)$. Il caso per noi più interessante è il seguente:

Definizione 6.1.3: Il *tensore di curvatura* $R \in \mathcal{T}_3^1(M)$ è il campo tensoriale $R: \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) \to \mathcal{T}(M)$ dato da $R(X, Y, Z) = R_{XY}Z$. A questo associamo anche un altro campo tensoriale $R \in \mathcal{T}_4^0(M)$ definito da

$$R(X, Y, Z, W) = \langle R_{XY}Z, W\rangle.$$

Esercizio 6.1.1. Dimostra che se $H: M \to N$ è un'isometria fra varietà Riemanniane allora $H^*R^N = R^M$, nel senso che

$$R^N\big(dH(X), dH(Y), dH(Z)\big) = R^M(X, Y, Z)$$

per ogni X, Y, $Z \in \mathcal{T}(M)$, dove R^M (rispettivamente, R^N) è il tensore di curvatura di M (rispettivamente, N).

Come vedremo, le proprietà di simmetria del tensore di curvatura saranno utilissime:

Proposizione 6.1.1: *Il tensore di curvatura R di una varietà Riemanniana ha le seguenti proprietà:*

(i) $R_{XY} = -R_{YX}$; *in particolare,* $R_{XX} = O$;
(ii) $R_{XY}Z + R_{YZ}X + R_{ZX}Y = O$ *(prima identità di Bianchi);*
(iii) $\langle R_{XY}Z, W\rangle = -\langle Z, R_{XY}W\rangle$; *in particolare,* $\langle R_{XY}Z, Z\rangle = 0$;
(iv) $\langle R_{XY}Z, W\rangle = \langle R_{ZW}X, Y\rangle$.

Dimostrazione: (i) Ovvia.

(ii) Usando la simmetria della connessione e l'identità di Jacobi si ottiene

$$\begin{aligned} R_{XY}Z + R_{YZ}X + R_{ZX}Y &= (\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z) \\ &\quad + (\nabla_Y\nabla_Z X - \nabla_Z\nabla_Y X - \nabla_{[Y,Z]}X) \\ &\quad + (\nabla_Z\nabla_X Y - \nabla_X\nabla_Z Y - \nabla_{[Z,X]}Y) \\ &= \nabla_X(\nabla_Y Z - \nabla_Z Y) + \nabla_Y(\nabla_Z X - \nabla_X Z) + \nabla_Z(\nabla_X Y - \nabla_Y X) \\ &\quad - \nabla_{[X,Y]}Z - \nabla_{[Y,Z]}X - \nabla_{[Z,X]}Y \\ &= \nabla_X[Y,Z] + \nabla_Y[Z,X] + \nabla_Z[X,Y] - \nabla_{[X,Y]}Z - \nabla_{[Y,Z]}X - \nabla_{[Z,X]}Y \\ &= [X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = O. \end{aligned}$$

(iii) Basta dimostrare che $\langle R_{XY}Z, Z\rangle = 0$. La compatibilità con la metrica dà

$$\begin{aligned} XY\|Z\|^2 &= 2X\langle\nabla_Y Z, Z\rangle = 2\langle\nabla_X\nabla_Y Z, Z\rangle + 2\langle\nabla_Y Z, \nabla_X Z\rangle, \\ YX\|Z\|^2 &= 2Y\langle\nabla_X Z, Z\rangle = 2\langle\nabla_Y\nabla_X Z, Z\rangle + 2\langle\nabla_X Z, \nabla_Y Z\rangle, \\ [X,Y]\|Z\|^2 &= 2\langle\nabla_{[X,Y]}Z, Z\rangle. \end{aligned}$$

Sottraendo le ultime due dalla prima, il membro sinistro si annulla e otteniamo

$$0 = 2\langle R_{XY}Z, Z\rangle,$$

come voluto.

(iv) Scriviamo la prima identità di Bianchi quattro volte, permutando ciclicamente gli argomenti:

$$\begin{aligned} \langle R_{XY}Z, W\rangle + \langle R_{YZ}X, W\rangle + \langle R_{ZX}Y, W\rangle &= 0, \\ \langle R_{YZ}W, X\rangle + \langle R_{ZW}Y, X\rangle + \langle R_{WY}Z, X\rangle &= 0, \\ \langle R_{ZW}X, Y\rangle + \langle R_{WX}Z, Y\rangle + \langle R_{XZ}W, Y\rangle &= 0, \\ \langle R_{WX}Y, Z\rangle + \langle R_{XY}W, Z\rangle + \langle R_{YW}X, Z\rangle &= 0, \end{aligned}$$

e sommiamo. Grazie a (iii) le prime due colonne si cancellano. Applicando (i) e (iii) all'ultima colonna otteniamo $2\langle R_{XZ}W, Y\rangle - 2\langle R_{WY}X, Z\rangle = 0$, che è equivalente alla tesi. □

Esercizio 6.1.2. Dimostra la *seconda identità di Bianchi:*

$$\nabla R(X,Y,Z,V,W) + \nabla R(X,Y,V,W,Z) + \nabla R(X,Y,W,Z,V) = O$$

per ogni X, Y, Z, V, $W \in \mathcal{T}(M)$.

Esercizio 6.1.3. Dimostra l'*identità di Ricci:* se $K \in \mathcal{T}_2^0(M)$ allora

$$\nabla^2 K(Z,W,X,Y) - \nabla^2 K(Z,W,Y,X) = (R_{XY}K)(Z,W)$$

per ogni X, Y, Z, $W \in \mathcal{T}(M)$.

In coordinate locali, se poniamo $R_{\partial_i \partial_j}\partial_k = R_{ijk}^h \partial_h$, si trova

$$R_{ijk}^h = \frac{\partial \Gamma_{jk}^h}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^h}{\partial x^j} + \Gamma_{jk}^r \Gamma_{ir}^h - \Gamma_{ik}^r \Gamma_{jr}^h, \tag{6.1.2}$$

formula che ci fa sospettare di essere nella direzione giusta. In particolare, se poniamo $R_{ijhk} = \langle R_{\partial_i \partial_j}\partial_h, \partial_k \rangle$ otteniamo $R_{ijhk} = g_{rk} R_{ijh}^r$, e la Proposizione 6.1.1.(i)–(iv) è equivalente alle seguenti simmetrie dei coefficienti di R:

$$R_{ijhk} + R_{jhik} + R_{hijk} = 0, \quad R_{ijhk} = -R_{jihk}, \quad R_{ijhk} = -R_{ijkh}, \quad R_{ijhk} = R_{hkij}.$$

Osservazione 6.1.1. Se avessimo una carta locale tale che i vettori $\{\partial_1, \ldots, \partial_n\}$ formino un riferimento locale ortonormale di TM, i simboli di Christoffel sarebbero identicamente nulli, e quindi la curvatura sarebbe identicamente nulla. Questo conferma quanto anticipato nell'Osservazione 4.1.4.

Le proprietà di simmetria fanno sospettare che per conoscere l'intero tensore di curvatura sia sufficiente sapere come si comporta su alcune particolari quadruple di vettori. Le quadruple giuste sono quelle indicate nella prossima

Definizione 6.1.4: Sia M una varietà Riemanniana con tensore di curvatura R. Definiamo per ogni $p \in M$ l'applicazione $Q_p\colon T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ data da

$$Q_p(v,w) = R_p(v,w,w,v) = \langle R_{vw}w, v \rangle_p$$

per ogni v, $w \in T_pM$. Nota che $Q_p(w,v) = Q_p(v,w)$, e che

$$Q_p(a_1 v_1 + a_2 v_2, w) = a_1^2 Q_p(v_1, w) + 2a_1 a_2 \langle R_{v_1 w} w, v_2 \rangle + a_2^2 Q_p(v_2, w).$$

La $Q_p(v_1, v_2)$ in realtà dipende più dal piano generato dai vettori v_1 e v_2 che dai vettori in sé. Prima di tutto, se v_1 e v_2 sono linearmente dipendenti (cioè generano una retta in T_pM) allora le proprietà di simmetria di R implicano subito (verificare, prego) che $Q_p(v_1, v_2) = 0$. Supponiamo invece che v_1 e v_2 siano linearmente indipendenti, e siano $w_j = a_j^i v_i$ (per $j = 1$, 2) altri due vettori generanti lo stesso piano, dove $(a_j^i) \in GL(2, \mathbb{R})$ è la matrice di cambiamento di base. Allora la multilinearità e le proprietà di simmetria di R danno

$$Q_p(w_1, w_2) = \bigl(\det(a_j^i)\bigr)^2 Q_p(v_1, v_2).$$

Ora, l'Esercizio 1.3.17 ci dice che la norma dell'elemento $v_1 \wedge v_2 \in \bigwedge^2 T_pM$ rispetto al prodotto scalare indotto dalla metrica Riemanniana è data da

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \|v_1 \wedge v_2\|_p = \sqrt{\|v_1\|_p^2 \|v_2\|_p^2 - |\langle v_1, v_2 \rangle_p|^2};$$

nota che il secondo membro è l'area del parallelogrammo generato da v_1 e v_2 in T_pM. In particolare, otteniamo anche

$$\|w_1 \wedge w_2\|_p^2 = \bigl(\det(a_j^i)\bigr)^2 \|v_1 \wedge v_2\|_p^2.$$

Quindi il numero

$$\frac{2Q_p(v_1, v_2)}{\|v_1 \wedge v_2\|_p^2}$$

dipende solo dal piano generato dai vettori v_1 e v_2. Abbiamo recuperato la curvatura sezionale:

Proposizione 6.1.2: *Sia M una varietà Riemanniana con tensore di curvatura R. Allora per ogni $p \in M$ e 2-piano $\pi \subset T_pM$ si ha*

$$K(\pi) = \frac{2Q_p(v_1, v_2)}{\|v_1 \wedge v_2\|_p^2},$$

dove $\{v_1, v_2\}$ è una qualunque base di π.

Dimostrazione: Sia $\{v_1, v_2\}$ una base ortonormale di π; completiamola a una base ortonormale di T_pM, e usiamo quest'ultima base per definire coordinate normali centrate in p. Allora

$$\frac{2Q_p(v_1, v_2)}{\|v_1 \wedge v_2\|_p^2} = Q_p(v_1, v_2) = R_{1221},$$

che è esattamente uguale a $K(\pi)$, grazie a (6.1.1) ed (6.1.2). □

Dunque il tensore di curvatura definito tramite la connessione di Levi-Civita ci permette di recuperare la curvatura sezionale definita geometricamente. Viceversa, la curvatura sezionale determina completamente il tensore di curvatura:

Proposizione 6.1.3: *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione $n \ge 2$ dotato di un prodotto scalare definito positivo $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$, e R, $R'\colon V \times V \times V \to V$ due applicazioni multilineari soddisfacenti le proprietà* (i)–(iv) *della Proposizione 6.1.1. Per ogni x, y, v, $w \in V$ e ogni 2-piano $\pi \subset V$ definiamo*

$$Q(v, w) = \langle R_{vw}w, v\rangle, \qquad \text{e} \qquad K(\pi) = \frac{2Q(v_1, v_2)}{\|v_1 \wedge v_2\|^2},$$

dove $\{v_1, v_2\}$ è una base qualunque del 2-piano π. Definiamo analogamente Q' e K'. Allora $R = R'$ se e solo se $K = K'$.

Dimostrazione: Una direzione è ovvia. Supponiamo allora $K = K'$, e quindi $Q = Q'$. Allora

$$R(x + v, y, y, x + v) = R'(x + v, y, y, x + v)$$

per ogni $x, y, v \in V$ (dove per semplicità di scrittura abbiamo posto $R(x, y, v, w) = \langle R_{xy}v, w\rangle$, e analogamente per R'), per cui

$$R(x, y, y, x) + 2R(x, y, y, v) + R(v, y, y, v) = R'(x, y, y, x) + 2R'(x, y, y, v) + R'(v, y, y, v),$$

e perciò

$$R(x, y, y, v) = R'(x, y, y, v).$$

Dunque

$$R(x, y + w, y + w, v) = R'(x, y + w, y + w, v),$$

per ogni x, y, v, $w \in V$, per cui

$$R(x, y, w, v) + R(x, w, y, v) = R'(x, y, w, v) + R'(x, w, y, v),$$

o meglio

$$R(x, y, v, w) - R'(x, y, v, w) = R(y, v, x, w) - R'(y, v, x, w).$$

Dunque la quantità $R(x, y, v, w) - R'(x, y, v, w)$ è invariante per permutazioni cicliche dei primi tre elementi. Usando la prima identità di Bianchi, cioè la Proposizione 6.1.1.(ii), otteniamo allora

$$3[R(x, y, v, w) - R'(x, y, v, w)] = 0,$$

e ci siamo. □

Esercizio 6.1.4. Dimostra che

$$\begin{aligned} R(X,Y,Z,W) = \frac{1}{6}\big\{ & Q(Y+Z,X+W) - Q(X+Z,Y+W) \\ & + Q(X,Y+W) + Q(Y,X+Z) + Q(Z,Y+W) + Q(W,X+Z) \\ & - Q(X,Y+Z) - Q(Y,X+W) - Q(Z,X+W) - Q(W,Y+Z) \\ & + Q(X,Z) + Q(X,W) - Q(Y,Z) - Q(Y,W)\big\}. \end{aligned}$$

Uno degli obiettivi tipici dei geometri è classificare tutti gli oggetti che hanno determinate proprietà. Nel caso della geometria Riemanniana, viene naturale cercare di classificare le varietà in base alla loro curvatura. Il caso più semplice, ma comunque molto importante (e che discuteremo nel paragrafo 6.4) è quello delle varietà a curvatura sezionale costante:

Definizione 6.1.5: Una varietà Riemanniana M ha *curvatura sezionale costante* $k \in \mathbb{R}$ se $K(\pi) = k$ per ogni $p \in M$ e ogni 2-piano $\pi \subset T_pM$.

