1. Compito del 7 gennaio 2025

Avete 2 ore e 40 minuti di tempo. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari, pena l'annullamento del compito. Scrivere chiaramente e motivare le risposte. Non saranno corretti esercizi scritti in modo illeggibile.

Esercizio 1. Sia $b : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ un prodotto scalare.

a) È vero che se b è non degenere allora non esistono vettori isotropi non nulli? Se vero spiegare perché, se falso dare un controesempio.

b) È vero che se b non è definito positivo o negativo allora esiste sicuramente un vettore isotropo non nullo. Se vero spiegare perché, se falso dare un controesempio.

Esercizio 2. Sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ definito dalle equazioni

$$2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \qquad \text{e} \qquad 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0$$

e sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori

$$w_1 = e_2 + e_3 + e_4 \qquad \text{e} \qquad w_2 = e_1 + e_2 + 3e_3 + e_4$$

determinare una base di $U \cap W$.

Esercizio 3. Siano r e s due assi passanti per l'origine che formano un angolo di 90 gradi. Sia R una rotazione attorno a r di angolo α e sia S la rotazione attorno all'asse s di angolo β.

a) Dimostrare che $S \circ R$ è una rotazione.

b) se $\alpha = \beta = 45$ gradi, determinare il coseno dell'angolo di rotazione di $S \circ R$.

Esercizio 4. Sullo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 2 si consideri il seguente prodotto scalare:

$$b(p(t), q(t)) = p(0)q(0) + p(1)q(1) - 2p(-1)q(-1)$$

a) Se ne determini la segnatura.

b) Si determini una base dell'ortogonale del polinomio $1 + t + t^2$ rispetto a questo prodotto scalare.

2. Soluzioni del compito del 7 gennaio 2025

Soluzione dell'esercizio 1. a) No, non è vero, per esempio il prodotto scalare

$$b((x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4)) = x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3 - x_4y_4$$

è non degenere e ha vettori isotropi, per esempio $(1, 1, 0, 0)$.

b) Si, è vero. Se b è degenere allora il radicale è fatto di vettori isotropi. Se b è non degenere allora esiste una base ortonormale v_i con $b(v_i, v_i) = \pm 1$. Poiché è non definito esistono i e j tale che $b(v_i, v_i) = 1$ e $b(v_j, v_j) = -1$. Allora il vettore $v = v_i - v_j$ è isotropo.

Soluzione dell'esercizio 2. Sia

$$w = aw_1 + bw_2 = (b, a + b, a + 3b, a + b)$$

un generico vettore di W, questo sarà un vettore dell'intersezione se le sue coordinate verificano le equazioni che definiscono U. Sostituendo otteniamo

$$2b + (a + b) - (a + 3b) - (a + b) = 0 \qquad \text{e} \qquad 2b - (a + b) - (a + 3b) + (a + b) = 0$$

da cui

$$-a - b = 0 = 0 \qquad \text{e} \qquad -a - b = 0$$

Quindi w è in U se e solo se $a = -b$. Quindi tutti i vettori dell'intersezione si scrivono come

$$w = b(w_2 - w_1) = a(e_1 + 2e_3)$$

e quindi $e_1 + 2e_2$ è una base dell'intersezione.

Soluzione dell'esercizio 3. Questo esercizio si può svolgere in modo sia puramente geometrico che algebrico. Geometrico si spiega meglio alla lavagna, algebrico si fa prima a scrivere.

a) Ricordiamo che una isometria lineare è una rotazione se e solo se ha determinante uguale a 1. In particolare S e R hanno determinante uguale a 1, e quindi, per il teorema di Binet, anche la loro composizione ha determinante uguale a 1. Poiché la composizione di isometrie è una isometria ricaviamo che $S \circ R$ è una isometria di determinante uguale a 1 e quindi una rotazione di un angolo che indicheremo con γ.

b) Scegliamo una base ortonormale v_i in cui v_1 è una base di s e v_2 di r. Quindi in questa base avremo

$$[S]_{v_i}^{v_i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \qquad [R]_{v_i}^{v_i} = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & -\sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix}$$

Quindi

$$[S \circ R]_{v_i}^{v_i} = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & -\sin\beta \\ -\sin\alpha\sin\beta & \cos\alpha & -\sin\alpha\cos\beta \\ -\cos\alpha\sin\beta & \sin\alpha & \cos\alpha\cos\beta \end{pmatrix}$$

In particolare la traccia di questa trasformazione è uguale a $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\alpha\cos\beta$. Sappiamo però che la traccia di una rotazione di angolo γ è anche uguale a $1 + 2\cos\gamma$. Quindi

$$\cos\gamma = \frac{\cos\alpha + \cos\beta + \cos\alpha\cos\beta - 1}{2}.$$

Se $\alpha = \beta = 45$ gradi otteniamo

$$\cos\gamma = \frac{\sqrt{2} - 1/2}{2} = \frac{2\sqrt{2} - 1}{4}.$$

Soluzione dell'esercizio 4. a) Scegliamo come base dello spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 2 gli elementi

$$f_0 = -(t-1)(t+1) \qquad f_1 = \frac{1}{2}t(t+1) \qquad f_{-1} = \frac{1}{2}t(t-1)$$

Questa base è caratterizzata dal fatto che $f_i(j) = 1$ se $i = j \in \{-1, 0, 1\}$ mentre $f_i(j) = 0$ se $\neq j \in \{-1, 0, 1\}$. Ne ricaviamo che è una base ortogonale e che

$$b(f_{-1}, f_{-1}) = -2 \qquad b(f_0, f_0) = 1 \qquad b(f_1, f_1) = 1$$

Quindi la segnatura di b è $(2, 1, 0)$.

b) L''ortogonale di $1 + t + t^2$ è dato dai polinomi $p(t)$ tali che

$$0 = b(1 + t + t^2, p(t)) = 1 \cdot p(0) + 3 \cdot p(1) - 2 \cdot 1 \cdot p(-1)$$

ovvero $p(0) + 3p(1) - 2p(-1) = 0$. Se $p(t) = at^2 + bt + c$ otteniamo

$$0 = c + 3(a + b + c) - 2(a - b + c) = a + 5b + 2c$$

ovvero $a = -5b - 2c$, quindi una base dell'ortogonale è data dai polinomi

$$-5t^2 + t \qquad \text{e} \qquad -2t^2 + 1.$$