

**Istruzioni:** Avete 3 ore di tempo a disposizione. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari, pena l'annullamento del compito. Scrivere chiaramente e motivare le risposte. Non saranno corretti esercizi scritti in modo illeggibile.

**Esercizio 1.**

- Si definisca l'immagine di una applicazione lineare  $F : V \rightarrow U$  e si dimostri che è un sottospazio vettoriale di  $U$ .
- Sia  $V = \text{Mat}_{3 \times 3}(\mathbb{C})$  e sia  $W$  il sottospazio di  $V$  delle matrici simmetriche. Sia  $F : V \rightarrow \mathbb{C}^7$  e si supponga che  $N(F) \oplus W = V$ . Si dica se  $F$  è surgettiva.

**Esercizio 2.** Sia  $U$  il sottospazio di  $\mathbb{C}^3$  definito dall'equazione  $x + y = 0$

Si determini due applicazioni lineari  $F, G : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$  con le seguenti proprietà.

- 0 e 1 sono autovalori di  $F$ .
- $F(U) \subset U$
- $F$  non è diagonalizzabile.
- 0 e 1 sono autovalori di  $G$ .
- $G(U) \subset U$
- $G$  è diagonalizzabile.

Si forniscano le matrici associate ad  $F$  e  $G$  rispetto alla base standard.

**Esercizio 3.** Si consideri le seguenti rette di  $\mathbb{R}^3$ :

$$r = \mathbb{R}e_3 \quad s = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 2 \quad e \quad y = z\}$$

- Determinare una isometria  $F$  tale che  $F(r) = s$  tale che  $F$  non abbia punti fissi.
- Determinare una isometria  $G$  tale che  $G(r) = s$  tale che  $G$  abbia punti fissi.

**Esercizio 4.** Sia  $b_t$  il prodotto scalare su  $\mathbb{R}^4$ , dipendente dal parametro reale  $t$ , che ha come matrice associata rispetto alla base standard la seguente:

$$B_t = \begin{pmatrix} t & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & t \end{pmatrix}$$

- Si determini la segnatura di  $b_1$ ,
- Si determini la segnatura di  $b_0$ .

**Istruzioni:** Avete 3 ore di tempo a disposizione. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari, pena l'annullamento del compito. Scrivere chiaramente e motivare le risposte. Non saranno corretti esercizi scritti in modo illeggibile.

**Esercizio 1.** Sia  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione 3 sul campo  $\mathbb{R}$  e sia  $F : V \rightarrow V$  una applicazione lineare. Per ognuna delle seguenti affermazioni dire se è vera o falsa. Se è vera darne una dimostrazione, se è falsa fare un controesempio.

- Se  $v_1, v_2, v_3$  sono una base di  $V$  allora  $F(v_1), F(v_2), F(v_3)$  sono una base di  $V$ .
- Se  $F$  è diagonalizzabile e  $v \in V$  allora esiste  $\lambda \in \mathbb{R}$  tale che  $F(v) = \lambda v$ .
- Se  $F(v_1), F(v_2), F(v_3)$  sono una base di  $V$  allora  $v_1, v_2, v_3$  sono una base di  $V$ .

**Esercizio 2.** Sia  $U$ ,  $V$  e  $W$  i seguenti sottospazi di  $\mathbb{R}^4$ :

$$U = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = x_1 + 3x_2 + x_4 = 0 \right\}$$

$$W = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$$

- (1) Dare una parametrizzazione di  $U \cap V$ .
- (2) Calcolare la dimensione di  $U \cap W$ .

**Esercizio 3.** Siano  $r$  e  $s$  due rette distinte passanti per l'origine di  $\mathbb{R}^3$ . Sia  $P$  la proiezione ortogonale di  $\mathbb{R}^3$  su  $r$  e  $Q$  la proiezione ortogonale di  $\mathbb{R}^3$  su  $s$ .

- a) Per quali coppie di rette  $r$  ed  $s$  si ha  $PQ = QP$ ?
- b) Dimostrare che  $PQ$  è diagonalizzabile.

**Esercizio 4.** Sullo spazio vettoriale  $\mathbb{R}^4$  si consideri il prodotto scalare  $g_s$  dipendente dal parametro  $s \in \mathbb{R}$  associato alla matrice

$$B_s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 + s^2 \end{pmatrix}$$

Al variare del parametro  $t$  si consideri l'applicazione lineare  $F_t: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  associata alla matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 8 & 1 + t^2 \\ 2 & 11 & 13 & 0 \\ 4 & 13 & 17 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- a) Per quali  $t$  l'applicazione  $F_t$  è autoaggiunta rispetto al prodotto  $g_s$ ?
- b) Dimostra che  $F_t$  è diagonalizzabile per ogni  $t \in \mathbb{R}$ .

#### COMPITO DI GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE DEL 13 FEBBRAIO 2023

**Istruzioni:** Avete 3 ore di tempo a disposizione. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari, pena l'annullamento del compito. Scrivere chiaramente e motivare le risposte. Non saranno corretti esercizi scritti in modo illeggibile.

**Esercizio 1.**

- a) Definire cosa sia un autovalore di una applicazione lineare  $F: V \rightarrow V$ .
- b) Sia  $F: V \rightarrow V$  una applicazione lineare. Dimostrare che se  $u$  e  $v$  sono due autovettori (non nulli) relativi agli autovalori 1 e 2, rispettivamente, allora  $u$  e  $v$  sono linearmente indipendenti.
- c) Sia  $F: V \rightarrow V$  e supponiamo che  $F^2 = Id$  dimostrare che gli unici possibili autovalori di  $F$  sono 1 e -1.

**Esercizio 2.** Siano  $A$  e  $B$  le matrici seguenti:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 4 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Siano  $U$  e  $W$  i nuclei di  $L_A$  e  $L_B$  Determinare una base di  $U + W$ ;

**Esercizio 3.** Si considerino i seguenti piani di  $\mathbb{R}^3$ :

$$\sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y + 1\}$$

$$\tau = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = y + 2\}$$

- Determinare una isometria che porta  $\sigma$  in  $\tau$ .
- Esiste una isometria che porta  $\sigma$  in  $\tau$  e nello stesso tempo il punto  $(0, 0, 0)$  nel punto  $(0, 2, 1)$ ?