Osservazione 6.1.2. Usando la seconda identità di Bianchi è possibile dimostrare che una varietà Riemanniana M connessa di dimensione $n \geq 3$ per cui esista una funzione $k\colon M \to \mathbb{R}$ tale che $K(\pi) = k(p)$ per ogni $p \in M$ e ogni 2-piano $\pi \subset T_pM$ è necessariamente a curvatura sezionale costante (cioè la funzione k è costante).

Il tensore di curvatura di una varietà Riemanniana a curvatura sezionale costante è completamente determinato:

Corollario 6.1.4: *Una varietà Riemanniana M ha curvatura sezionale costante $k \in \mathbb{R}$ se e solo se il suo tensore di curvatura è dato da*

$$R_{XY}Z = k\big[\langle Y,Z\rangle X - \langle X,Z\rangle Y\big]. \tag{6.1.3}$$

Dimostrazione: Una direzione è immediata. Viceversa, supponiamo che M abbia curvatura sezionale costante $k \in \mathbb{R}$. Definiamo un campo tensoriale $R' \in \mathcal{T}_3^1(M)$ tramite il membro destro della (6.1.3). Si vede subito che R' soddisfa le proprietà (i)–(iv) della Proposizione 6.1.1, e che $Q'(X,Y) = k\big[\|X\|^2\|Y\|^2 - |\langle X,Y\rangle|^2\big]$; quindi $K' = K \equiv k$, e la Proposizione 6.1.3 ci assicura che $R = R'$. □

Ci sono altri tipi di curvature che meritano di essere ricordati.

Definizione 6.1.6: Sia M una varietà Riemanniana con tensore di curvatura R. Se indichiamo con $\mathrm{Ric}(X,Y)$ la traccia dell'operatore lineare $Z \mapsto R_{ZX}Y$ otteniamo il *tensore di Ricci* $\mathrm{Ric} \in \mathcal{T}_2^0(M)$.

Osservazione 6.1.3. Un veloce richiamo di algebra lineare: se $L\colon V \to V$ è un endomorfismo di uno spazio vettoriale di dimensione finita, e $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ è una base di V, allora scrivendo $L(v_i) = a_i^j v_j$ (cioè se (a_j^i) è la matrice che rappresenta L rispetto alla base $\mathcal{B}$) troviamo che $\mathrm{tr}(L) = a_i^i$. Se poi $\mathcal{B}$ è una base ortonormale rispetto a un prodotto scalare $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ su V, allora $a_i^j = \langle L(v_i), v_j\rangle$, e quindi

$$\mathrm{tr}(L) = \sum_{i=1}^n \langle L(v_i), v_i\rangle.$$

Il tensore di Ricci è simmetrico: se $\{Z_1, \ldots, Z_n\}$ è una base ortonormale di T_pM l'osservazione precedente e le simmetrie del tensore di curvatura implicano

$$\mathrm{Ric}(X,Y) = \sum_{j=1}^n \langle R_{Z_jX}Y, Z_j\rangle = \sum_{j=1}^n \langle R_{Z_jY}X, Z_j\rangle = \mathrm{Ric}(Y,X).$$

Definizione 6.1.7: Sia M una varietà Riemanniana con tensore di curvatura R. La *curvatura di Ricci* del vettore $X \in T_pM$ è la forma quadratica associata al tensore di Ricci: $\mathrm{Ric}(X) = \mathrm{Ric}(X,X)$. L'*operatore di Ricci* è l'unico operatore lineare simmetrico $\mathrm{R} \in \mathcal{T}_1^1(M)$ tale che $\mathrm{Ric}(X,Y) = \langle \mathrm{R}(X), Y\rangle$. La *curvatura scalare* $S \in C^\infty(M)$ è la traccia dell'operatore di Ricci.

Se $\{Z_1, \ldots, Z_n\}$ è di nuovo una base ortonormale di T_pM otteniamo

$$\mathrm{Ric}(X) = \sum_{j=1}^{n} \langle R_{Z_j X} X, Z_j \rangle = \sum_{j=1}^{n} Q(Z_j, X), \qquad \mathrm{R}(X) = \sum_{j=1}^{n} R_{X Z_j} Z_j,$$

e quindi

$$S(p) = \sum_{j=1}^{n} \langle \mathrm{R}(Z_j), Z_j \rangle = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Ric}(Z_j, Z_j) = \sum_{i,j=1}^{n} \langle R_{Z_i Z_j} Z_j, Z_i \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} Q(Z_i, Z_j).$$

In coordinate locali, se poniamo $\mathrm{Ric}(\partial_i, \partial_j) = R_{ij}$ e $\mathrm{R}(\partial_i) = R_i^j \partial_j$ troviamo

$$R_{ij} = R_{kij}^k, \qquad R_i^j = g^{jh} R_{ih} = g^{jh} R_{kih}^k, \qquad S = R_i^i = g^{ih} R_{ih} = g^{ih} R_{kih}^k.$$

Per completezza, concludiamo questo paragrafo richiamando una definizione che si trova spesso in letteratura.

Definizione 6.1.8: Una metrica Riemanniana g su una varietà M è detta *di Einstein* se esiste $\lambda \in C^\infty(M)$ tale che $\mathrm{Ric} = \lambda g$.

Se (M, g) è di Einstein, allora l'operatore di Ricci è $\lambda\,\mathrm{id}$; calcolando la traccia troviamo $\lambda = \frac{1}{n} S$, dove n è la dimensione di M. Quindi g è di Einstein se e solo se

$$\mathrm{Ric} = \frac{1}{n} S g.$$

Osservazione 6.1.4. In realtà, usando la seconda identità di Bianchi si può dimostrare che la curvatura scalare di una varietà di Einstein di dimensione $n \geq 3$ è costante, per cui Ric risulta essere un multiplo costante della metrica.

Concludiamo il paragrafo con alcune definizioni e alcuni esercizi.

Esercizio 6.1.5. Se (M, g) è una varietà Riemanniana e $k > 0$, è evidente che anche (M, kg) è una varietà Riemanniana. Trova che relazione esiste fra la connessione di Levi-Civita e il tensore di curvatura di (M, g) e i corrispondenti oggetti per (M, kg).

Esercizio 6.1.6. Trova come si esprimono la connessione di Levi-Civita e il tensore di curvatura della metrica prodotto in funzione delle connessioni di Levi-Civita e dei tensori di curvatura dei due fattori.

Definizione 6.1.9: Una sottovarietà $N \subset M$ di una varietà Riemanniana è *totalmente geodetica* se per ogni $p \in N$ e $v \in T_pN$ la geodetica di M uscente da p in direzione v è completamente contenuta in N. Diremo invece che N è *piatta* se il tensore di curvatura in N della metrica indotta è identicamente nullo.

Esercizio 6.1.7. Sia N_1 una sottovarietà totalmente geodetica di una varietà Riemanniana M_1, e N_2 una sottovarietà totalmente geodetica di una varietà Riemanniana M_2. Dimostra che $N_1 \times N_2$ è una sottovarietà totalmente geodetica di $M_1 \times M_2$.

Esercizio 6.1.8. Sia $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ la sfera unitaria con la metrica indotta dalla metrica euclidea di $\mathbb{R}^3$, e sia $M = S^2 \times S^2$ considerata con la metrica prodotto.

(i) Dimostra che la curvatura sezionale di M è non-negativa.
(ii) Trova una sottovarietà N di M totalmente geodetica, piatta e diffeomorfa a un 2-toro $T^2 = S^1 \times S^1$.

Esercizio 6.1.9. Sia M una sottovarietà di una varietà Riemanniana $\tilde{M}$, considerata con la metrica indotta. In questo esercizio indicheremo con la tilde tutti gli oggetti (connessione di Levi-Civita $\tilde{\nabla}$, curvatura $\tilde{R}$, eccetera) relativi a $\tilde{M}$, e senza tilde i corrispondenti oggetti relativi a M. Indicheremo poi con $T\colon T\tilde{M} \to TM$ e con $\perp\colon T\tilde{M} \to (TM)^\perp$ le proiezioni ortogonali. Infine, $\mathcal{T}(\tilde{M}, M)$ sarà lo spazio delle sezioni (su M) di $T\tilde{M}|_M$, e $\mathcal{N}(M) \subset \mathcal{T}(\tilde{M}, M)$ lo spazio delle sezioni di $T\tilde{M}|_M$ ovunque ortogonali a TM. In altre parole, una sezione $N\colon M \to T\tilde{M}|_M$ appartiene a $\mathcal{N}(M)$ se e solo se $N(p) \in (T_pM)^\perp$ per ogni $p \in M$.

(i) Dimostra che l'applicazione $\mathit{II}: \mathcal{N}(M) \times \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) \to C^\infty(M)$, detta *seconda forma fondamentale* di M in $\tilde{M}$, data da

$$\mathit{II}(N, X, Y) = \langle \tilde{\nabla}_X N, Y \rangle$$

è $C^\infty(M)$-trilineare, ed è inoltre simmetrica negli ultimi due argomenti.

(ii) Sia $S: \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(\tilde{M}, M) \to \mathcal{N}(M)$ l'*operatore di forma* definito da

$$S(X, Y) = - \perp (\tilde{\nabla}_X Y)$$

per ogni $X \in \mathcal{T}(M)$, e $Y \in \mathcal{T}(\tilde{M}, M)$. Dimostra che $\langle S(X, Y), N \rangle = \mathit{II}(N, X, Y)$ per ogni $N \in \mathcal{N}(M)$ e X, $Y \in \mathcal{T}(M)$.

(iii) Dimostra l'*equazione di Gauss*

$$\langle \tilde{R}_{XY} Z, W \rangle = \langle R_{XY} Z, W \rangle - \langle S(Y, Z), S(X, W) \rangle + \langle S(X, Z), S(Y, W) \rangle$$

per ogni X, Y, Z, $W \in \mathcal{T}(M)$.

(iv) Dimostra l'*equazione di Codazzi-Mainardi*

$$\perp \tilde{R}_{XY} Z = S\big(Y, S(X, Z)\big) + S(\nabla_Y X, Z) + S(X, \nabla_Y Z) - S\big(X, S(Y, Z)\big) - S(\nabla_X Y, Z) - S(Y, \nabla_X Z)$$

per ogni X, Y, $Z \in T(M)$.

(v) Trova che relazione c'è fra la seconda forma fondamentale, le equazioni di Gauss e le equazioni di Codazzi-Mainardi viste per le superfici in $\mathbb{R}^3$ e quelle definite qui.

(vi) Dimostra il *lemma di Synge:* sia $\sigma: (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ una geodetica per $\tilde{M}$ il cui sostegno sia contenuto in M, e $\pi \subset T_{\sigma(0)} M$ un 2-piano contenente $\dot{\sigma}(0)$. Allora $K(\pi) \le \tilde{K}(\pi)$.

Esercizio 6.1.10. Sia ∇ la connessione di Levi-Civita su una varietà Riemanniana (M, g), $\{E_1, \dots, E_n\}$ un riferimento locale di TM, $\{\varphi^1, \dots, \varphi^n\}$ il riferimento duale di T^*M, e (ω^i_j) la matrice delle 1-forme di connessione. Definiamo $\Omega^j_i: \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) \to C^\infty(M)$ per i, $j = 1, \dots, n$ tramite la formula

$$R_{XY} E_i = \Omega^j_i(X, Y) E_j.$$

Dimostra che le Ω^j_i sono delle 2-forme locali (dette *forme di curvatura*), e dimostra la *seconda equazione di struttura di Cartan:*

$$\Omega^j_i = d\omega^j_i - \omega^k_i \wedge \omega^j_k$$

per i, $j = 1, \dots, n$.

Esercizio 6.1.11. Dimostra che una varietà Riemanniana (M, g) è localmente isometrica a $\mathbb{R}^n$ con la metrica euclidea se e soltanto se il tensore di curvatura R di M è identicamente nullo.

6.2 Campi di Jacobi

Vogliamo ora introdurre quello che risulterà essere lo strumento essenziale per collegare il comportamento delle geodetiche con la curvatura.

Per cominciare ci servono una definizione, un esempio e un lemma.

Definizione 6.2.1: Sia $\Sigma: (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \to M$ una variazione di una curva regolare a tratti $\sigma: [a, b] \to M$. Un *campo vettoriale X lungo Σ* è dato da una suddivisione $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$ di $[a, b]$ associata a Σ e da applicazioni $X: (-\varepsilon, \varepsilon) \times [t_{j-1}, t_j] \to TM$ di classe C^∞ tali che $X(s, t) \in T_{\Sigma(s,t)} M$ per ogni $(s, t) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times [t_{j-1}, t_j]$ e $j = 1, \dots, k$. Se i vari campi vettoriali si raccordano con continuità nei punti interni $t_1, \dots, t_{k-1}$ della suddivisione, diremo che X è un campo *continuo*.

Esempio 6.2.1. Sia $\Sigma: (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \to M$ una variazione di una curva regolare a tratti $\sigma: [a, b] \to M$. Allora i campi S e T introdotti nella Definizione 5.2.7 sono esempi di campi vettoriali lungo Σ. Inoltre, S è un campo continuo, mentre T potrebbe non esserlo.

Il prossimo risultato è analogo al Lemma 5.2.4.

Lemma 6.2.1: *Sia $\Sigma\colon(-\varepsilon,\varepsilon)\times[a,b]\to M$ una variazione di una curva $\sigma\colon[a,b]\to M$ regolare a tratti in una varietà Riemanniana M. Allora per ogni campo vettoriale V lungo Σ e su ogni rettangolo $(-\varepsilon,\varepsilon)\times[t_{j-1},t_j]$ su cui Σ e V sono di classe C^∞ abbiamo*

$$D_sD_tV-D_tD_sV=R_{ST}V,$$

dove D_t è la derivata covariante lungo le curve principali, e D_s quella lungo le curve trasverse.

Dimostrazione: Calcoliamo in coordinate locali. Posto $V=V^i\partial_i$ abbiamo

$$D_tV=\frac{\partial V^i}{\partial t}\partial_i+V^iD_t\partial_i$$

e

$$D_sD_tV=\frac{\partial^2V^i}{\partial s\partial t}\partial_i+\frac{\partial V^i}{\partial t}D_s\partial_i+\frac{\partial V^i}{\partial s}D_t\partial_i+V^iD_sD_t\partial_i.$$

Analogamente,

$$D_tD_sV=\frac{\partial^2V^i}{\partial t\partial s}\partial_i+\frac{\partial V^i}{\partial s}D_t\partial_i+\frac{\partial V^i}{\partial t}D_s\partial_i+V^iD_tD_s\partial_i,$$

per cui

$$D_sD_tV-D_tD_sV=V^i(D_sD_t\partial_i-D_tD_s\partial_i).$$

Ora, se indichiamo con Σ^h le coordinate di Σ abbiamo

$$T=\frac{\partial\Sigma^h}{\partial t}\partial_h \qquad \text{e} \qquad S=\frac{\partial\Sigma^h}{\partial s}\partial_h.$$

Quindi

$$D_t\partial_i=\nabla_T\partial_i=\frac{\partial\Sigma^h}{\partial t}\nabla_{\partial_h}\partial_i$$

e

$$D_sD_t\partial_i=D_s\left(\frac{\partial\Sigma^h}{\partial t}\nabla_{\partial_h}\partial_i\right)=\frac{\partial^2\Sigma^h}{\partial s\partial t}\nabla_{\partial_h}\partial_i+\frac{\partial\Sigma^h}{\partial t}\nabla_S\nabla_{\partial_h}\partial_i=\frac{\partial^2\Sigma^h}{\partial s\partial t}\nabla_{\partial_h}\partial_i+\frac{\partial\Sigma^h}{\partial t}\frac{\partial\Sigma^k}{\partial s}\nabla_{\partial_k}\nabla_{\partial_h}\partial_i.$$

In maniera analoga si calcola $D_tD_s\partial_i$. Ricordando che $[\partial_h,\partial_k]=O$ otteniamo infine

$$D_sD_t\partial_i-D_tD_s\partial_i=\frac{\partial\Sigma^h}{\partial t}\frac{\partial\Sigma^k}{\partial s}R_{\partial_k\partial_h}\partial_i=R_{ST}\partial_i$$

e ci siamo. □

Usando questo lemma possiamo caratterizzare i campi variazione di variazioni in cui tutte le curve principali sono geodetiche.

Definizione 6.2.2: Una *variazione geodetica* di una geodetica $\sigma\colon[a,b]\to M$ in una varietà Riemanniana M è una variazione liscia $\Sigma\colon(-\varepsilon,\varepsilon)\times[a,b]\to M$ tale che ogni curva principale $\sigma_s=\Sigma(s,\cdot)$ sia una geodetica.

L'esempio principale di variazione geodetica è descritto nel prossimo

Lemma 6.2.2: *Sia $\sigma\colon[a,b]\to M$ una geodetica, e v, $w\in T_{\sigma(a)}M$. Allora esiste una variazione geodetica $\Sigma\colon(-\varepsilon,\varepsilon)\times[a,b]\to M$ di σ il cui campo variazione V soddisfa $V(a)=v$ e $D_aV=w$. La variazione Σ è data da*

$$\Sigma(s,t)=\exp_{\tau(s)}\big((t-a)(u(s)+sw(s))\big),$$

dove $\tau\colon(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$ è una curva uscente da $\sigma(a)$ tangente a v, mentre u, $w\in\mathcal{T}(\tau)$ sono le estensioni parallele lungo τ di $\dot\sigma(a)$ e w rispettivamente.

Dimostrazione: Se $\tau\colon(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$ è una curva e $\psi\in\mathcal{T}(\tau)$, allora la $\Sigma\colon(-\varepsilon,\varepsilon)\times[a,b]\to M$ data da

$$\Sigma(s,t)=\exp_{\tau(s)}\big((t-a)\psi(s)\big)$$

è sempre una variazione geodetica della geodetica $\sigma_0(t) = \exp_{\tau(0)}\bigl((t-a)\psi(0)\bigr)$, non appena $(b-a)\psi(0) \in \mathcal{E}_{\tau(0)}$ ed ε è abbastanza piccolo. Quindi vogliamo trovare τ e ψ in modo che $\sigma_0 \equiv \sigma$ e il campo variazione V di Σ soddisfi $V(a) = v$ e $D_a V = w$.

Ora, $\sigma(t) = \exp_{\sigma(a)}\bigl((t-a)\dot\sigma(a)\bigr)$; quindi per avere $\sigma_0 \equiv \sigma$ basta scegliere τ e ψ in modo che $\tau(0) = \sigma(a)$ e $\psi(0) = \dot\sigma(a)$. Poi $\Sigma(s,a) = \tau(s)$, per cui $V(a) = S(0,a) = \dot\tau(a)$ e quindi $V(a) = v$ non appena τ è scelta in modo che $\dot\tau(a) = v$.

Infine, $T(s,t) = d(\exp_{\tau(s)})_{(t-a)\psi(s)}\bigl(\psi(s)\bigr)$, per cui il Lemma 5.2.4 dà

$$D_t S|_{t=a} = D_s T(s,a) = D_s \psi,$$

per cui $D_a V = D_t S|_{t=a,s=0} = D_0 \psi$, e quindi $D_a V = w$ non appena ψ è scelto in modo che $D_0\psi = w$. Ma il modo più semplice per scegliere un campo lungo τ fissando il suo valore iniziale e il valore iniziale della sua derivata covariante lungo τ è prenderlo lineare rispetto alla derivata covariante, cioè della forma $\psi(s) = u(s) + s w(s)$, con u e w paralleli lungo τ e con $u(0) = \dot\sigma(a)$ e $w(0) = w$. In questo modo si ha $\psi(0) = \dot\sigma(a)$ e $D_s\psi = w(s)$, come voluto, e ci siamo. □

Siamo allora in grado di caratterizzare completamente i campi variazione di variazioni geodetiche:

Proposizione 6.2.3: *Sia $\sigma\colon [a,b] \to M$ una geodetica. Allora un campo $J \in \mathcal{T}(\sigma)$ è il campo variazione di una variazione geodetica di σ se e solo se*

$$D^2 J + R_{J\dot\sigma}\dot\sigma = O. \tag{6.2.1}$$

Inoltre, dati v, $w \in T_{\sigma(a)}M$ esiste un unico campo $J \in \mathcal{T}(\sigma)$ soddisfacente (6.2.1) *e tale che $J(a) = v$ e $D_a J = w$.*

Dimostrazione: Sia Σ una variazione geodetica di σ, di campo variazione J, e indichiamo come al solito con D_t la derivata covariante lungo le curve principali di Σ, e con D_s quella lungo le curve trasverse. Per ipotesi abbiamo $D_t T \equiv O$; quindi

$$O \equiv D_s D_t T = D_t D_s T + R_{ST} T = D_t D_t S + R_{ST} T,$$

dove abbiamo usato i Lemmi 6.2.1 e 5.2.4. Siccome per $s = 0$ si ha $S = J$ e $T = \dot\sigma$, abbiamo ricavato (6.2.1).

Ora, sia $\{E_1, \ldots, E_n\}$ una base ortonormale di $T_{\sigma(a)}M$, con $E_1 = \dot\sigma(a)/\|\dot\sigma(a)\|_{\sigma(a)}$, e indichiamo con $E_j(t)$ l'estensione parallela di E_j lungo σ, in modo che $\{E_1(t), \ldots, E_n(t)\}$ sia una base ortonormale di $T_{\sigma(t)}M$ per ogni $t \in [a,b]$. Definiamo inoltre funzioni $\hat R^i_{jhk}\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ponendo

$$R_{E_j(t)E_h(t)} E_k(t) = \hat R^i_{jhk}(t) E_i(t).$$

Ogni $J \in \mathcal{T}(\sigma)$ si può scrivere come $J(t) = J^i(t) E_i(t)$ per opportune funzioni $J^1, \ldots, J^n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$; in particolare, $J(a) = J^i(a) E_i$. Inoltre, essendo gli $E_j(t)$ paralleli otteniamo $D_t J = \dot J^i(t) E_i(t)$, per cui $D_a J = \dot J^i(a) E_i$. Quindi J soddisfa (6.2.1) se e solo se si ha

$$\ddot J^i + \|\dot\sigma(a)\|^2_{\sigma(a)} \hat R^i_{j11} J^j \equiv 0$$

per $i = 1, \ldots, n$. Dunque (6.2.1) è un sistema lineare di equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine, per cui (Teorema 4.3.4, adattato al caso dei sistemi del second'ordine come nella dimostrazione della Proposizione 5.1.2) per ogni v, $w \in T_{\sigma(a)}M$ esiste un'unica soluzione $J \in \mathcal{T}(\sigma)$ di (6.2.1) tale che $J(a) = v$ e $D_a J = w$.

Infine, supponiamo che J soddisfi (6.2.1), e sia $\Sigma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a,b] \to M$ una variazione geodetica di σ il cui campo variazione V soddisfi $V(a) = J(a)$ e $D_a V = D_a J$, costruita per esempio come nel Lemma 6.2.2. Allora anche V soddisfa (6.2.1), con le stesse condizioni iniziali di J; quindi $V \equiv J$, e ci siamo. □

Definizione 6.2.3: Sia $\sigma\colon [a,b] \to M$ una geodetica. Un *campo di Jacobi* lungo σ è una soluzione $J \in \mathcal{T}(\sigma)$ di (6.2.1), che è detta *equazione di Jacobi*. Lo spazio vettoriale dei campi di Jacobi lungo σ verrà indicato con $\mathcal{J}(\sigma)$. Un campo di Jacobi $J \in \mathcal{J}(\sigma)$ sarà detto *proprio* se $J(t) \perp \dot\sigma(t)$ per ogni $t \in [a,b]$. Il sottospazio dei campi di Jacobi propri sarà indicato con $\mathcal{J}_0(\sigma)$.

Alcune proprietà elementari dei campi di Jacobi sono contenute nella seguente

Proposizione 6.2.4: *Sia $\sigma\colon[a,b]\to M$ una geodetica. Allora:*

(i) *gli zeri di un campo di Jacobi $J\in\mathcal{J}(\sigma)$ non identicamente nullo sono isolati;*
(ii) *per ogni $J\in\mathcal{J}(\sigma)$ abbiamo*

$$\langle J(t),\dot\sigma(t)\rangle_{\sigma(t)}=\langle J(a),\dot\sigma(a)\rangle_{\sigma(a)}+\langle D_aJ,\dot\sigma(a)\rangle_{\sigma(a)}(t-a);\tag{6.2.2}$$

(iii) *un campo di Jacobi $J\in\mathcal{J}(\sigma)$ è proprio se e solo se $J(a)\perp\dot\sigma(a)$ e $D_aJ\perp\dot\sigma(a)$ se e solo se è ortogonale a $\dot\sigma$ in due punti;*
(iv) *ogni campo di Jacobi J lungo σ si può scrivere in modo unico nella forma $J=J_0+[c_0+c_1(t-a)]\dot\sigma$, dove $J_0\in\mathcal{J}_0(\sigma)$ e c_0, $c_1\in\mathbb{R}$;*
(v) $\dim\mathcal{J}(\sigma)=2\dim M$ *e* $\dim\mathcal{J}_0(\sigma)=2\dim M-2$.

Dimostrazione: (i) Se $t_0\in[a,b]$ è uno zero non isolato di J, possiamo trovare una successione $\{t_\nu\}\subset[a,b]$ convergente a t_0 di zeri di J. Ma allora

$$D_{t_0}J=\lim_{\nu\to+\infty}\frac{\tilde\sigma_{t_0,t_\nu}^{-1}\big(J(t_\nu)\big)-J(t_0)}{t_\nu-t_0}=O,$$

grazie alla Proposizione 4.3.6, dove $\tilde\sigma_{t_0,t_\nu}\colon T_{\sigma(t_0)}M\to T_{\sigma(t_\nu)}M$ è il trasporto parallelo lungo σ. Ma allora $J\equiv O$ per la Proposizione 6.2.3, in quanto J ha derivata covariante nulla in un punto in cui si annulla.

(ii) Siccome $D\dot\sigma\equiv O$ abbiamo $\frac{d}{dt}\langle J,\dot\sigma\rangle_\sigma=\langle DJ,\dot\sigma\rangle_\sigma$ e

$$\frac{d^2}{dt^2}\langle J,\dot\sigma\rangle_\sigma=\langle D^2J,\dot\sigma\rangle_\sigma=-\langle R_{J\dot\sigma}\dot\sigma,\dot\sigma\rangle_\sigma=0,$$

dove l'ultima eguaglianza segue dalle simmetrie del tensore di curvatura. In particolare, $\langle J,\dot\sigma\rangle_\sigma$ dev'essere lineare affine in t, e otteniamo (6.2.2).

(iii) Segue subito da (ii).

(iv) Prima di tutto, si verifica subito che $[c_0+c_1(t-a)]\dot\sigma$ è un campo di Jacobi lungo σ quali che siano c_0, $c_1\in\mathbb{R}$. Ora, dato $J\in\mathcal{J}(\sigma)$, vogliamo dimostrare che esistono unici c_0, $c_1\in\mathbb{R}$ tali che $J_0=J-[c_0+c_1(t-a)]\dot\sigma$ sia un campo di Jacobi proprio lungo σ. Per il punto (iii), J_0 è proprio se e solo se $J_0(a)$ e D_aJ_0 sono ortogonali a $\dot\sigma(a)$. Ma

$$\langle J_0(a),\dot\sigma(a)\rangle_{\sigma(a)}=\langle J(a),\dot\sigma(a)\rangle_{\sigma(a)}-c_0\|\dot\sigma(a)\|^2_{\sigma(a)}\quad\text{e}\quad\langle D_aJ_0,\dot\sigma(a)\rangle_{\sigma(a)}=\langle D_aJ,\dot\sigma(a)\rangle_{\sigma(a)}-c_1\|\dot\sigma(a)\|^2_{\sigma(a)};$$

quindi J_0 è proprio se e solo se

$$c_0=\frac{\langle J(a),\dot\sigma(a)\rangle_{\sigma(a)}}{\|\dot\sigma(a)\|^2_{\sigma(a)}}\qquad\text{e}\qquad c_1=\frac{\langle D_aJ,\dot\sigma(a)\rangle_{\sigma(a)}}{\|\dot\sigma(a)\|^2_{\sigma(a)}},$$

e ci siamo.