**Esercizio 4.** Sia  $V$  lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a 2. Su  $V$  è definito il seguente prodotto scalare al variare dei parametri  $a, b \in \mathbb{R}$ .

$$g_{a,b}(f, g) = af(0)g(0) + bf'(0)g'(0) + f(1)g(1)$$

- per quali valori di  $a, b$  il prodotto scalare è definito positivo?
- per  $a = b = 1$  trovare una base di  $\mathbb{R}^3$  ortogonale rispetto a  $g_{1,1}$ .

COMPITINO DI GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE DELL'11 FEBBRAIO: PRIMA PARTE

**Istruzioni:** Avete 35 minuti di tempo a disposizione. Come prima cosa scrivete nome, cognome e matricola su questo foglio. Prima di consegnare il foglio trascrivetevi su un foglietto le risposte. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari, pena l'annullamento del compito. Dovete scrivere la risposta senza nessuna spiegazione negli appositi spazi. Per essere ammessi alla seconda parte bisogna rispondere correttamente ad almeno 4 domande.

**Domanda 1.** Sia  $z = 2 + i$  e  $w = 1 + i$ . Determinare la parte immaginaria di  $z/w$ .

Risposta:  $\text{Im}(z/w) =$

**Domanda 2.** Sia  $A$  e  $B$  le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Si calcoli  $\det(A \cdot B)$ .

Risposta:  $\det(A \cdot B) =$

**Domanda 3.** Sia  $r$  la retta di  $\mathbb{R}^3$  passante per l'origine e per il punto  $(1, 1, 2)$ . Sia  $Q$  la proiezione ortogonale del punto  $(1, 1, -4)$  su  $r$ . Si determini  $Q$

Risposta:  $Q =$

**Domanda 4.** Si consideri l'applicazione lineare  $L_A : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^2$  dove  $A$  è la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Si scriva la matrice associata ad  $L_A$  rispetto alla base  $v_1 = -e_1 - 2e_2 + 3e_3$ ,  $v_2 = e_1 + e_2$  e  $v_3 = e_2 + e_3$  in partenza e standard in arrivo.

Risposta:  $[L_A]_{e_1, e_2}^{v_1, v_2, v_3} =$

**Domanda 5.** Sia  $U = \text{Mat}_{2 \times 4}(\mathbb{C})$  e siano  $F, G : U \rightarrow U$  applicazioni lineari. Sia  $\dim \text{Im}(F) = 3$  e  $\dim N(G) = 4$ . Sapendo che  $\text{Im}(G) + N(F) = U$  calcolare  $\dim (\text{Im}(G) \cap N(F))$ .

Risposta:  $\dim (\text{Im}(G) \cap N(F)) =$

COMPITINO DI GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE DEL 18 FEBBRAIO 2023: SECONDA PARTE

**Istruzioni:** Avete 2 ore e 30 minuti di tempo a disposizione. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari, pena l'annullamento del compito. Scrivere chiaramente e motivare le risposte. Non saranno corretti esercizi scritti in modo illeggibile.

**Esercizio 1.** Siano  $F, G : V \rightarrow V$  due applicazioni lineari

- È vero che se  $F \circ G = 0$  allora  $F = 0$  o  $G = 0$ ? Se è vero dimostrarlo, se non è vero fare un controesempio.
- Dimostrare che se  $F \circ G$  è iniettiva allora  $G$  è iniettiva.
- Supponiamo che  $F \circ G = G \circ F$  e sia  $W = N(G)$ . Dimostrare che  $F(W) \subset W$ .

**Esercizio 2.** Sia  $V = \mathbb{C}[t]_{\leq 3}$  e  $W = \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{C})$ . Sia  $U$  il sottospazio di  $V$  definito da

$$U = \{f \in \mathbb{C}[t]_{\leq 3} : f(1) = f(0)\}$$

e sia  $S$  il sottospazio di  $W$  delle matrici simmetriche, cioè delle matrici  $A$  tali che  $A^t = A$ . Sia  $F : U \rightarrow W$  definita da

$$F(f) = \begin{pmatrix} f(0) & f(1) \\ f(2) & f(3) \end{pmatrix}.$$

- Determinare una base di  $U$  e scrivere la matrice associata a  $F$  rispetto a questa base in partenza e alla base standard in arrivo.
- Determinare una base di  $S \cap \text{Im } F$ .

**Esercizio 3.** Sia  $M$  la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

- Si dica se  $M$  è diagonalizzabile.
- Trovare una base  $v_1, v_2$  di  $\mathbb{R}^2$  tale che

$$[L_M]_{v_1, v_2}^{v_1, v_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Si dimostri che

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Calcolare  $M^{100}$ .

COMPITO DI GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE DEL 6 GIUGNO 2022

**Istruzioni:** Avete 2 ore e 30' di tempo. Non è sufficiente dare la risposta giusta, dovete fornire delle giustificazioni. Durante lo svolgimento non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari né altri oggetti elettronici, pena l'annullamento del compito. Buon lavoro!

**Esercizio 1.** Siano  $v_1, v_2, v_3 \in V$  tre vettori linearmente dipendenti in uno spazio vettoriale  $V$ . Per ciascuna delle seguenti affermazioni, determina se è vera o falsa fornendo una motivazione: se l'affermazione è vera scrivi una dimostrazione, se è falsa fornisci un controesempio (in cui scegli  $V, v_1, v_2, v_3$  esplicitamente).

- (1) Due dei tre vettori  $v_1, v_2, v_3$  sono multipli fra loro.
- (2) Almeno uno dei tre vettori è combinazione lineare degli altri due.
- (3) Ciascuno dei tre vettori è combinazione lineare degli altri due.

**Esercizio 2.** Considera il sottospazio di  $\mathbb{R}^3$ :

$$U = \{x + y + z = 0\}.$$

Costruisci una matrice  $A$  di taglia  $3 \times 3$  tale che l'endomorfismo  $L_A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, L_A(x) = Ax$  abbia queste proprietà:

- $\ker L_A = U^\perp$
- $\text{Im} L_A = U$
- $L_A$  non è diagonalizzabile

**Esercizio 3.** Considera la conica seguente, dipendente da un parametro  $t \in \mathbb{R}$

$$C = \{x^2 + y^2 + 2txy + 2x - 1 = 0\}.$$

- (1) Classifica il tipo di conica nei casi in cui non è degenere.
- (2) Per quali  $t$  la conica è una circonferenza?
- (3) Sia  $P$  il punto

$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Per i valori di  $t$  per cui  $P \in C$ , calcola la tangente di  $C$  in  $P$ .