(v) Che la dimensione di $\mathcal{J}(\sigma)$ sia uguale a $2\dim M$ segue dall'esistenza e unicità della soluzione dell'equazione di Jacobi date le condizioni iniziali. Infine, (iv) implica che $\dim\mathcal{J}_0(\sigma)=2\dim M-2$. □

Uno dei motivi per cui i campi di Jacobi sono importanti è che ci permettono di stabilire quando $\exp_p$ smette di essere un diffeomorfismo locale.

Definizione 6.2.4: Sia $\sigma\colon[a,b]\to M$ una geodetica con $\sigma(a)=p$ e $\sigma(b)=q$. Diremo che q è *coniugato a p lungo σ* se esiste un campo di Jacobi $J\in\mathcal{J}(\sigma)$ non identicamente nullo tale che $J(a)=J(b)=O$. L'*ordine* di q come punto coniugato di p è la dimensione del sottospazio dei campi di Jacobi lungo σ (necessariamente propri) che si annullano in a e b. Chiaramente, l'ordine è al massimo $n-1=\dim\{J\in\mathcal{J}_0(\sigma)\mid J(a)=O\}$.

Allora abbiamo la

Proposizione 6.2.5: *Data una varietà Riemanniana M, scegliamo $p \in M$, un vettore $v \in \mathcal{E}_p \subseteq T_pM$, e poniamo $q = \exp_p(v)$. Allora $\exp_p$ è un diffeomorfismo locale nell'intorno di v se e solo se q non è coniugato a p lungo la geodetica $\sigma\colon [0,1] \to M$ data da $\sigma(t) = \exp_p(tv)$. Inoltre, l'ordine di q come punto coniugato di p lungo σ è esattamente la dimensione del nucleo di $d(\exp_p)_v$.*

Dimostrazione: Grazie al teorema della funzione inversa (Corollario 2.4.5), $\exp_p$ è un diffeomorfismo locale nell'intorno di v se e solo se v non è un punto critico di $\exp_p$, cioè se e solo se $d(\exp_p)_v$ è iniettivo; quindi per avere la tesi ci basta costruire un isomorfismo χ fra il nucleo di $d(\exp_p)_v$ e il sottospazio dei campi di Jacobi lungo σ che si annullano in 0 e 1.

In realtà, faremo di più: costruiremo un isomorfismo χ fra T_pM e $\{J \in \mathcal{J}(\sigma) \mid J(0) = O\}$ che manderà $\operatorname{Ker} d(\exp_p)_v$ esattamente in $\{J \in \mathcal{J}(\sigma) \mid J(0) = J(1) = O\} \subseteq \mathcal{J}_0(\sigma)$. Dato $w \in T_v(T_pM) \cong T_pM$, definiamo una variazione geodetica $\Sigma_w\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0,1] \to M$ di σ ponendo

$$\Sigma_w(s,t) = \exp_p\bigl(t(v + sw)\bigr).$$

Il campo variazione J_w di questa variazione geodetica è dato da

$$J_w(t) = t\, d(\exp_p)_{tv}(w);$$

in particolare, $J_w(0) = O$ e $D_0 J_w = w$. Dunque l'applicazione $\chi\colon T_pM \to \mathcal{J}(\sigma)$ data da $\chi(w) = J_w$ è lineare e iniettiva; siccome $\dim T_pM = n = \dim\{J \in \mathcal{J}(\sigma) \mid J(0) = O\}$, l'immagine di χ è esattamente il sottospazio di tutti i campi di Jacobi che si annullano in 0. Ma $J_w(1) = d(\exp_p)_v(w)$; quindi χ manda il nucleo di $d(\exp_p)_v$ sul sottospazio dei campi di Jacobi lungo σ che si annullano in 0 e 1, e ci siamo. □

6.3 Il Teorema di Cartan-Hadamard

In questo paragrafo dimostreremo il primo risultato fondamentale sulle relazioni fra la curvatura e la topologia di una varietà Riemanniana: il Teorema di Cartan-Hadamard sulle varietà con curvatura sezionale non positiva. Ci servirà la

Proposizione 6.3.1: *Sia $H\colon M \to N$ un'isometria locale fra varietà Riemanniane connesse, e supponiamo che M sia completa. Allora anche N è completa, e H è un rivestimento.*

Dimostrazione: Cominciamo col dimostrare un fatto preliminare. Sia $q \in H(M)$, e $p \in H^{-1}(q)$. Allora per ogni geodetica σ uscente da q esiste un'unica geodetica $\tilde\sigma$ uscente da p tale che $\sigma = H \circ \tilde\sigma$. Infatti, prima di tutto ricordiamo che (Esercizio 5.1.2) $\tilde\sigma$ è una geodetica in M se e solo se σ è una geodetica in N. Poi, se vale $\sigma = H \circ \tilde\sigma$ si deve avere $\dot\sigma(0) = dH_p\bigl(\dot{\tilde\sigma}(0)\bigr)$, per cui $\tilde\sigma$ è l'unica geodetica di M uscente da p e tale che $\dot{\tilde\sigma}(0) = (dH_p)^{-1}\bigl(\dot\sigma(0)\bigr)$. Viceversa, data σ indichiamo con $\tilde\sigma$ l'unica geodetica di M uscente da p e tale che $\dot{\tilde\sigma}(0) = (dH_p)^{-1}\bigl(\dot\sigma(0)\bigr)$; allora $H \circ \tilde\sigma$ dev'essere una geodetica di N uscente da q tangente a $\dot\sigma(0)$, per cui $H \circ \tilde\sigma = \sigma$, come voluto.

Dimostriamo che N è completa. Dato $q \in H(M)$, sia σ una geodetica radiale uscente da q, e prendiamo $p \in H^{-1}(q)$. Essendo M completa, la geodetica $\tilde\sigma$ uscente da p tale che $\sigma = H \circ \tilde\sigma$ è definita su tutto $\mathbb{R}$. Ma allora anche σ lo è, e, per il Teorema di Hopf-Rinow, N è completa.

Ora dimostriamo che H è surgettiva. Siano $q_0 = H(p) \in H(M)$ e $q \in N$ qualsiasi. Essendo N completa, esiste una geodetica minimizzante σ da q_0 a q; poniamo $w = \dot\sigma(0)$. Ma allora $\sigma = H \circ \tilde\sigma$ per un'opportuna geodetica $\tilde\sigma$ in M uscente da p, per cui q risulta essere nell'immagine di H.

Rimane da far vedere che H è un rivestimento. Prendiamo $q_0 \in N$, e sia $U = B_\varepsilon(q_0)$ una palla geodetica di centro q_0; vogliamo dimostrare che U è un intorno ben rivestito di q_0. Scriviamo $H^{-1}(q_0) = \{p_\alpha\}_{\alpha \in A}$, e indichiamo con U_α la palla di centro p_α e raggio ε per la distanza Riemanniana d^M di M. Cominciamo a far vedere che $U_\alpha \cap U_\beta = \varnothing$ se $\alpha \neq \beta$. Infatti, essendo M completa possiamo trovare una geodetica minimizzante $\tilde\sigma$ da p_α a p_β. La sua proiezione $\sigma = H \circ \tilde\sigma$ è una geodetica in N da q_0 a q_0. Siccome le geodetiche che partono da q_0 in $B_\varepsilon(q_0)$ sono solo quelle radiali, σ deve uscire da U e rientrarvi; quindi ha lunghezza maggiore di 2ε. Dunque $d^M(p_\alpha, p_\beta) = L(\tilde\sigma) = L(\sigma) > 2\varepsilon$ (dove abbiamo usato l'Esercizio 5.2.2), e per la disuguaglianza triangolare $U_\alpha \cap U_\beta = \varnothing$.

Adesso mostriamo che $H^{-1}(U) = \bigcup U_\alpha$. Siccome H è un'isometria locale, sempre l'Esercizio 5.2.2 implica che

$$d^N\bigl(H(p_1), H(p_2)\bigr) \le d^M(p_1, p_2)$$

per ogni p_1, $p_2 \in M$, dove d^N è la distanza Riemanniana di N. In particolare, essendo U la palla per d^N di centro q_0 e raggio ε (Teorema 5.2.10), otteniamo $H(U_\alpha) \subseteq U$ per ogni α. Viceversa, sia $p \in H^{-1}(U)$. Questo significa che $q = H(p) \in U$, per cui esiste una geodetica minimizzante σ da q a q_0, e $r = d^N(q_0, q) < \varepsilon$. Sia $\tilde\sigma$ la geodetica uscente da p tale che $\sigma = H \circ \tilde\sigma$; allora $H\bigl(\tilde\sigma(r)\bigr) = \sigma(r) = q_0$, per cui $\tilde\sigma(r) = p_\alpha$ per qualche α, e $p \in U_\alpha$ come voluto.

Infine, dobbiamo dimostrare che $H|_{U_\alpha}: U_\alpha \to U$ è un diffeomorfismo per ogni α. Sappiamo che H manda la geodetica radiale in U_α uscente da p_α tangente a $w \in T_{p_\alpha}M$ nella geodetica radiale in U uscente da q_0 tangente a $dH_{p_\alpha}(w) \in T_{q_0}N$. Ma questo vuol dire esattamente che

$$H|_{U_\alpha} = \exp_{q_0} \circ dH_{p_\alpha} \circ (\exp_{p_\alpha}|_{B_\varepsilon(O_{p_\alpha})})^{-1},$$

per cui $(H|_{U_\alpha})^{-1} = \exp_{p_\alpha} \circ (dH_{p_\alpha})^{-1} \circ (\exp_{q_0}|_{B_\varepsilon(O_{q_0})})^{-1}$, e quindi $H|_{U_\alpha}$ è un diffeomorfismo. □

Esercizio 6.3.1. Sia $H: M \to N$ un'isometria locale fra varietà Riemanniane connesse, e supponiamo che N sia completa. Dimostra che se H è un rivestimento allora anche M è completa, e trova un esempio di un'isometria locale fra una varietà M non completa e una varietà N completa.

E allora abbiamo il

Teorema 6.3.2: (Cartan-Hadamard) *Sia (M, g) una varietà Riemanniana completa. Allora:*

(i) *se M ha curvatura sezionale $K \le 0$ allora ogni $p \in M$ non ha punti coniugati;*
(ii) *se esiste $p \in M$ senza punti coniugati allora $\exp_p: T_pM \to M$ è un rivestimento.*

In particolare, ogni varietà Riemanniana completa semplicemente connessa di dimensione n con curvatura sezionale non positiva è diffeomorfa a $\mathbb{R}^n$.

Dimostrazione: (i) Dato $p \in M$, sia σ una geodetica uscente da p. Dobbiamo dimostrare che se $J \in \mathcal{J}(\sigma)$ è un campo di Jacobi lungo σ non identicamente nullo che si annulla in 0 allora $J(t) \ne O$ per ogni $t \ne 0$. Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(t) = \|J(t)\|^2_{\sigma(t)}$. Allora $f' = 2\langle DJ, J\rangle_\sigma$, per cui $f(0) = f'(0) = 0$, e

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = 2\bigl[\|DJ\|^2_\sigma + \langle D^2J, J\rangle_\sigma\bigr] = 2\bigl[\|DJ\|^2_\sigma - \langle R_{J\dot\sigma}\dot\sigma, J\rangle_\sigma\bigr] = 2\bigl[\|DJ\|^2_\sigma - Q_\sigma(J, \dot\sigma)\bigr] \ge 0,$$

grazie all'ipotesi sul segno della curvatura sezionale. Quindi f è una funzione convessa non negativa con zeri isolati che si annulla in 0, per cui può annullarsi in un altro punto soltanto se è identicamente nulla, e ci siamo.

(ii) Poniamo su T_pM la metrica Riemanniana $g_0 = (\exp_p)^* g$; siccome p è privo di punti coniugati, $\exp_p$ è un diffeomorfismo locale grazie alla Proposizione 6.2.5, e quindi g_0 è ben definita. Per costruzione, $\exp_p: (T_pM, g_0) \to (M, g)$ è un'isometria locale; quindi le rette uscenti dall'origine sono geodetiche (in quanto le loro immagini sono geodetiche in M). Per il Teorema di Hopf-Rinow, (T_pM, g_0) è completa, e la tesi segue allora dalla Proposizione 6.3.1. □

Concludiamo questa sezione con alcune definizioni ed esercizi.

Definizione 6.3.1: Sia M una varietà Riemanniana. Diremo che una funzione $f: M \to \mathbb{R}$ di classe C^∞ è *strettamente convessa* se l'Hessiano $\nabla^2 f$ è definito positivo in ogni punto di M (e scriveremo $\nabla^2 f > 0$). Diremo invece che un sottoinsieme $S \subseteq M$ è *strettamente convesso* se il supporto di ogni geodetica minimizzante collegante due punti di $\overline{S}$ è contenuto nell'interno di S (con la possibile eccezione dei punti estremi).

Esercizio 6.3.2. Sia M una varietà Riemanniana.

(i) Dimostra che una funzione $f: M \to \mathbb{R}$ è strettamente convessa se e solo se per ogni geodetica σ di M la funzione $f \circ \sigma$ è strettamente convessa nel senso usuale.

(ii) Dato $p_0 \in M$ definiamo $r: M \to \mathbb{R}$ ponendo $r(p) = d(p, p_0)$. Dimostra che r^2 è di classe C^∞ in un intorno di p_0, e che $\nabla^2 r^2(p_0) > 0$.
(iii) Dimostra che per ogni $p_0 \in M$ esiste $\delta > 0$ tale che se $0 < \varepsilon < \delta$ la palla geodetica $B_\varepsilon(p_0)$ di centro p_0 e raggio ε è strettamente convessa.
(iv) Dimostra che se M è completa, semplicemente connessa, e con curvatura sezionale $K \le 0$, allora per ogni $p_0 \in M$ la funzione r^2 definita in (ii) è strettamente convessa su tutta M.