**Esercizio 4.** Considera nello spazio le rette

$$r = \{x = y = 1\}, \quad s = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}.$$

- (1) Calcola la distanza fra  $r$  e  $s$ .
- (2) Determina una isometria  $f(x) = Ax + b$  tale che  $f(r) = s$ . Descrivi prima a parole l'isometria e poi determina  $A$  e  $b$ .

#### COMPITO DI GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE DEL 17 LUGLIO 2023

**Istruzioni:** Avete 2 ore e 30' di tempo. Non è sufficiente dare la risposta giusta, dovete fornire delle giustificazioni. Durante lo svolgimento non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari né altri oggetti elettronici, pena l'annullamento del compito. Buon lavoro!

**Esercizio 1.**

- (1) Sia  $f: V \rightarrow W$  un'applicazione lineare fra spazi vettoriali. Mostra che  $f$  è iniettiva se e solo se  $\ker f = \{0\}$ .
- (2) Siano  $f: V \rightarrow W$  e  $g: W \rightarrow Z$  due applicazioni lineari iniettive fra spazi vettoriali. È vero che  $g \circ f$  è necessariamente iniettiva? Se l'affermazione è vera scrivi una dimostrazione, se è falsa fornisci un controesempio.
- (3) Siano  $f: V \rightarrow W$  e  $g: W \rightarrow Z$  due applicazioni lineari. È vero che se  $g \circ f$  è surgettiva allora lo sono anche  $f$  e  $g$ ? Se l'affermazione è vera scrivi una dimostrazione, se è falsa fornisci un controesempio.

**Esercizio 2.** Considera i sottospazi di  $\mathbb{R}^4$  seguenti:

$$U = \{x_1 + x_2 = x_3 - x_4 = 0\},$$

$$V = \text{Span}(e_1),$$

$$W = \text{Span}(e_2).$$

- (1) Calcola la dimensione di  $U + V + W$ .
- (2) Gli spazi  $U, V$  e  $W$  sono in somma diretta? Motiva la risposta.

**Esercizio 3.** Considera la conica di equazione

$$x^2 + 2txy + y^2 + 2x + 2ty - 1 = 0.$$

- (1) Classifica il tipo di conica al variare di  $t \in \mathbb{R}$ .
- (2) Determina il centro della conica per i valori in cui questa è non degenera e ha un centro.
- (3) Determina i valori  $t$  per cui la conica è una circonferenza.

**Esercizio 4.** Consideriamo le rette

$$r = \{z = 1, y = 0\},$$

$$s = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

- (1) Scrivi una isometria  $f(x) = Ax + b$  senza punti fissi tale che  $f(r) = s$ .
- (2) Scrivi una isometria  $f(x) = Ax + b$  con punti fissi tale che  $f(r) = s$ .

Per entrambe le domande spiega a parole come costruisci l'isometria prima di calcolare  $A$  e  $b$ .

COMPITO DI GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE DELL'11 SETTEMBRE 2023

**Istruzioni:** Avete 2 ore e 30' di tempo. Non è sufficiente dare la risposta giusta, dovete fornire delle giustificazioni. Durante lo svolgimento non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari né altri oggetti elettronici, pena l'annullamento del compito. Buon lavoro!

**Esercizio 1.** Siano  $v_1, v_2, v_3$  vettori non nulli di  $\mathbb{R}^3$ . Per ciascuna delle seguenti affermazioni, se è vera scrivi una dimostrazione, se è falsa fornisci un controesempio.

- (1) Se  $v_1, v_2$  sono indipendenti,  $v_2, v_3$  sono indipendenti e  $v_3, v_1$  sono indipendenti, allora  $v_1, v_2, v_3$  sono indipendenti.
- (2) Se esiste un  $w \in \mathbb{R}^3$  non nullo ortogonale a tutti e tre  $v_1, v_2, v_3$ , allora i 3 vettori  $v_1, v_2, v_3$  sono dipendenti.
- (3) I vettori  $v_1, v_2, v_3$  sono indipendenti se e solo se esiste un endomorfismo  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tale che  $f(v_1) = v_1, f(v_2) = 2v_2, f(v_3) = 3v_3$ .

**Esercizio 2.** Considera i due sottospazi seguenti di  $\mathbb{R}^4$ :

$$U = \text{Span} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right), \quad W = \{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}.$$

- (1) Determina le dimensioni di  $U \cap W$  e  $U + W$ .
- (2) Determina un sottospazio  $Z \subset W$  tale che  $(U \cap W) \oplus Z = W$ .

**Esercizio 3.** Sia  $V = \mathbb{R}[x]_k$  lo spazio vettoriale formato da tutti i polinomi reali di grado  $\leq k$ . Considera l'endomorfismo  $T: V \rightarrow V$  dato da

$$T(p) = (x^2 + 1)p''(x)$$

dove  $p''(x)$  è la derivata seconda di  $p(x)$ .

- (1) Scrivi la matrice associata a  $T$  rispetto alla base canonica  $1, x, \dots, x^k$ .
- (2) Determina gli autovalori di  $T$ .
- (3) L'endomorfismo  $T$  è diagonalizzabile?

**Esercizio 4.** Considera la retta  $r$  passante per i punti

$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}$$

ed il piano  $\pi = \{z = 1\}$ . Costruisci una isometria  $f(x) = Ax + b$  tale che  $f(r)$  non intersechi il piano  $\pi$ .

**Soluzione dell'esercizio 1.**

$$\text{Im } F = \{F(v) : v \in V\} = \{u \in U : \text{esiste } v \in V \text{ tale che } F(v) = u\}.$$

Verifichiamo che è un sottospazio di  $U$ .

1:  $0_U \in \text{Im } F$ . Infatti  $F$  è lineare e quindi  $F(0_V) = 0_U \in \text{Im } F$ .

2: Se  $u_1, u_2 \in \text{Im } F$  allora  $u_1 + u_2 \in \text{Im } F$ . Infatti se  $u_1, u_2 \in \text{Im } F$  allora esistono  $v_1, v_2 \in V$  tali che  $F(v_1) = u_1$  e  $F(v_2) = u_2$ . Consideriamo  $v = v_1 + v_2 \in V$  e calcoliamo  $F(v)$ . Per linearità abbiamo

$$F(v) = F(v_1 + v_2) = F(v_1) + F(v_2) = u_1 + u_2$$

Quindi  $u_1 + u_2$  è un elemento di  $\text{Im } F$ .