Definizione 6.3.2: Sia M una varietà Riemanniana completa. Una funzione $f: M \to \mathbb{R}$ è detta *esaustione* se l'insieme $\{p \in M \mid f(p) \le c\}$ è compatto per ogni $c \in \mathbb{R}$.

Esercizio 6.3.3. Sia M una varietà Riemanniana completa.
(i) Dimostra che un'esaustione strettamente convessa ha un unico punto di minimo e nessun altro punto critico.
(ii) Sia G un gruppo di Lie compatto di isometrie di M, μ una misura di Borel su G, e $f: M \to \mathbb{R}$ di classe C^∞. Dimostra che la funzione $\tilde{f}: M \to \mathbb{R}$ data da

$$\tilde{f}(p) = \int_G f\big(g(p)\big)\, d\mu(g)$$

è strettamente convessa.
(iii) La *misura di Haar* di un gruppo topologico compatto G è l'unica misura di Borel μ su G tale che $\mu(G) = 1$ e

$$\int_G f(gh)\, d\mu(g) = \int_G f(g)\, d\mu(g)$$

per ogni $f \in C^0(G)$ e $h \in G$. Usando l'esistenza della misura di Haar su qualsiasi gruppo topologico compatto, dimostra che se M è semplicemente connessa con curvatura sezionale $K \le 0$, allora ogni gruppo di Lie compatto di isometrie di M ammette un punto fisso, cioè un punto $p_0 \in M$ tale che $g(p_0) = p_0$ per ogni $g \in G$.

6.4 Spazi di curvatura costante

Vogliamo ora trovare tutte le varietà semplicemente connesse a curvatura sezionale costante. Per arrivarci ci serviranno due interessanti risultati dovuti a É. Cartan.

Il primo dice che, in un certo senso, il tensore di curvatura determina localmente la metrica, fornendo una specie di viceversa locale dell'Esercizio 6.1.1.

Definizione 6.4.1: Siano M e $\tilde{M}$ due varietà Riemanniane di uguale dimensione, $p \in M$, $\tilde{p} \in \tilde{M}$. Un'isometria lineare $I: T_pM \to T_{\tilde{p}}\tilde{M}$ determina una corrispondenza biunivoca fra le geodetiche uscenti da p e quelle uscenti da $\tilde{p}$: alla geodetica σ_v si associa la geodetica $\sigma_{I(v)}$. Diremo che I *preserva il trasporto parallelo della curvatura sezionale* se $K_M\big(\tilde{\sigma}_v(\pi)\big) = K_{\tilde{M}}\big(\tilde{\sigma}_{I(v)}\big(I(\pi)\big)\big)$ per ogni 2-piano $\pi \subset T_pM$ e ogni $v \in T_pM$, dove $\tilde{\sigma}_v$ (rispettivamente, $\tilde{\sigma}_{I(v)}$) indica il trasporto parallelo lungo σ_v (rispettivamente, lungo $\sigma_{I(v)}$).

Osservazione 6.4.1. Si verifica facilmente che se $H: M \to \tilde{M}$ è una isometria locale allora dH_p preserva il trasporto parallelo della curvatura sezionale quale che sia $p \in M$.

Proposizione 6.4.1: (É. Cartan) *Siano M e $\tilde{M}$ due varietà Riemanniane, $p \in M$, $\tilde{p} \in \tilde{M}$ e $I: T_pM \to T_{\tilde{p}}\tilde{M}$ un'isometria lineare che preserva il trasporto parallelo della curvatura sezionale. Scegliamo un numero $0 < \delta \le \operatorname{inj\,rad}(p)$ tale che $B_\delta(O_{\tilde{p}})$ sia contenuto nel dominio $\tilde{\mathcal{E}}$ dell'esponenziale di $\tilde{M}$. Allora*

$$F = \exp_{\tilde{p}} \circ I \circ \exp_p^{-1}: B_\delta(p) \to B_\delta(\tilde{p})$$

è un'isometria locale. In particolare, se si ha anche $\delta \le \operatorname{inj\,rad}(\tilde{p})$ allora F è un'isometria.

Dimostrazione: Preso $v \in T_pM$, poniamo $\tilde{v} = I(v) \in T_{\tilde{p}}\tilde{M}$; allora ci basta dimostrare che si ha

$$\big\| d(\exp_{\tilde{p}})_{\tilde{v}}\big(I(w)\big)\big\| = \| d(\exp_p)_v(w)\| \tag{6.4.1}$$

per ogni $w \in T_v(T_pM) \cong T_pM$. Siccome I è un'isometria, il Lemma 5.2.8 ci dice che basta dimostrare (6.4.1) per w versore ortogonale a v (nel qual caso $I(w)$ è un versore ortogonale a $\tilde{v}$). Sia $\{E_1, \ldots, E_n\}$ una base ortonormale di T_pM con $E_1 = v/\|v\|_p$ e $E_n = w$, e poniamo $\tilde{E}_j = I(E_j)$. Sia σ la geodetica uscente da p tangente a v, e $\tilde{\sigma}$ la geodetica uscente da $\tilde{p}$ tangente a $\tilde{v}$; indicheremo con $E_j(t)$ e $\tilde{E}_j(t)$ l'estensione parallela di E_j ed $\tilde{E}_j$ lungo σ e $\tilde{\sigma}$ rispettivamente. Definiamo ora le variazioni Σ e $\tilde{\Sigma}$ di σ e $\tilde{\sigma}$:

$$\Sigma(s,t) = \exp_p\bigl(t(v + sw)\bigr), \qquad \tilde{\Sigma}(s,t) = \exp_{\tilde{p}}\bigl(t\bigl(\tilde{v} + sI(w)\bigr)\bigr),$$

e siano J e $\tilde{J}$ i corrispondenti campi di Jacobi. Allora $J(0) = O = \tilde{J}(0)$, $D_0J = w$ e $D_0\tilde{J} = I(w)$. Inoltre $J(1) = d(\exp_p)_v(w)$ e $\tilde{J}(1) = d(\exp_{\tilde{p}})_{\tilde{v}}\bigl(I(w)\bigr)$; quindi basta dimostrare che $\|J(1)\| = \|\tilde{J}(1)\|$. Ora, scriviamo $J(t) = J^i(t)E_i(t)$ e $R_{E_i(t)E_j(t)}E_k(t) = R^h_{ijk}(t)E_h(t)$, e analogamente per $\tilde{J}$ e $\tilde{R}$; quindi le funzioni J^i e $\tilde{J}^i$ soddisfano le

$$\begin{cases} \dfrac{d^2J^i}{dt^2} + \|v\|_p^2 R^i_{j11}J^j = 0, \\[2mm] J^i(0) = 0, \quad \dfrac{dJ^i}{dt}(0) = \delta^i_n, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2\tilde{J}^i}{dt^2} + \|I(v)\|_{\tilde{p}}^2 \tilde{R}^i_{j11}\tilde{J}^j = 0, \\[2mm] \tilde{J}^i(0) = 0, \quad \dfrac{d\tilde{J}^i}{dt}(0) = \delta^i_n. \end{cases}$$

Ma

$$R^i_{j11}(t) = \langle R_{E_j(t)E_1(t)}E_1(t), E_i(t)\rangle_{\sigma(t)} = \langle \tilde{R}_{\tilde{E}_j(t)\tilde{E}_1(t)}\tilde{E}_1(t), \tilde{E}_i(t)\rangle_{\tilde{\sigma}(t)} = \tilde{R}^i_{j11}(t),$$

in quanto la curvatura sezionale determina il tensore di curvatura, e la curvatura sezionale è preservata per trasporto parallelo. Siccome $\|v\|_p = \|I(v)\|_{\tilde{p}}$, ne segue che $(J^1, \ldots, J^n)$ e $(\tilde{J}^1, \ldots, \tilde{J}^n)$ soddisfano lo stesso sistema lineare di equazioni differenziali ordinarie con le stesse condizioni iniziali; quindi coincidono, e

$$\|J(1)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |J^i(1)|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n |\tilde{J}^i(1)|^2} = \|\tilde{J}(1)\|,$$

come volevasi dimostrare. □

Ci servirà anche un altro risultato di É. Cartan:

Teorema 6.4.2: (É. Cartan) *Siano H, $\tilde{H}\colon M \to \tilde{M}$ due isometrie locali fra due varietà Riemanniane connesse. Supponiamo che esista $p_0 \in M$ tale che $H(p_0) = \tilde{H}(p_0)$ e $dH_{p_0} = d\tilde{H}_{p_0}$. Allora $H \equiv \tilde{H}$.*

Dimostrazione: L'insieme $C = \{p \in M \mid H(p) = \tilde{H}(p), dH_p = d\tilde{H}_p\}$ è un chiuso non vuoto di M; ci basterà dimostrare che è aperto. Prendiamo $p \in C$, e sia $0 < \delta \le \min\{\operatorname{inj\,rad}(p), \operatorname{inj\,rad} H(p)\}$, per cui $B_\delta(p) \subset M$ e $B_\delta\bigl(H(p)\bigr) \subset \tilde{M}$ sono palle geodetiche. Siccome H e $\tilde{H}$ sono isometrie locali, mandano geodetiche uscenti da p in geodetiche uscenti da $H(p) = \tilde{H}(p)$. Ma allora

$$\exp_{H(p)} \circ dH_p = H \circ \exp_p \qquad \text{e} \qquad \exp_{\tilde{H}(p)} \circ d\tilde{H}_p = \tilde{H} \circ \exp_p$$

su $B_\delta(O_p)$, per cui

$$H|_{B_\delta(p)} = \exp_{H(p)} \circ dH_p \circ (\exp_p)^{-1}|_{B_\delta(p)} = \exp_{\tilde{H}(p)} \circ d\tilde{H}_p \circ (\exp_p)^{-1}|_{B_\delta(p)} = \tilde{H}|_{B_\delta(p)},$$

per cui $B_\delta(p) \subset C$, ed è fatta. □

Corollario 6.4.3: *Sia $H\colon M \to M$ un'isometria di una varietà Riemanniana connessa in sé. Supponiamo che esista $p \in M$ tale che $H(p) = p$ e $dH_p = \mathrm{id}$. Allora $H \equiv \mathrm{id}_M$.*

Dimostrazione: Basta applicare il Teorema precedente con $\tilde{M} = M$ e $\tilde{H} = \mathrm{id}_M$. □

Possiamo ora dimostrare un'affermazione fatta nell'Esempio 4.2.4:

Corollario 6.4.4: $\mathrm{Iso}(S^n_R) = O(n+1)$.

Dimostrazione: Sia $H \in \mathrm{Iso}(S^n_R)$ un'isometria qualunque di S^n_R, indichiamo con $N \in S^n_R$ il polo nord, sia $p = H(N)$ e poniamo $E_j = dH_N(e_j)$ per $j = 1, \ldots, n$, dove $\{e_1, \ldots, e_{n+1}\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^{n+1}$. Essendo H un'isometria, $\{E_1, \ldots, E_n\}$ è una base ortonormale di $T_pS^n_R$; scegliamo $A \in O(n+1)$ tale che $A(N) = p$ e $A(e_j) = E_j$ per $j = 1, \ldots, n$. Allora $G = A^{-1} \circ H$ è un'isometria di S^n_R tale che $G(N) = N$ e $dG_N(e_j) = e_j$ per $j = 1, \ldots, n$; quindi $dG_N = \mathrm{id}$, e il Corollario 6.4.3 implica $G = \mathrm{id}$, cioè $H = A \in O(n+1)$, come voluto. □

Esercizio 6.4.1. Dimostra che il gruppo delle isometrie dello spazio iperbolico U^n_R è il gruppo $O_+(1,n)$ introdotto nell'Esercizio 4.2.1.

Come già detto, il nostro obiettivo ora è classificare le varietà Riemanniane semplicemente connesse a curvatura sezionale costante. Vediamo quali esempi conosciamo già.

Esempio 6.4.1. Lo spazio euclideo $\mathbb{R}^n$ con la metrica euclidea ha chiaramente curvatura sezionale costante nulla.

Esempio 6.4.2. La sfera $S^n_R \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ha curvatura sezionale costante. Infatti, abbiamo visto nell'Esempio 4.2.4 che il gruppo $O(n+1)$ agisce isometricamente su S^n_R, e transitivamente sulle basi ortonormali in TS^n_R. Quindi se $p, \tilde{p} \in S^n_R$ sono due punti qualsiasi, e $\pi \subset T_pS^n_R$ e $\tilde{\pi} \subset T_{\tilde{p}}S^n_R$ sono due 2-piani qualsiasi, esiste (perché?) un'isometria $A \in O(n+1)$ tale che $A(p) = \tilde{p}$ e $dA_p(\pi) = A(\pi) = \tilde{\pi}$; essendo la curvatura sezionale invariante per isometrie, ne deduciamo che $K(\pi) = K(\tilde{\pi})$. Per conoscere la curvatura sezionale di S^n_R ci basta allora calcolarla su un 2-piano qualsiasi. Indichiamo con $\varphi = \psi_1^{-1} = (\theta^1, \ldots, \theta^n)$ le coordinate sferiche introdotte nell'Esempio 2.1.11, e con cui abbiamo lavorato negli Esempi 4.2.1 e 4.4.3. Prendiamo il punto $p = (1, 0, \ldots, 0) = \varphi(\pi/2, \ldots, \pi/2)$, per cui $\partial/\partial\theta^j|_p = -R\partial/\partial x^{j+1}$ per $j = 1, \ldots, n$. Allora

$$\left\| \frac{\partial}{\partial\theta^1} \wedge \frac{\partial}{\partial\theta^2} \right\|_p^2 = 2R^4 \qquad \text{e} \qquad Q_p\left(\frac{\partial}{\partial\theta^1}, \frac{\partial}{\partial\theta^2}\right) = R_p\left(\frac{\partial}{\partial\theta^1}, \frac{\partial}{\partial\theta^2}, \frac{\partial}{\partial\theta^2}, \frac{\partial}{\partial\theta^1}\right) = R_{1221}(p) = g_{r1}R^r_{122}(p).$$

L'Esempio 4.2.1 ci dice che $g_{11}(p) = R^2$ e $g_{r1}(p) = 0$ se $r \neq 1$. Quindi usando i valori dei simboli di Christoffel calcolati nell'Esempio 4.4.3 e la formula (6.1.2) troviamo

$$g_{r1}R^r_{122} = R^2 \left[\frac{\partial\Gamma^1_{22}}{\partial\theta^1} - \frac{\partial\Gamma^1_{12}}{\partial\theta^2} + \Gamma^1_{22}\Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{22}\Gamma^1_{12} - \Gamma^1_{12}\Gamma^1_{12} - \Gamma^2_{12}\Gamma^1_{22} \right](p) = R^2,$$

e quindi la sfera S^n_R ha curvatura sezionale costante $1/R^2$.