3: Se  $u \in \text{Im } F$  e  $\lambda \in K$  allora  $\lambda u \in \text{Im } F$ . Infatti se  $u \in \text{Im } F$  allora esiste  $v \in V$  tale che  $F(v) = u$ . Consideriamo  $v' = \lambda v \in V$  e calcoliamo  $F(v')$ . Per linearità abbiamo

$$F(v') = F(\lambda v) = \lambda F(v) = \lambda u$$

Quindi  $\lambda u$  è un elemento di  $\text{Im } F$ .

b) Osserviamo che  $V$  ha dimensione 9 e che il sottospazio  $W$  delle matrici simmetriche ha dimensione 6. Poiché  $W \oplus N(F) = V$  ne ricaviamo che  $N(F)$  ha dimensione 3. Dalla formula della dimensione ricaviamo che

$$\dim \text{Im } F = \dim V - \dim N(F) = 9 - 3 = 6$$

Quindi  $F$  non è surgettiva.

**Soluzione dell'esercizio 2.** Osserviamo che  $u_1 = e_2 - e_1$  e  $u_2 = e_3$  è una base di  $U$ . Poiché  $e_1$  non è un elemento di  $U$  osserviamo anche che  $e_1, u_1, u_2$  è una base di  $V$ . In questa base è facile scrivere due applicazioni con le proprietà richieste. Per esempio

$$[G]_{e_1, u_1, u_2}^{e_1, u_1, u_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad [F]_{e_1, u_1, u_2}^{e_1, u_1, u_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Per scrivere le matrici associate a  $F$  e  $G$  rispetto alla base standard effettuiamo il cambiamento di base. Sia  $M$  la matrice di cambiamento di base dalla base  $e_1, u_1, u_2$  alla base standard. Abbiamo

$$M = [Id]_{e_1, e_2, e_3}^{e_1, u_1, u_2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M^{-1} = [Id]_{e_1, u_1, u_2}^{e_1, e_2, e_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Abbiamo quindi

$$[G]_{e_1, e_2, e_3}^{e_1, e_2, e_3} = [Id]_{e_1, e_2, e_3}^{e_1, u_1, u_2} \cdot [G]_{e_1, u_1, u_2}^{e_1, u_1, u_2} \cdot [Id]_{e_1, u_1, u_2}^{e_1, e_2, e_3} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[F]_{e_1, e_2, e_3}^{e_1, e_2, e_3} = [Id]_{e_1, e_2, e_3}^{e_1, u_1, u_2} \cdot [F]_{e_1, u_1, u_2}^{e_1, u_1, u_2} \cdot [Id]_{e_1, u_1, u_2}^{e_1, e_2, e_3} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Soluzione dell'esercizio 3.** a) Consideriamo la retta  $s'$  passante per l'origine e parallela a  $s$ . Questa è la retta

$$s' = \mathbb{R}(e_2 + e_3)$$

e osserviamo che  $s = s' + 2e_1$ . L'asse  $\mathbb{R}e_1$  è ortogonale ad entrambe le rette. Costruiamo  $F$  nel seguente modo, consideriamo la rotazione di asse  $\mathbb{R}e_1$  di angolo 45 gradi che porta  $r$  in  $s'$ . Successivamente consideriamo la traslazione  $v \mapsto v + 2e_1$  che porta  $s'$  in  $s$ . Otteniamo in questo modo una rototraslazione di asse  $\mathbb{R}e_1$ , che non ha punti fissi e che porta  $r$  in  $s$ . La matrice associata alla rotazione è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

e  $F$  è quindi data da

$$F(v) = A \cdot v + 2e_1.$$

b) Per costruire  $G$  procediamo in modo simile al precedente. Prima consideriamo la rotazione  $v \mapsto A \cdot v$  che porta  $r$  in  $s'$  e poi per portare  $s'$  in  $s$  invece di considerare la traslazione  $v \mapsto v + 2e_1$  consideriamo la riflessione  $R$  rispetto al piano  $x = 1$ . Questa composizione porta sicuramente  $r$  in  $s$  e lascia fisso il punto

sull'asse  $\mathbb{R}e_1$  con  $x = 1$  perché è lasciato fisso da entrambe le trasformazioni. Dobbiamo calcolare  $R$ . Se  $v = (x, y, z)$  allora la proiezione di  $v$  sul piano  $x = 1$  è  $v' = (1, y, z)$ .  $v'$  sarà il punto medio tra  $v$  e  $R(v)$  ovvero  $R(v) = 2v' - v$  e quindi

$$R \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Quindi l'applicazione  $G$  che abbiamo costruito è data da

$$G \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**Soluzione dell'esercizio 4.** a) I determinanti dei minori principali di  $b_a$  sono  $1, -1, -1, -1$ . In particolare la segnatura di  $b$  è uguale a  $(3, 1, 0)$ .

b) In questo caso non possiamo applicare il criterio di Jacobi perché il primo minore della matrice è zero. Procediamo in altro modo. Intanto osserviamo che la matrice  $B_0$  ha rango 2 quindi  $i_0 = 2$ . Osserviamo inoltre che se  $u = e_1 + e_2$  e  $v = e_1 - e_2$  abbiamo  $b_0(u, u) = 2$  e  $b_0(v, v) = -2$ . Quindi esistono rette su cui  $b_0$  è definita positiva e rette su cui  $b_0$  è definita negativa. Quindi  $i_+$  e  $i_-$  non sono zero. Poiché  $i_+ + i_- + i_0 = 4$  ricaviamo che la segnatura è  $(1, 1, 2)$ .

#### SOLUZIONI DEL COMPITO DEL 30 GENNAIO

**Soluzione dell'esercizio 1.** L'affermazione a) è falsa. Se per esempio  $F = 0$  e  $v_1, v_2, v_3$  sono una base qualsiasi di  $V$  allora  $F(v_1), F(v_2), F(v_3)$  non sono una base di  $V$ .

L'affermazione b) pure è falsa. Se  $V = \mathbb{R}^3$  e  $F = L_A$  con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e  $v = e_1 + e_2$  allora  $F$  è diagonalizzabile e  $F(v) = e_1$  che non è un multiplo di  $v$ .