Esempio 6.4.3. Anche sullo spazio iperbolico esiste un gruppo di isometrie che agisce transitivamente sui 2-piani (Esercizio 4.2.1), per cui è a curvatura sezionale costante. Per calcolare il valore della curvatura sezionale possiamo usare come modello B^n_R, prendere come punto p l'origine, e come piano quello generato da $\partial/\partial x^1$ e $\partial/\partial x^2$, per cui di nuovo dobbiamo calcolare $R_{1221}(p)$. Usando i simboli di Christoffel determinati nell'Esempio 4.4.4 otteniamo $R_{1221}(p) = -16/R^2$ e $\|\partial/\partial x^1 \wedge \partial/\partial x^2\|_p^2 = 32$, per cui lo spazio iperbolico ha curvatura sezionale costante $-1/R^2$.

Dunque per ogni $k \in \mathbb{R}$ e $n \geq 2$ abbiamo trovato una varietà Riemanniana semplicemente connessa di dimensione n con curvatura sezionale costante uguale a k. Il fatto interessante è che non ce ne sono altre:

Teorema 6.4.5: *Due varietà Riemanniane $\tilde{M}$ e M semplicemente connesse complete della stessa dimensione e con uguale curvatura sezionale costante $k \in \mathbb{R}$ sono necessariamente isometriche.*

Dimostrazione: Consideriamo prima il caso $k \leq 0$. Scegliamo $p \in M$ e $\tilde{p} \in \tilde{M}$, e sia $I\colon T_{\tilde{p}}\tilde{M} \to T_pM$ un'isometria qualsiasi. Per il Teorema di Cartan-Hadamard la $H = \exp_p \circ I \circ \exp_{\tilde{p}}^{-1}\colon \tilde{M} \to M$ è un diffeomorfismo. Inoltre, siccome la curvatura sezionale è costante ed è uguale per entrambe le varietà, I preserva banalmente il trasporto parallelo della curvatura sezionale. Quindi per la Proposizione 6.4.1 la H è l'isometria cercata.

Supponiamo ora $k = 1/R^2 > 0$; ci basta dimostrare che M è isometrica a $\tilde{M} = S^n_R$, dove $n = \dim M$. Scegliamo $p_0 \in S^n_R$, $q_0 \in M$ e un'isometria lineare qualsiasi $I\colon T_{p_0}S^n_R \to T_{q_0}M$. Allora (Esempio 5.4.2) $\mathrm{inj\,rad}(p_0) = \pi R$, e $\exp_{p_0}^{-1}$ è definito su $S^n_R \setminus \{-p_0\}$, per cui otteniamo un'applicazione $H = \exp_{q_0} \circ I \circ \exp_{p_0}^{-1}$

da $S^n_R \setminus \{-p_0\}$ in M. Siccome di nuovo I preserva banalmente il trasporto parallelo della curvatura sezionale, la Proposizione 6.4.1 ci dice che H è un'isometria locale.

Ora prendiamo $p \in S^n_R \setminus \{p_0, -p_0\}$ e definiamo $\tilde{H}: S^n_R \setminus \{-p\} \to M$ ponendo $\tilde{H} = \exp_{H(p)} \circ dH_p \circ \exp_p^{-1}$. Come prima, $\tilde{H}$ è un'isometria locale; inoltre $\tilde{H}(p) = H(p)$ e $d\tilde{H}_p = dH_p$ per definizione. Quindi il Teorema 6.4.2 ci assicura che $\tilde{H} \equiv H$ su $S^n_R \setminus \{-p_0, -p\}$. In altre parole, possiamo estendere H a una isometria locale $H: S^n_R \to M$. Ma S^n_R è completa (in quanto compatta); il Lemma 6.3.1 ci assicura allora che H è un rivestimento. Ma M è semplicemente connessa, per cui H è un'isometria, come voluto. □

Concludiamo questo paragrafo calcolando i campi di Jacobi e la metrica in coordinate normali per spazi a curvatura sezionale costante.

Lemma 6.4.6: *Sia M una varietà Riemanniana a curvatura sezionale costante $k \in \mathbb{R}$, e $\sigma: [0, r] \to M$ una geodetica parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco. Allora i campi di Jacobi propri lungo σ che si annullano in 0 sono tutti e soli i campi della forma $J(t) = u(t)E(t)$, dove $E \in \mathcal{T}(\sigma)$ è un campo parallelo ortogonale a $\dot\sigma$, e $u: [0, r] \to \mathbb{R}$ è la funzione*

$$u(t) = \begin{cases} t & \text{se } k = 0; \\ R \sin \dfrac{t}{R} & \text{se } k = \dfrac{1}{R^2} > 0; \\ R \sinh \dfrac{t}{R} & \text{se } k = -\dfrac{1}{R^2} < 0. \end{cases} \tag{6.4.2}$$

Dimostrazione: Siccome M ha curvatura sezionale costante, il tensore di curvatura è dato da (6.1.3). Quindi un campo di Jacobi proprio J deve soddisfare

$$O = D^2 J + k\big[\|\dot\sigma\|^2_\sigma J - \langle J, \dot\sigma\rangle_\sigma \dot\sigma\big] = D^2 J + kJ.$$

Sia allora $w \in T_{\sigma(0)}M$ un vettore ortogonale a $\dot\sigma(0)$, ed $E(t)$ l'estensione parallela di w lungo σ. Allora si vede subito che il campo $J(t) = u(t)E(t)$ con u data da (6.4.2) è effettivamente un campo di Jacobi proprio con $J(0) = O$ e $D_0 J = w$; siccome i campi di Jacobi propri che si annullano in 0 sono completamente determinati dalla loro derivata covariante in 0, li abbiamo trovati tutti. □

Proposizione 6.4.7: *Sia (M, g) una varietà Riemanniana con curvatura sezionale costante $k \in \mathbb{R}$. Dato un punto $p \in M$, sia $\{E_1, \ldots, E_n\}$ una base ortonormale di T_pM, e indichiamo con $\varphi: U \to \mathbb{R}^n$ le corrispondenti coordinate normali centrate in p definite in una palla geodetica U. Infine, indichiamo con $\|\cdot\|_0$ la norma euclidea in queste coordinate (nel senso che se $v = v^i \partial_i$ allora $\|v\|_0 = \sqrt{(v^1)^2 + \cdots + (v^n)^2}$). Se $q = \exp_p(v_0) \in U \setminus \{p\}$ e $v \in T_qM$, scriviamo $v = a\,\partial/\partial r|_q + v^\perp$, dove $v^\perp \in T_qM$ è perpendicolare a $\partial/\partial r|_q$. Allora*

$$g_q(v, v) = \begin{cases} |a|^2 + \|v^\perp\|_0^2 & \text{se } k = 0; \\ |a|^2 + \dfrac{R^2}{r^2}\left(\sin^2 \dfrac{r}{R}\right) \|v^\perp\|_0^2 & \text{se } k = \dfrac{1}{R^2} > 0; \\ |a|^2 + \dfrac{R^2}{r^2}\left(\sinh^2 \dfrac{r}{R}\right) \|v^\perp\|_0^2 & \text{se } k = -\dfrac{1}{R^2} < 0, \end{cases}$$

dove $r = \|v_0\|_p = d(p, q)$.

Dimostrazione: Trattandosi di una decomposizione ortogonale, ed essendo il campo radiale $\partial/\partial r$ un campo di versori, dobbiamo solo calcolare $\|v^\perp\|_q^2$.

Indichiamo con $\sigma: [0, r] \to M$ la geodetica radiale da p a q parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco, in modo che si abbia $q = \sigma(r)$. Scegliamo $w \in T_pM$ tale che $v^\perp = d(\exp_p)_{v_0}(rw)$, e consideriamo la solita variazione geodetica di σ data da

$$\Sigma(s, t) = \exp_p\left(t\left(\frac{v_0}{r} + sw\right)\right).$$

Il campo di Jacobi di Σ è dato da

$$J(t) = t\, d(\exp_p)_{tv_0/r}(w),$$

per cui $J(0) = O$, $D_0 J = w$ e $J(r) = v^\perp$. D'altra parte, il Lemma precedente ci dice che possiamo scrivere J nella forma $J(t) = u(t)E(t)$, dove u è data da (6.4.2) ed E è parallelo lungo σ. In particolare, essendo $\dot u(0) = 1$, abbiamo $w = D_0 J = E(0)$ e quindi

$$\|v^\perp\|_q^2 = \|J(r)\|_q^2 = |u(r)|^2 \|E(r)\|_q^2 = |u(r)|^2 \|E(0)\|_p^2 = |u(r)|^2 \|w\|_p^2.$$

Quindi ci rimane da calcolare la norma di w. Ora, per definizione le coordinate normali sono date da $\varphi^{-1}(x) = \exp_p(x^i E_i)$, e quindi

$$\partial_i|_q = d(\varphi^{-1})_{\varphi(q)}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = d(\exp_p)_{v_0}(E_i).$$

In particolare, se scriviamo $v^\perp = v^i \partial_i|_q$ otteniamo $rw = v^i E_i$, per cui

$$\|w\|_p^2 = \frac{1}{r^2}\,\|v^\perp\|_0^2.$$

Mettendo tutto insieme otteniamo la tesi. □

6.5 La seconda variazione della lunghezza d'arco

Abbiamo visto che le geodetiche di una varietà Riemanniana sono i punti critici del funzionale lunghezza. Dall'Analisi arriva allora il suggerimento che per avere ulteriori informazioni sulle geodetiche potrebbe essere utile studiare il comportamento della derivata seconda del funzionale lunghezza.

Teorema 6.5.1: (Seconda variazione della lunghezza d'arco) *Sia $\sigma\colon [a,b] \to M$ una geodetica parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco in una varietà Riemanniana M, e $\Sigma\colon (-\varepsilon,\varepsilon)\times[a,b] \to M$ una sua variazione, con campo variazione $V \in \mathcal{T}(\sigma)$. Definiamo $L\colon (-\varepsilon,\varepsilon) \to \mathbb{R}$ ponendo $L(s) = L(\sigma_s)$. Allora*

$$\frac{d^2L}{ds^2}(0) = \langle \nabla_V S, \dot\sigma\rangle_\sigma\Big|_a^b + \int_a^b \left[\|DV\|_\sigma^2 - \langle R_{V\dot\sigma}\dot\sigma, V\rangle_\sigma - \left(\frac{d}{dt}\langle V,\dot\sigma\rangle_\sigma\right)^2\right] dt. \tag{6.5.1}$$

In particolare, ponendo $V^\perp = V - \langle V,\dot\sigma\rangle_\sigma \dot\sigma$ otteniamo

$$\frac{d^2L}{ds^2}(0) = \langle \nabla_V S, \dot\sigma\rangle_\sigma\Big|_a^b + \int_a^b \left[\|DV^\perp\|_\sigma^2 - \langle R_{V^\perp\dot\sigma}\dot\sigma, V^\perp\rangle_\sigma\right] dt. \tag{6.5.2}$$

Dimostrazione: Nel corso della dimostrazione del Teorema 5.2.5 abbiamo visto che

$$\frac{dL}{ds}(s) = \int_a^b \frac{1}{\|T\|}\langle D_s T, T\rangle\, dt,$$

dove D_s indica la derivata covariante lungo le curve trasverse (e D_t indicherà la derivata covariante lungo le curve principali). Quindi

$$\begin{aligned}\frac{d^2L}{ds^2}(s) &= \int_a^b \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\|T\|}\langle D_sT,T\rangle\right) dt = \int_a^b \left[-\frac{1}{\|T\|^3}\langle D_sT,T\rangle^2 + \frac{1}{\|T\|}\left(\|D_sT\|^2 + \langle D_sD_sT,T\rangle\right)\right] dt\\ &= \int_a^b \left[-\frac{1}{\|T\|^3}\langle D_tS,T\rangle^2 + \frac{1}{\|T\|}\left(\|D_tS\|^2 + \langle D_sD_tS,T\rangle\right)\right] dt\\ &= \int_a^b \left[-\frac{1}{\|T\|^3}\left(\frac{d}{dt}\langle S,T\rangle - \langle S, D_tT\rangle\right)^2 + \frac{1}{\|T\|}\left(\|D_tS\|^2 + \frac{d}{dt}\langle D_sS,T\rangle - \langle D_sS, D_tT\rangle - \langle R_{ST}T,S\rangle\right)\right] dt,\end{aligned}$$

dove come al solito abbiamo usato i Lemmi 6.2.1 e 5.2.4 e le simmetrie del tensore di curvatura. Ma σ è una geodetica parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco; quindi ponendo $s = 0$ otteniamo (6.5.1).