L'affermazione c) è vera. Basta dimostrare che  $v_1, v_2, v_3$  sono linearmente indipendenti. Supponiamo che  $a, b, c \in \mathbb{R}$  e che

$$av_1 + bv_2 + cv_3 = 0,$$

vogliamo dimostrare che  $a, b, c$  sono nulli. Applicando  $F$  alla formula precedente otteniamo

$$aF(v_1) + bF(v_2) + cF(v_3) = 0.$$

Poiché sappiamo che  $F(v_1), F(v_2), F(v_3)$  sono una base, e quindi sono linearmente indipendenti, ne ricaviamo che  $a, b, c$  sono nulli.

**Soluzione dell'esercizio 2.** a) Sia  $u = e_1 + 2e_2 + 2e_3 + e_4$  e  $u_2 = e_1 + 3e_2 + 2e_3 + 2e_4$ . Un generico vettore di  $U$  si scrive come

$$u = au_1 + bu_2 = \begin{pmatrix} a+b \\ 2a+3b \\ 2a+2b \\ a+2b \end{pmatrix}.$$

Un tale vettore appartiene a  $V$  solo se verifica le equazioni  $x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 0$  e  $x_1 + 3x_2 + x_4 = 0$  che per un tale vettore diventano

$$(a+b) + 2(2a+3b) - (2a+2b) - (a+2b) = 0 \quad e \quad (a+b) + 3(2a+3b) + (a+2b) = 0$$

ovvero  $2a + 3b = 0$  e  $8a + 12b = 0$ . La seconda equazione è multipla della prima e quindi rimane l'unica equazione  $b = -3/2a$ . Quindi l'intersezione di  $U$  e  $V$  è l'insieme dei vettori

$$au_1 - \frac{3}{2}au_2 = -\frac{a}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

In particolare l'applicazione  $t \mapsto t(e_1 + 2e_3 - e_4)$  è una parametrizzazione di  $U \cap V$ .

b) Mettendo assieme i 4 generatori di  $U$  e  $W$  si ottengono i generatori di  $U + W$ . La matrice che si ottiene



$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

ha rango tre (si vede con le mosse di Gauss). Quindi  $\dim(U+W) = 3$ . Applicando la formula di Grassmann si ottiene

$$\dim U \cap W = \dim U + \dim W - \dim(U+W) = 2 + 2 - 3 = 1.$$

**Soluzione dell'esercizio 3.** Siano  $u$  e  $v$  due vettori di norma 1 che generano le rette  $r$  ed  $s$  rispettivamente. Possiamo scrivere la proiezione su  $r$  e  $s$  mediante le seguenti formule:

$$P(w) = \langle w, u \rangle u \quad Q(w) = \langle w, v \rangle v.$$

Quindi

$$PQ(w) = \langle w, v \rangle \langle v, u \rangle u \quad QP(w) = \langle w, u \rangle \langle v, u \rangle v.$$

Affrontiamo ora il punto a). Se  $\langle u, v \rangle = 0$  cioè se le rette sono ortogonali vediamo che le due applicazioni sono entrambe uguali a zero.

Se  $u = \pm v$ , cioè se le rette sono la stessa retta, allora  $P = Q$  e  $PQ = QP = P^2 = P$ .

Se le rette non sono né uguali, né ortogonali dimostriamo che  $PQ \neq QP$ . Applicando le due possibili composizioni ad  $u$  otteniamo

$$PQ(u) = \langle u, v \rangle \langle v, u \rangle u \quad QP(u) = \langle u, u \rangle \langle v, u \rangle v = \langle v, u \rangle v$$

Osserviamo che il primo vettore è diverso da zero ed è sulla retta  $r$  mentre il secondo vettore è diverso da zero e è sulla retta  $s$ , quindi non possono essere uguali.

b) Distinguiamo due casi. Se le rette sono ortogonali allora  $PQ = 0$  e quindi è diagonalizzabile. Se le rette non sono ortogonali, cioè se  $\langle u, v \rangle \neq 0$  allora il nucleo di  $PQ$  è l'insieme delle  $w$  tali che  $\langle w, v \rangle = 0$  ed è quindi il piano ortogonale a  $s$ . Inoltre

$$PQ(u) = \langle u, v \rangle^2 u$$

Quindi  $u$  è un autovettore di autovalore  $\langle u, v \rangle^2$ . Se prendiamo come base di  $\mathbb{R}^3$  una terna di vettori  $v_1, v_2, v_3$  in cui  $v_1$  e  $v_2$  sono una base del piano ortogonale a  $s$  e  $v_3 = u$ , osserviamo che sono una base di autovettori di  $PQ$ .

L'esercizio si può fare anche scegliendo una base ortonormale in cui le due rette sono molto semplici, per esempio una base in cui  $v_1$  era un generatore di  $r$  e  $v_1, v_2$  era una base del piano generato da  $r$  e  $s$ . In una base simile i conti erano molto semplici.

**Soluzione dell'esercizio 4.** a) Ricordiamo che  $F_t$  è autoaggiunto rispetto al prodotto scalare  $g_s$  se

$$g_s(F_t(u), v) = g_s(u, F_t(v)).$$

A livello di matrici questo corrisponde all'equazione

$$A_t^{trasposta} \cdot B_s = B_s \cdot A_t$$

ovvero nel nostro caso

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 8 & 1+s^2 \\ 4 & 22 & 26 & 0 \\ 8 & 26 & 34 & 0 \\ 1+t^2 & 0 & 0 & 1+s^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 8 & 1+t^2 \\ 4 & 22 & 26 & 0 \\ 8 & 26 & 34 & 0 \\ 1+s^2 & 0 & 0 & 1+s^2 \end{pmatrix}.$$

Vediamo che questo corrisponde all'equazione  $t^2 = s^2$ , ovvero  $t = \pm s$ .

b) Osserviamo che per ogni  $s$  il prodotto scalare  $g_s$  è definito positivo perché la matrice è diagonale con numeri positivi sulla diagonale. Poiché  $F_t$  è autoaggiunto rispetto al prodotto scalare  $g_t$ , applicando il teorema spettrale ne deduciamo che  $F_t$  è diagonalizzabile.