Infine, si verifica subito che $\langle V^\perp, \dot\sigma\rangle \equiv 0$. Quindi $\langle DV^\perp, \dot\sigma\rangle \equiv 0$,

$$DV = DV^\perp - \left(\frac{d}{dt}\langle V,\dot\sigma\rangle\right)\dot\sigma,$$

e le simmetrie del tensore di curvatura ci permettono di dedurre (6.5.2) da (6.5.1). □

La formula (6.5.2) suggerisce la seguente

Definizione 6.5.1: Sia $\sigma: [a,b] \to M$ una geodetica parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco in una varietà Riemanniana M. Indichiamo con $\mathcal{N}_0(\sigma) \subset \mathcal{T}(\sigma)$ lo spazio dei campi vettoriali regolari a tratti continui propri (cioè che si annullano in a e b) e normali (cioè ortogonali a $\dot\sigma$) lungo σ. La *forma di Morse* lungo σ è la forma bilineare simmetrica $I: \mathcal{N}_0(\sigma) \times \mathcal{N}_0(\sigma) \to \mathbb{R}$ definita da

$$I(V,W) = \int_a^b \left[\langle DV, DW \rangle_\sigma - \langle R_{V\dot\sigma}\dot\sigma, W \rangle_\sigma \right] dt$$

per ogni V, $W \in \mathcal{N}_0(\sigma)$.

Dunque mettendo insieme il Teorema 6.5.1 e il Lemma 5.2.3 otteniamo il

Corollario 6.5.2: *Sia $\sigma: [a,b] \to M$ una geodetica parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco in una varietà Riemanniana M. Se Σ è una variazione propria di σ con campo di variazione $V \in \mathcal{N}_0(\sigma)$ proprio normale, allora la derivata seconda di $L(s) = L(\sigma_s)$ in 0 è esattamente $I(V,V)$. In particolare, se σ è minimizzante allora $I(V,V) \ge 0$ per ogni $V \in \mathcal{N}_0(\sigma)$.*

La forma di Morse ha anche un'altra espressione che chiarisce il collegamento con i campi di Jacobi:

Lemma 6.5.3: *Sia $\sigma: [a,b] \to M$ una geodetica parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco in una varietà Riemanniana M. Allora per ogni V, $W \in \mathcal{N}_0(\sigma)$ si ha*

$$I(V,W) = -\int_a^b \langle D^2V + R_{V\dot\sigma}\dot\sigma, W \rangle_\sigma \, dt - \sum_{i=1}^{k-1} \langle \Delta_i DV, W(t_i) \rangle_{\sigma(t_i)},$$

dove $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$ è una partizione di $[a,b]$ tale che $V|_{[t_{i-1},t_i]}$ sia di classe C^∞ per $i = 1, \ldots, k$, e

$$\Delta_i DV = \lim_{t \to t_i^+} D_t V - \lim_{t \to t_i^-} D_t V$$

è il salto di $D_t V$ in t_i, per $i = 1, \ldots, k-1$.

Dimostrazione: Sia $a = s_0 < \cdots < s_r = b$ una partizione di $[a,b]$ tale che sia V che W siano di classe C^∞ su ciascun intervallo $[s_{j-1}, s_j]$. In questi intervalli si ha

$$\frac{d}{dt} \langle DV, W \rangle_\sigma = \langle D^2V, W \rangle_\sigma + \langle DV, DW \rangle_\sigma,$$

per cui

$$\int_{s_{j-1}}^{s_j} \langle DV, DW \rangle_\sigma \, dt = -\int_{s_{j-1}}^{s_j} \langle D^2V, W \rangle_\sigma \, dt + \langle DV, W \rangle_\sigma \Big|_{s_{j-1}}^{s_j}.$$

Siccome W è continuo e $W(a) = W(b) = 0$, sommando su tutti gli intervalli otteniamo la tesi. □

Usando la forma di Morse possiamo descrivere un importante collegamento fra punti coniugati e proprietà di minimizzazione delle geodetiche:

Proposizione 6.5.4: *Sia $\sigma: [a,b] \to M$ una geodetica parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco in una varietà Riemanniana M. Supponiamo che esista $t_0 \in (a,b)$ tale che $\sigma(t_0)$ sia coniugato a $p = \sigma(a)$ lungo σ. Allora esiste $X \in \mathcal{N}_0(\sigma)$ tale che $I(X,X) < 0$. In particolare, una geodetica σ non è mai minimizzante oltre il primo punto coniugato.*

Dimostrazione: L'ipotesi è che esista un campo di Jacobi non banale $J \in \mathcal{J}_0(\sigma|_{[a,t_0]})$ che si annulla in a e in t_0. Sia allora $V \in \mathcal{N}_0(\sigma)$ dato da

$$V(t) = \begin{cases} J(t) & \text{se } t \in [a, t_0], \\ O & \text{se } t \in [t_0, b]. \end{cases}$$

L'unica discontinuità di DV è per $t = t_0$, dove il salto è $\Delta DV = -D_{t_0}J$. Notiamo che $D_{t_0}J \neq O$, perché altrimenti J sarebbe un campo di Jacobi con $J(t_0) = D_{t_0}J = O$, e quindi sarebbe identicamente nullo.

Scegliamo $W \in \mathcal{N}_0(\sigma)$ di classe C^∞ tale che $W(t_0) = -D_{t_0}J$, e per $\varepsilon > 0$ poniamo $X_\varepsilon = V + \varepsilon W$. Allora $X_\varepsilon \in \mathcal{N}_0(\sigma)$ e

$$I(X_\varepsilon, X_\varepsilon) = I(V,V) + 2\varepsilon I(V,W) + \varepsilon^2 I(W,W).$$

Siccome V è un campo di Jacobi sia su $[a, t_0]$ che su $[t_0, b]$ e $V(t_0) = O$, il Lemma 6.5.3 ci dice che

$$I(V,V) = -\langle \Delta DV, V(t_0)\rangle_{\sigma(t_0)} = 0, \qquad I(V,W) = -\langle \Delta DV, W(t_0)\rangle_{\sigma(t_0)} = -\|W(t_0)\|^2_{\sigma(t_0)}.$$

Quindi

$$I(X_\varepsilon, X_\varepsilon) = -2\varepsilon\|W(t_0)\|^2_{\sigma(t_0)} + \varepsilon^2 I(W,W),$$

e per ε abbastanza piccolo otteniamo $I(X_\varepsilon, X_\varepsilon) < 0$. □

Definizione 6.5.2: Sia M una varietà Riemanniana completa, $p \in M$, $v \in T_pM$ di lunghezza unitaria, e $\sigma_v\colon [0, +\infty) \to M$ la geodetica parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco con $\sigma_v(0) = p$ e $\dot\sigma_v(0) = v$. Poniamo

$$t_0(v) = \sup\{t \in \mathbb{R}^+ \mid d\bigl(p, \sigma_v(t)\bigr) = t\}.$$

Se $t_0(v) < +\infty$, diremo che $\sigma_v(t_0)$ è un *punto di taglio* di σ_v rispetto a p. Il *luogo di taglio* di M rispetto a p è l'insieme

$$C(p) = \{\sigma_v(t_0) \mid v \in T_pM, \|v\|_p = 1, \sigma_v(t_0) \text{ punto di taglio di } \sigma_v \text{ rispetto a } p\}.$$

Esercizio 6.5.1. Sia M una varietà Riemanniana completa, $p \in M$, $v \in T_pM$ di lunghezza unitaria, e $\sigma_v\colon [0, +\infty) \to M$ la geodetica parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco con $\sigma_v(0) = p$ e $\dot\sigma_v(0) = v$.

(i) Dimostra che $\sigma_v(t_0)$ è un punto di taglio per p se e solo se una delle due condizioni seguenti si verifica per $t = t_0$ e nessuna delle due si verifica per valori di t minori di t_0:
  (a) $\sigma_v(t)$ è coniugato a p lungo σ_v;
  (b) esiste una geodetica $\tau \neq \sigma_v$ da p a $\sigma_v(t)$ tale che $L(\tau) = L(\sigma_v)$.

(ii) Sia $\mathcal{C} = \{v \in TM \mid \|v\| = 1, t_0(v) < +\infty\}$, e definiamo $\rho\colon \mathcal{C} \to \mathbb{R}^+$ ponendo $\rho(v) = d\bigl(\pi(v), \sigma_v\bigl(t_0(v)\bigr)\bigr)$, dove $\pi\colon TM \to M$ è la proiezione canonica e d è la distanza Riemanniana. Dimostra che ρ è una funzione continua, e deduci che $C(p)$ è un insieme chiuso.

(iii) Dimostra che $\operatorname{inj\,rad}(p) = d\bigl(p, C(p)\bigr)$.

(iv) Sia $q \in C(p)$ tale che $d(p,q) = d\bigl(p, C(p)\bigr)$. Dimostra che o esiste una geodetica minimizzante σ da p a q tale che q sia coniugato a p lungo σ, oppure esistono esattamente due geodetiche minimizzanti σ e τ parametrizzate rispetto alla lunghezza d'arco da p a q tali che $\dot\sigma\bigl(d(p,q)\bigr) = -\dot\tau\bigl(d(p,q)\bigr)$.

6.6 I teoremi di Bonnet-Myers e Synge-Weinstein

Vediamo che conseguenze possiamo trarre da quanto fatto finora per varietà con curvatura sezionale positiva.

Teorema 6.6.1: (Bonnet, Myers) *Sia M una varietà Riemanniana completa di dimensione $n \geq 2$. Supponiamo che esista $r > 0$ tale che la curvatura di Ricci di M soddisfi*

$$\operatorname{Ric}(v) \geq \frac{n-1}{r^2} > 0$$

per ogni $p \in M$ e $v \in T_pM$ di lunghezza unitaria. Allora

(i) *M è compatto e di diametro minore o uguale a πr;*

(ii) *il rivestimento universale di M è compatto, e il gruppo fondamentale di M è finito.*

Dimostrazione: (i) Siano p e q due punti di M. Siccome M è completa, esiste una geodetica minimizzante $\sigma\colon [0, \ell] \to M$ da p a q parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco; ci basta dimostrare che $L(\sigma) \leq \pi r$. Infatti in tal caso $d(p,q) \leq \pi r$, per cui il diametro di M è minore o uguale a πr e dunque M, essendo limitata e completa, è anche compatta, per il teorema di Hopf-Rinow.

Supponiamo allora, per assurdo, che $L(\sigma)=\ell>\pi r$. Scegliamo una famiglia $\{E_1,\ldots,E_{n-1}\}\subset\mathcal{T}(\sigma)$ di campi paralleli tali che $\{E_1(t),\ldots,E_{n-1}(t),\dot\sigma(t)\}$ sia una base ortonormale di $T_{\sigma(t)}M$ per ogni $t\in[0,\ell]$. Poniamo poi

$$V_j(t)=\sin\left(\frac{\pi}{\ell}t\right)\,E_j(t)$$

per $j=1,\ldots,n-1$. Il Lemma 6.4.6 ci dice che se M fosse una varietà con curvatura sezionale costante $(\pi/\ell)^2<1/r^2$ allora i V_j sarebbero campi di Jacobi; vediamo invece di che proprietà godono su M.

Chiaramente $V_j(0)=V_j(\ell)=O$, per cui $V_j\in\mathcal{N}_0(\sigma)$ per $j=1,\ldots,n-1$. Inoltre

$$I(V_j,V_j)=-\int_0^\ell\langle D^2V_j+R_{V_j\dot\sigma}\dot\sigma,V_j\rangle_\sigma\,dt=\int_0^\ell\sin^2\left(\frac{\pi}{\ell}t\right)\left[\frac{\pi^2}{\ell^2}-Q_\sigma(E_j,\dot\sigma)\right]dt.$$

Sommando su j e ricordando che $Q_\sigma(\dot\sigma,\dot\sigma)\equiv0$ otteniamo

$$\sum_{j=1}^{n-1}I(V_j,V_j)=\int_0^\ell\sin^2\left(\frac{\pi}{\ell}t\right)\left[(n-1)\frac{\pi^2}{\ell^2}-\mathrm{Ric}(\dot\sigma)\right]dt.$$

Ma l'ipotesi ci dice che

$$(n-1)\frac{\pi^2}{\ell^2}-\mathrm{Ric}(\dot\sigma)\le(n-1)\left[\frac{\pi^2}{\ell^2}-\frac{1}{r^2}\right]<0;$$

quindi

$$\sum_{j=1}^{n-1}I(V_j,V_j)<0.$$

Dunque deve esistere almeno un j_0 tale che $I(V_{j_0},V_{j_0})<0$, per cui il Corollario 6.5.2 implica che σ non è minimizzante, contraddizione.

(ii) Sia $\pi\colon\tilde M\to M$ il rivestimento universale di M. Se g è la metrica Riemanniana su M, possiamo mettere su $\tilde M$ la metrica Riemanniana π^*g, in modo che il rivestimento π diventi un'isometria locale. In particolare, per ogni $p\in\tilde M$ e $v\in T_p\tilde M$ il sollevamento $\tilde\sigma$ uscente da p della geodetica σ in M uscente da $\pi(p)$ tangente a $d\pi_p(v)$ è una geodetica in $\tilde M$. Essendo M completa, σ è definita su tutto $\mathbb{R}$; quindi anche $\tilde\sigma$ lo è, e il teorema di Hopf-Rinow ci assicura che anche $(\tilde M,\pi^*g)$ è completa.

Siccome la curvatura si calcola localmente, anche la curvatura di Ricci di $\tilde M$ è limitata inferiormente da $(n-1)/r^2$. La parte (i) ci assicura allora che anche $\tilde M$ è compatta; in particolare, il numero dei fogli del rivestimento è finito — e da questo segue subito che il gruppo fondamentale di M è finito. □

Corollario 6.6.2: *Sia M una varietà Riemanniana completa di dimensione $n\ge2$ con curvatura sezionale $K\ge1/r^2>0$. Allora M è compatta, con diametro minore o uguale a πr, e $\pi_1(M)$ è finito.*

Dimostrazione: Infatti $K\ge1/r^2$ implica $\mathrm{Ric}\ge(n-1)/r^2$, dove $n=\dim M$. □

Osservazione 6.6.1. L'ipotesi $K>0$ non basta: infatti il paraboloide $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid z=x^2+y^2\}$ ha curvatura sezionale positiva ma non è compatto.