**Soluzione esercizio 1.** a)  $\lambda$  è un autovalore di  $F$  se esiste  $v \in V$  tale che  $v \neq 0$  e  $F(v) = \lambda v$ .

b) Procediamo per assurdo. Supponiamo che  $u$  e  $v$  siano linearmente dipendenti. Allora essendo  $u \neq 0$  abbiamo che  $v = ku$  per qualche scalare  $k$ . Poiché  $u$  e  $v$  sono autovettori di autovalori 1 e 2 abbiamo

$$F(v) = 2v \quad F(v) = F(ku) = kF(u) = ku = v$$

da cui  $2v = v$  ovvero  $v = 0$  contro l'ipotesi che  $v$  sia diverso da zero.

c) Supponiamo che  $F(u) = \lambda u$  e che  $u \neq 0$ . Allora

$$F^2(u) = F(F(u)) = F(\lambda u) = \lambda F(u) = \lambda^2 u.$$

Ricordando che  $F^2 = Id$  otteniamo che  $u = \lambda^2 u$  e poiché  $u \neq 0$  ricaviamo  $\lambda^2 = 1$  da cui  $\lambda = \pm 1$ .

**Soluzione esercizio 2.** Riducendo le matrici  $A$  e  $B$  a scalini troviamo le matrici

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

In particolare  $A$  e  $B$  sono matrici di rango 2 e se poniamo

$$u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

i vettori  $u_1$  e  $u_2$  sono una base di  $U$  e i vettori  $w_1$  e  $w_2$  sono una base di  $W$ . Quindi i vettori  $u_1, u_2, w_1, w_2$  sono dei generatori di  $U + W$ . Per vedere se sono una base o per estrarre da questi quattro vettori una base consideriamo la matrice le cui colonne sono i quattro vettori in questione

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

che ridotta a scalini fornisce la matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi  $U + W$  ha dimensione 3 e i vettori  $u_1, u_2$  e  $w_1$  sono una base di  $U + W$ .

**Soluzione esercizio 3.** a) Consideriamo i piani paralleli a  $\sigma$  e  $\tau$  passanti per l'origine, ovvero i piani  $\sigma'$  di equazione  $x = y$  e  $\tau'$  di equazione  $z = y$ . Scrivere una isometria che porta  $\sigma'$  in  $\tau'$  è molto semplice, per esempio l'isometria  $R(x, y, z) = (z, y, x)$  scambia le due equazioni. Quindi possiamo cercare l'isometria che porta  $\sigma$  della forma  $F(v) = R(v) + b$  con  $b$  un vettore fissato. Questa isometria porta sicuramente  $\sigma$  in un piano parallelo a  $\tau$ , affinché porti  $\sigma$  in  $\tau$  basta che porti un punto di  $\sigma$  in un punto di  $\tau$ . Come punto di  $\sigma$  scegliamo  $e_1$ . Abbiamo che  $F(e_1) = e_3 + b$ . Se scegliamo  $b = -e_2$  allora  $F(e_1) = -e_2 + e_3 \in \tau$ . Quindi

$$F(x, y, z) = (z, y, x) - e_2$$

ha le proprietà richieste.

b) Una tale isometria non esiste, infatti una isometria conserva le distanze e la distanza di  $(0, 0, 0)$  da  $\sigma$  è diversa dalla distanza di  $(0, 2, 1)$  da  $\tau$ . Calcoliamo infatti queste distanze usando la formula ricavata a lezione. La prima è uguale a

$$\frac{|1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

mentre la seconda è uguale a

$$\frac{|2 - 1 + 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

**Soluzione esercizio 4.** a) Scriviamo la matrice associata a  $g_{1,1}$  rispetto alla base standard. Ricaviamo la seguente matrice

$$[g_{1,1}]_{1,t,t^2} = \begin{pmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & b+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

I valori dei tre minori principali sono quindi

$$a+1, \quad ab+a+b, \quad ab$$

Affinché il prodotto scalare sia definito positivo devono essere tutti e tre positivi. Dall'ultima equazione ricaviamo  $a$  e  $b$  concordi. Se sono entrambi positivi i tre minori sono tutti e tre positivi e quindi il prodotto scalare è definito positivo. Studiamo il caso  $a, b < 0$ . Dalla prima equazione ricaviamo  $a+1 > 0$  e dalla seconda ricaviamo quindi

$$ab+a+b = b(a+1) + a$$

che non può essere un numero positivo perché sia il primo addendo che il secondo sono negativi. Quindi il prodotto scalare è definito positivo se e solo se  $a, b > 0$ .

b) Scegliamo come primo polinomio della base  $f_1 = t^0 = 1$ . I vettori ortogonali a  $f_1$  sono i polinomi della forma  $x+yt+zt^2$  con  $2x+y+z=0$ . Scegliamo quindi un polinomio in questo spazio ortogonale per esempio  $f_2 = t - t^2$ . Lo spazio dei polinomi ortogonali sia a  $f_1$  che a  $f_2$  è lo spazio dei polinomi della forma  $x+yt+zt^2$  con  $2x+y+z=0$  e  $y=0$ . Scegliamo quindi  $f_3 = 1 - 2t^2$ . I vettori  $f_1, f_2, f_3$  sono tre vettori ortogonali rispetto ad un prodotto scalare definito positivo e sono quindi linearmente indipendenti, e in particolare sono una base di  $V$ .

#### 1. SOLUZIONI DEL COMPITINO DEL 18 FEBBRAIO PRIMA PARTE

**Domanda 1.**  $\text{Im}(z/w) = -1/2$

**Domanda 2.**  $\det(A \cdot B) = 8$

**Domanda 3.**  $Q = (-1, -1, -2)$

**Domanda 4.**  $[L_A]_{e_1, e_2}^{v_1, v_2, v_3} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

**Domanda 5.**  $\dim(\text{Im}(G) \cap N(F)) = 1$ .

#### SOLUZIONI DEL COMPITINO DEL 18 FEBBRAIO: SECONDA PARTE

**Soluzione esercizio 1.** a) Non è vero. Come esempio possiamo prendere  $F = G = L_A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  con

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Supponiamo che  $G(u) = G(v)$  e dimostriamo che  $u = v$ . Se  $G(u) = G(v)$  allora  $F(G(u)) = F(G(v))$ . Ma essendo  $F \circ G$  iniettiva questo implica che  $u = v$ .

c) Sia  $w \in N(G)$  voglio dimostrare che  $F(w) \in N(G)$ . Infatti  $G(F(w)) = F(G(w))$  perché  $F \circ G = G \circ F$ , e poiché  $w \in N(G)$  abbiamo  $G(w) = 0$ . Quindi  $G(F(w)) = F(G(w)) = 0$ , ovvero  $F(w) \in N(G)$ .