Osservazione 6.6.2. La stima sul diametro è la migliore possibile: la sfera S^n ha diametro π e curvatura sezionale costante uguale a 1 (e quindi curvatura di Ricci costante uguale a $n-1$). È interessante notare che vale anche un viceversa: infatti, si può dimostrare che se M è una varietà Riemanniana completa di dimensione $n\ge2$ con diametro πr e la cui curvatura di Ricci soddisfa la disuguaglianza $\mathrm{Ric}\ge(n-1)/r^2$, allora M è isometrica alla sfera S^n_r di raggio $r>0$.

Il Teorema di Bonnet-Myers è solo il primo di una serie di teoremi profondi sulla topologia di varietà con curvatura sezionale positiva, di cui il più famoso è probabilmente il *Teorema della sfera di Berger e Klingenberg:*

Teorema 6.6.3: *Sia M una varietà Riemanniana completa, semplicemente connessa di dimensione n. Supponiamo che esista $R>0$ tale che*
$$\frac{1}{4R^2} < K(\pi) \le \frac{1}{R^2}$$
per ogni 2-piano $\pi \subset TM$. Allora M è omeomorfa a S^n_R.

Concludiamo invece il capitolo con un risultato sulle varietà orientate, che ha come conseguenza il fatto che in certe situazioni curvatura sezionale positiva implica la semplice connessione.

Per dimostrarlo ci serviranno un lemma di algebra lineare e un'osservazione.

Lemma 6.6.4: *Sia $A \in O(n-1)$ tale che $\det A = (-1)^n$. Allora 1 è autovalore di A, cioè esiste $v \in \mathbb{R}^{n-1}$ non nullo tale che $Av = v$.*

Dimostrazione: Essendo A ortogonale, gli autovalori reali di A sono ± 1, e quelli complessi sono in coppie complesse coniugate di modulo 1. Quindi $\det A = 1$ se -1 è autovalore di A con molteplicità pari, e $\det A = -1$ se -1 è autovalore di A con molteplicità dispari.

Se n è pari, $\det A = 1$, per cui -1 ha molteplicità pari; gli autovalori complessi coniugati sono anch'essi in numero pari, ma $n-1$, che è il numero di autovalori di A, è dispari, per cui 1 deve essere autovalore di A. Analogamente, se n è dispari -1 ha molteplicità dispari, ma $n-1$ è pari, per cui di nuovo 1 dev'essere autovalore. □

Osservazione 6.6.3. Sia M una varietà Riemanniana orientata da una forma di volume $\nu \in A^n(M)$. Allora il trasporto parallelo lungo una qualsiasi curva conserva l'orientazione, nel senso che manda basi positive in basi positive. Infatti, se $\{E_1(t),\dots,E_n(t)\}$ è il trasporto parallelo di una base positiva $\{E_1,\dots,E_n\}$ lungo una curva $\sigma\colon[a,b]\to M$, allora la funzione $t \mapsto \nu_{\sigma(t)}\bigl(E_1(t),\dots,E_n(t)\bigr)$ è una funzione di classe C^∞, mai nulla e positiva per $t=a$, e quindi positiva per ogni valore di $t \in [a,b]$.

Teorema 6.6.5: (Weinstein) *Sia $F\colon M \to M$ un'isometria di una varietà Riemanniana compatta orientata M di dimensione n con curvatura sezionale positiva. Supponiamo inoltre che F conservi l'orientazione se n è pari, e che la inverta se n è dispari. Allora F ha un punto fisso.*

Dimostrazione: Supponiamo, per assurdo, che $F(q) \ne q$ per ogni $q \in M$. Essendo M compatta, la funzione $q \mapsto d\bigl(q, F(q)\bigr)$ assume minimo in un punto $p \in M$, e il minimo è strettamente positivo. Inoltre, essendo M completa, esiste una geodetica minimizzante $\sigma\colon[0,\ell]\to M$ da p a $F(p)$, parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco. Cominciamo col dimostrare che
$$dF_p\bigl(\dot\sigma(0)\bigr) = \dot\sigma(\ell). \tag{6.6.1}$$
Infatti, essendo F un'isometria e σ una geodetica minimizzante da p a $F(p)$, la scelta di p implica che per ogni $t \in (0,\ell)$ si ha
$$\begin{aligned} d\bigl(p,F(p)\bigr) &\le d\Bigl(\sigma(t), F\bigl(\sigma(t)\bigr)\Bigr) \le d\bigl(\sigma(t),F(p)\bigr) + d\Bigl(F(p),F\bigl(\sigma(t)\bigr)\Bigr) = d\bigl(\sigma(t),F(p)\bigr) + d\bigl(p,\sigma(t)\bigr)\\ &= d\bigl(p,F(p)\bigr). \end{aligned}$$
In particolare,
$$d\Bigl(\sigma(t), F\bigl(\sigma(t)\bigr)\Bigr) = d\bigl(\sigma(t),F(p)\bigr) + d\Bigl(F(p),F\bigl(\sigma(t)\bigr)\Bigr).$$
Siccome σ e $F\circ\sigma$ sono geodetiche minimizzanti, questo implica che la curva ottenuta unendo σ e $F\circ\sigma$ è ancora minimizzante, e quindi una geodetica. In particolare è liscia, per cui $\dot\sigma(\ell) = (F\circ\sigma)'(0) = dF_p\bigl(\dot\sigma(0)\bigr)$, come voluto.

Poniamo $\tilde A = \tilde\sigma_\ell^{-1}\circ dF_p\colon T_pM \to T_pM$, dove $\tilde\sigma_\ell$ è il trasporto parallelo da p a $F(p)$ lungo σ; chiaramente, $\tilde A$ è un'isometria. Inoltre, ricordando l'Osservazione 6.6.3 vediamo che $\tilde A$ manda basi positive in basi positive se n è pari, e basi positive in basi negative se n è dispari; in particolare,
$$\det\tilde A = (-1)^n. \tag{6.6.2}$$
Da (6.6.1) segue subito che
$$\tilde A\bigl(\dot\sigma(0)\bigr) = (\tilde\sigma_\ell^{-1}\circ dF_p)\bigl(\dot\sigma(0)\bigr) = \tilde\sigma_\ell^{-1}\bigl(\dot\sigma(\ell)\bigr) = \dot\sigma(0).$$

Dunque $\tilde{A}$ manda il sottospazio $W = \dot\sigma(0)^\perp \subset T_pM$ ortogonale a $\dot\sigma(0)$ in se stesso; indichiamo con $A: W \to W$ la restrizione di $\tilde{A}$ a W. L'applicazione lineare A è un'isometria con determinante uguale a quello di $\tilde{A}$; quindi per il Lemma 6.6.4 possiamo allora trovare un campo parallelo $E_1 \in \mathcal{T}(\sigma)$ ortogonale a $\dot\sigma$ di lunghezza unitaria e tale che $AE_1(0) = E_1(0)$.

Sia $\tau: (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ una geodetica con $\tau(0) = p$ e $\dot\tau(0) = E_1(0)$. Siccome $AE_1(0) = E_1(0)$ otteniamo $dF_p\big(E_1(0)\big) = E_1(\ell)$, per cui la geodetica $F \circ \tau$ è tale che $F \circ \tau(0) = F(p)$ e $(F \circ \tau)'(0) = E_1(\ell)$.

Sia $\Sigma: (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, \ell] \to M$ la variazione di σ data da

$$\Sigma(s,t) = \exp_{\sigma(t)}\big(sE_1(t)\big).$$

Allora $\Sigma(s, 0) = \tau(s)$ e

$$\Sigma(s,\ell) = \exp_{F(p)}\big(sE_1(\ell)\big) = F \circ \tau(s).$$

In particolare, $S(s, 0) = \dot\tau(s)$ e $S(s, \ell) = (F \circ \tau)'(s)$.

Il campo variazione V di Σ è chiaramente E_1, per cui $DV \equiv O$. Ma allora (6.5.2) ci dà

$$\frac{d^2L}{ds^2}(0) = \langle \nabla_{E_1} S, \dot\sigma \rangle_\sigma \Big|_0^\ell - \int_0^\ell Q_\sigma(E_1, \dot\sigma)\, dt = -\int_0^\ell Q_\sigma(E_1, \dot\sigma)\, dt,$$

perché le curve trasverse σ^0 e σ^ℓ sono geodetiche tangenti a $E_1(0)$ e $E_1(\ell)$ rispettivamente, da cui segue che $\nabla_{E_1(t)} S = O$ per $t = 0$ e $t = \ell$. Ma la curvatura sezionale di M è strettamente positiva; quindi

$$\frac{d^2L}{ds^2}(0) < 0. \tag{6.6.3}$$

Se tutte le curve principali della variazione avessero lunghezza maggiore o uguale a σ, la funzione $L(s)$ assumerebbe minimo assoluto in $s = 0$, contro la (6.6.3); quindi deve esistere un s_0 tale che $L(\sigma_{s_0}) < L(\sigma)$. Ma σ_{s_0} è una curva da $\tau(s_0)$ a $F\big(\tau(s_0)\big)$; quindi dovremmo avere

$$d\Big(\tau(s_0), F\big(\tau(s_0)\big)\Big) \le L(\sigma_{s_0}) < L(\sigma) = d\big(p, F(p)\big),$$

contro la scelta di p. Abbiamo trovato una contraddizione, e la dimostrazione è conclusa. □

Questo risultato ha come consequenza relazioni inaspettate fra orientabilità e topologia delle varietà compatte con curvatura sezionale positiva:

Corollario 6.6.6: (Synge) *Sia M una varietà Riemanniana compatta di dimensione n con curvatura sezionale positiva. Allora:*

(i) *Se n è pari e M è orientabile allora M è semplicemente connessa.*
(ii) *Se n è pari e M non è orientabile allora $\pi_1(M) = \mathbb{Z}_2$.*
(iii) *Se n è dispari allora M è orientabile.*

Dimostrazione: (i) Sia $\pi: \tilde{M} \to M$ il rivestimento universale di M. Se g è la metrica Riemanniana di M, e $\nu \in A^n(M)$ una forma di volume per M, mettiamo su $\tilde{M}$ la metrica $\tilde{g} = \pi^* g$ e la forma di volume $\pi^*\nu$, in modo che π diventi un'isometria locale che conserva l'orientazione. Siccome M è compatta con curvatura sezionale positiva, deve esistere $\delta > 0$ tale che $K \ge \delta$. Quindi possiamo applicare il Teorema 6.6.1, e anche $\tilde{M}$ è compatta, con curvatura sezionale positiva in quanto π è un'isometria locale.

Sia $F: \tilde{M} \to \tilde{M}$ un automorfismo del rivestimento, cioè $\pi \circ F = \pi$. Allora F è un'isometria di $\tilde{M}$ che conserva l'orientazione (in quanto π la conserva), per cui il Teorema 6.6.5 implica che F ha un punto fisso. Ma l'unico automorfismo di un rivestimento che può avere punti fissi è l'identità, per cui $F = \mathrm{id}_{\tilde{M}}$. Quindi il gruppo di automorfismi di π si riduce all'identità, e questo equivale a dire che π è un diffeomorfismo, cioè che M è semplicemente connessa.

(ii) Se M non è orientabile, sia $\pi: \tilde{M} \to M$ il rivestimento a 2 fogli dato dalla Proposizione 3.6.2. Mettendo su $\tilde{M}$ la metrica indotta dalla metrica di M possiamo applicare a $\tilde{M}$ il punto (i); quindi $\tilde{M}$ è semplicemente connessa, per cui è il rivestimento universale di M e $\pi_1(M) = \mathbb{Z}_2$.

(iii) Supponiamo per assurdo M non orientabile, e sia di nuovo $\pi: \tilde{M} \to M$ il rivestimento a 2 fogli dato dalla Proposizione 3.6.2. Mettiamo di nuovo su $\tilde{M}$ la metrica indotta, e sia $F: \tilde{M} \to M$ un automorfismo del rivestimento diverso dall'identità. Ma $\tilde{M}$ è compatta con curvatura sezionale positiva; siccome F inverte l'orientazione di $\tilde{M}$ e n è dispari, possiamo applicare il Teorema 6.6.5 e ottenere un punto fisso per F, contraddizione. Quindi M è orientabile. □

Concludiamo con un esempio che mostra come le differenze fra le dimensioni pari e le dimensioni dispari siano inevitabili, e alcuni esercizi finali:

ESEMPIO 6.6.1. Sia $\pi\colon S^n \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ il rivestimento universale dello spazio proiettivo. Siccome la mappa antipodale $A(p) = -p$ è un'isometria di S^n, ed è l'unico automorfismo non banale del rivestimento π, otteniamo (Esempio 4.1.4) una metrica Riemanniana su $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ rispetto a cui π diventa un'isometria locale. In particolare, quindi, $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è compatto con curvatura sezionale positiva e gruppo fondamentale $\pi_1\big(\mathbb{P}^n(\mathbb{R})\big) = \mathbb{Z}_2$. Inoltre, è orientabile se e solo se n è dispari (Esercizio 3.5.3). Quindi $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ è un esempio di varietà compatta, non orientabile, di dimensione pari con curvatura sezionale costante positiva, mentre $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ è un esempio di varietà compatta, orientabile, non semplicemente connessa, con curvatura sezionale positiva e di dimensione dispari.

Esercizio 6.6.1. Scegliamo un punto p_0 in una varietà Riemanniana compatta M, e sia $r\colon M \to \mathbb{R}^+$ data da $r(q) = d(p_0, q)$ per ogni $q \in M$, dove d è la distanza Riemanniana. Dimostra che r non è mai di classe C^1 su $M \setminus \{p_0\}$.

Esercizio 6.6.2. Dimostra la seguente generalizzazione del Teorema di Bonnet-Myers: sia M una varietà Riemanniana completa. Supponiamo che esistano $a > 0$ e $c \geq 0$ tali che per ogni coppia di punti di M e ogni geodetica minimizzante σ parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco che unisce questi due punti si abbia

$$\mathrm{Ric}\big(\dot\sigma(s)\big) \geq a + \frac{df}{ds}$$

lungo σ, per una qualche funzione f tale che $|f(s)| \leq c$ lungo σ. Dimostra che M è compatta, e trova una stima sul diametro.