**Soluzione esercizio 2.** a) Un polinomio  $f(t) = a + bt + ct^2 + dt^3$  appartiene a  $U$  se e solo se  $f(0) = f(1)$ , ovvero

$$a = a + b + c + d$$

o equivalentemente  $b + c + d = 0$ . Quindi  $U$  ha dimensione 3 e una sua base è data dai polinomi

$$f_1 = 1 = t^0 \quad f_2 = t^2 - t \quad f_3 = t^3 - t.$$

Applicando  $F$  troviamo

$$A = F(f_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = F(f_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \quad C = F(f_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 6 & 24 \end{pmatrix}$$

da cui deduciamo

$$[F]_{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}}^{f_1, f_2, f_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 6 \\ 1 & 6 & 24 \end{pmatrix}$$

b)  $\text{Im } F$  è generato dalle matrici  $A, B, C$  e quindi  $\text{Im } F$  è fatta di tutte le matrici della forma

$$aA + bB + cC = A = F(f_1) = \begin{pmatrix} a & a \\ a + 2b + 6c & a + 6b + 24c \end{pmatrix}$$

e questa matrice è simmetrica se e solo se  $a = a + 2b + 6c$  ovvero se e solo se  $b + 3c = 0$ . Quindi dei generatori dell'intersezione li possiamo ottenere prendendo  $a = 1$  e  $b = c = 0$  o  $a = 0, b = -3, c = 1$ . Quindi le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad -3B + C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

generano l'intersezione. Essendo linearmente indipendenti sono una base dell'intersezione.

**Soluzione esercizio 3.** a) Il polinomio caratteristico di  $M$  è  $(\lambda - 1)^2$ , quindi  $M$  ha come unico autovalore  $\lambda = 1$  con molteplicità algebrica 2. Calcoliamo la molteplicità geometrica dell'autovalore 1, ovvero la dimensione del nucleo di

$$M - I = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

che non è una matrice nulla e quindi la molteplicità geometrica di 1 è uguale a 1. Pertanto  $M$  non è diagonalizzabile.

b) Osserviamo che il vettore  $v_1$  verifica  $M \cdot v_1 = v_1$  ed è quindi nel nucleo della matrice  $M - I$ . Abbiamo già calcolato questa matrice e il suo nucleo è definito dall'unica equazione  $x = 2y$ . Quindi possiamo scegliere  $v_1 = 2e_1 + e_2$ . Il vettore  $v_2$  verifica  $M \cdot v_2 = v_2 + v_1$  ovvero  $(M - I) \cdot v_2 = v_1$ . Se  $v_2 = xe_1 + ye_2$  otteniamo il sistema

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

che si traduce nelle due equazioni equivalenti  $2x - 4y = 2$  e  $x - 2y = 1$ . Possiamo quindi scegliere  $y = 1$  e  $x = 3$ . Quindi se poniamo

$$v_1 = 2e_1 + e_2 \quad v_2 = 3e_1 + e_2$$

otteniamo la base desiderata.

c) Procediamo per induzione su  $n$ . Se  $n = 1$  è ovvio. Supponiamo la tesi sia vera per l'intero  $n$  e dimostriamola per  $n + 1$ . Abbiamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

dove nella seconda uguaglianza abbiamo applicato l'ipotesi induttiva.

d) Ricordiamo che

$$M = [L_M]_{e_1, e_2}^{e_1, e_2} = [Id]_{e_1, e_2}^{v_1, v_2} \cdot [L_M]_{v_1, v_2}^{v_1, v_2} \cdot [Id]_{v_1, v_2}^{e_1, e_2} = A \cdot N \cdot A^{-1}$$

dove

$$A = [Id]_{e_1, e_2}^{v_1, v_2} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e di conseguenza

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$M^{100} = (ANA^{-1})^{100} = AN^{100}A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 100 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 201 & -400 \\ 100 & -199 \end{pmatrix}$$

#### SOLUZIONI DEL COMPITO DEL 6 GIUGNO

##### Esercizio 1.

- (1) Falso. Prendiamo  $V = \mathbb{R}^2$  e  $v_1 = e_1, v_2 = e_2, v_3 = e_1 + e_2$ .
- (2) Vero. Se sono dipendenti, esistono  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  non tutti nulli per cui

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0.$$

Supponiamo che  $\lambda_1 \neq 0$ . Dividendo tutto per  $\lambda_1$  otteniamo che  $v_1$  si scrive come combinazione lineare degli altri due.

- (3) Falso. Prendiamo  $V = \mathbb{R}^2$  e  $v_1 = e_1, v_2 = e_1, v_3 = e_2$ .

**Esercizio 2.** Prendiamo come base

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

e notiamo che  $U^\perp = \text{Span}(v_1)$  e  $U = \text{Span}(v_2, v_3)$ . Espresso in questa base  $\mathcal{B}$ , l'endomorfismo  $T$  con

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

rispetta tutti e tre i criteri. La matrice  $A$  richiesta si trova quindi cambiando base:

$$A = [T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = [\text{id}]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} [\text{id}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$$

Facendo i conti troviamo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

**Esercizio 3.** La matrice completa è

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & t & 1 \\ t & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- (1) Troviamo  $\det \bar{A} = t^2 - 2$ , quindi la conica è non degenere per  $t \neq \pm\sqrt{2}$ . Esaminando  $\det A = 1 - t^2$  troviamo che la conica è un'iperbole per  $t < -1$  oppure  $t > 1$ , una parabola per  $t = \pm 1$  e un'ellisse per  $-1 < t < 1$ .
- (2) Gli autovalori di  $A$  sono  $1 \pm t$ , e coincidono solo per  $t = 0$ : quindi (per il teorema spettrale) la conica è una circonferenza solo per  $t = 0$ .
- (3) La conica passa per  $P$  per  $t = -3/2$ . Calcolando la retta polare  ${}^t\bar{P}\bar{A}\bar{X} = 0$  troviamo che la tangente in  $P$  è  $y = x$ .

**Esercizio 4.**

- (1) Facendo un disegno si trova che le rette sono sghembe e hanno come perpendicolare comune la retta

$$\ell = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

che interseca  $r$  e  $s$  nei valori  $t = 1$  e  $t = 0$ . Quindi le rette sono a distanza 1.

- (2) Una possibile isometria è una rototraslazione lungo  $\ell$  di passo 1. Per determinare  $A$  e  $b$  cambio coordinate con  $x' = x, y' = y + 1, z' = z + 1$ . In queste nuove coordinate la retta  $\ell$  diventa l'asse  $x'$ , quindi la rototraslazione cercata è la composizione di una rotazione oraria di angolo  $\pi/4$  lungo  $x'$  e di una opportuna traslazione:

$$f \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Riportiamo nelle coordinate originali; il nuovo vettore  $b$  sarà

$$b = - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 - \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Quindi la  $f$  cercata ha questa forma

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 - \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Esistono anche altre soluzioni possibili.

**Esercizio 1.**

- (1) Fatto a lezione.
- (2) Vero. Se  $v$  e  $w$  sono vettori distinti di  $V$ , allora  $f(v)$  e  $f(w)$  sono vettori distinti di  $W$  perché  $f$  è iniettiva, e quindi  $g(f(v))$  e  $g(f(w))$  sono vettori distinti di  $Z$  perché  $g$  è iniettiva.

**Esercizio 2.**

- (1) Una base di  $U$  è formata dai vettori  $e_1 - e_2$  e  $e_3 + e_4$ . Se aggiungiamo a questi i vettori  $e_1$  e  $e_2$  troviamo 4 vettori non indipendenti, di cui i primi 3 sono indipendenti. Quindi  $\dim(U + V + W) = 3$ .
- (2) Non sono in somma diretta perché  $U \cap (V + W)$  non è banale: infatti consiste nella retta  $\text{Span}(e_1 - e_2)$ .

**Esercizio 3.** La matrice completa associata alla conica è

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & t & 1 \\ t & 1 & t \\ 1 & t & -1 \end{pmatrix}.$$

- (1) La matrice ha determinante  $2t^2 - 2$ . Quindi la conica è degenera solo per  $t = \pm 1$ . Per  $t = 1$  l'equazione della conica diventa  $(x + y)^2 + 2(x + y) - 1 = 0$  e quindi la conica è l'unione di due rette parallele  $x + y = -1 \pm \sqrt{2}$ . Per  $t = -1$  otteniamo analogamente due rette parallele  $x - y = -1 \pm \sqrt{2}$ . Per  $t \neq \pm 1$  la conica è non degenera. La matrice  $\bar{A}$  è indefinita perché ha sulla diagonale sia elementi positivi che negativi. Quindi la conica è non vuota e calcolando  $\det A = 1 - t^2$  si scopre che è un'ellisse per  $-1 < t < 1$  e una iperbole per  $t < -1$  o  $t > 1$ .
- (2) Risolvendo  $AP + b = 0$  si ottiene  $P = (-1, 0)$  per ogni  $t \neq \pm 1$ .
- (3) Gli autovalori di  $A$  sono  $\lambda = 1 \pm t$  e coincidono solo per  $t = 0$ . Quindi si ottiene una circonferenza solo per  $t = 0$ .

**Esercizio 4.** Si verifica che le due rette sono sghembe, parallele agli assi  $x$  e  $y$ , e con perpendicolare comune l'asse  $z$ .

- (1) Ad esempio si può fare una rototraslazione di asse  $z$ , angolo  $\pi/2$  e passo 2:

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- (2) Ad esempio si può fare una rotazione di asse  $\text{Span}(e_1 + e_2)$  di angolo  $\pi$ :

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

**Soluzione dell'esercizio 1.**

- (1) No, ad esempio  $v_1 = e_1, v_2 = e_2, v_3 = e_1 + e_2$ .
- (2) Sì, perché  $v_1, v_2, v_3$  sono contenuti nel piano  $U = \text{Span}(w)^\perp$  e quindi non possono essere indipendenti.
- (3) Sì. Se sono indipendenti, possiamo costruire un endomorfismo tale che  $f(v_i) = w_i$  per qualsiasi scelta di  $w_1, w_2, w_3$ . D'altra parte, se esiste un endomorfismo tale che  $f(v_i) = iv_i$ , allora  $v_1, v_2, v_3$  sono autovettori con autovalori distinti e quindi sono indipendenti.

**Soluzione dell'esercizio 2.** Si nota intanto che  $\dim U = 2$  perché il terzo vettore che genera  $U$  è la differenza dei primi due, e  $\dim W = 3$ .

- (1) Si scrive il vettore generico di  $U$  e lo si sostituisce all'equazione che definisce  $W$ . In questo modo si vede che l'intersezione  $U \cap W$  è la retta generata dal vettore  $v = (-5, 6, -2, 1)$ . Per Grassmann  $\dim(U + W) = 3$ .
- (2) Per trovare  $Z$  basta aggiungere a  $v$  altri due vettori di  $W$  in modo che siano tutti indipendenti, ad esempio  $v_2 = (1, -1, 0, 0)$  e  $v_3 = (0, 0, 1, -1)$ . Si verifica che  $v, v_2, v_3$  sono indipendenti e quindi si prende  $Z = \text{Span}(v_2, v_3)$ .

**Soluzione dell'esercizio 3.**

(1) Si verifica che  $T(x^n) = (x^2 + 1)n(n-1)x^{n-2}$ . Quindi  $T(1) = 0, T(x) = 0$  e  $T(x^n) = n(n-1)x^n + n(n-1)x^{n-2}$  per ogni  $n \geq 2$ . Quindi la matrice associata è

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & k(k-1) \end{pmatrix}$$

- (2) La matrice associata è triangolare superiore, quindi gli autovalori sono i valori sulla diagonale:  $0, 0, 2, 6, \dots, k(k-1)$ .
- (3) Sì. Tutti gli autovalori sono in  $\mathbb{R}$ , e l'unico autovalore con molteplicità maggiore di uno è lo zero, che ha molteplicità algebrica 2: ha anche molteplicità geometrica 2 perché le prime due colonne sono nulle.

**Soluzione dell'esercizio 4.** La retta  $r$  in forma parametrica è

$$r = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Ci sono molti modi di risolvere l'esercizio. Ad esempio si può prendere una rotazione (oraria o antioraria) di  $\pi/2$  intorno all'asse  $y$  per spostare la giacitura di  $r$  dentro la giacitura di  $\pi$ , e poi eventualmente traslare in modo che la retta sia disgiunta da  $\pi$ . La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rappresenta una rotazione (oraria) di  $\pi/2$  intorno all'asse  $y$ . La rotazione  $f(x) = Ax$  sposta la retta  $r$  nella retta

$$f(r) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Questa è contenuta nel piano  $\pi$ . Aggiungeremo quindi una traslazione di vettore

$$b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

L'isometria  $f(x) = Ax + b$  è quella cercata.