Compito di Geometria e algebra lineare di venerdì 7 gennaio 2022

Istruzioni: Avete 2 ore e 40 minuti di tempo a disposizione. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari, pena l'annullamento del compito.

Esercizio 1. Siano $F : U \longrightarrow V$ e $G : V \longrightarrow W$ due applicazioni lineari.

a) Si dimostri che se $G \circ F$ è iniettiva allora F è iniettiva.
b) Si enunci il teorema della dimensione.

Esercizio 2. Sia $V = \mathbb{C}[x]_{\leqslant 3}$ e sia U il sottospazio dei polinomi $p(t) \in V$ tali che $p(1) = 0$. Sia $F : U \longrightarrow V$ definita da $F(p) = tp'(t)$. Sia $G : V \longrightarrow V$ l'applicazione lineare tale che:

$$G(p) = F(p) \quad \text{se } p \in U \quad \text{e} \quad G(1) = 4 + t + t^2.$$

a) Si descriva una base dell'immagine di F.
b) Si calcoli il determinante di G.

Esercizio 3. Si consideri il piano π di equazione $x + y + z = 1$ e la retta ℓ di equazioni $x = y = 1$.

a) Si calcolino le equazioni della proiezione ortogonale ℓ' di ℓ su π.
b) Si determini un piano π' a distanza uno da ℓ e da ℓ'.

Esercizio 4. Sia V lo spazio vettoriale delle matrici 2×2 a coefficienti reali. Su V consideriamo il prodotto scalare

$$b(A, B) = Tr(A \cdot B).$$

(1) Si calcoli la segnatura di b.
(2) L'insieme dei vettori isotropi rispetto al prodotto scalare b è uno sottospazio vettoriale di V?

Compito di Geometria e algebra lineare di lunedì 24 gennaio 2022

Istruzioni: Avete 2 ore e 20 minuti di tempo a disposizione. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari, pena l'annullamento del compito. Argomentare in modo chiaro le risposte, esercizi illeggibili non verranno presi in considerazione.

Esercizio 1. Sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori

$$u_1 = (1, 0, 0, 1) \qquad u_2 = (0, 1, 1, 0) \qquad u_3 = (1, 8, -1, 7)$$

Sia $F : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_4)u_1 + x_2u_2 + x_3u_3$$

e sia $G : U \longrightarrow U$ la restrizione di F a U ovvero $G(u) = F(u)$ per ogni $u \in U$.

a) dire se G è diagonalizzabile.
b) dire se F è diagonalizzabile.

Esercizio 2. Si considerino i seguenti punti di $\mathbb{R}^3$

$$O = (0, 0, 0) \qquad P = (1, 0, 0) \qquad Q = (1, 1, 0)$$

$$A = (1, -1, 0) \qquad B = (1, 1, 0) \qquad C = (1, 2, 1) \qquad D = (1, -2, -1).$$

a) Si scriva una trasformazione affine $f(x) = Ax + b$ che porta la retta OP nella retta AB e la retta OQ nella retta CD.
b) Esiste un'isometria (lineare o affine) che porta la retta OP nella retta AB e la retta OQ nella retta CD?

Esercizio 3. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si consideri il prodotto scalare b_k di $\mathbb{R}^4$ che rispetto alla base standard ha come matrice associata la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 0 & k-1 & k(k-1) & 0 \\ k-1 & 0 & k(k-1) & 0 \\ k(k-1) & k(k-1) & k & k \\ 0 & 0 & k & 0 \end{pmatrix}$$

a) Si calcoli la segnatura di b_k al variare di k.
b) Si calcoli la dimensione dell'ortogonale di del sottospazio generato da e_1 ed e_2 al variare di k.

Compito di Geometria e algebra lineare di lunedì 14 febbraio 2022

Istruzioni: Avete 2 ore e 20 di tempo a disposizione. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari, pena l'annullamento del compito.

Esercizio 1. Sia A una matrice 3×3 a coefficienti complessi hermitiana.

a) (4 punti) Si dimostri che se λ è un autovalore di F allora $\lambda \in \mathbb{R}$.

b) (4 punti) Sia h un prodotto hermitiano su uno spazio vettoriale V su numeri complessi. Sia $F : V \longrightarrow V$ una applicazione $\mathbb{C}$ - lineare. Cosa vuole dire che F è hermitiana rispetto ad h?

Esercizio 2. (7 punti) Si considerino i seguenti punti di $\mathbb{R}^3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Si descriva una isometria $F(x) = Ax + b$ di $\mathbb{R}^3$ tale che $F(AB) = CD$.

Esercizio 3. Sia A la matrice

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 3/2 \\ 3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

a) (5 punti) Si determini una matrice M tale che $M^{-1}AM$ sia diagonale.

b) (3 punti) Si calcoli A^{1000}.

Esercizio 4. Sia $V = \mathbb{R}[t]_{\leqslant 2}$ e sia U il sottospazio dei polinomi p tali che $p(1) = 0$ e sia W il sottospazio generato dal polinomio t. Sia b un prodotto scalare su V con le seguenti proprietà:

- l'ortogonale del sottospazio U è il sottospazio W.
- $b(t,t) = 1$
- $b(p,q) = -p(2)q(2) - p(0)q(0)$ per ogni $p, q \in U$,

a) (4 punti) Determinare la segnatura di b e di $b|_U$.

b) (5 punti) Determinare l'ortogonale del sottospazio generato dal polinomio t^2 rispetto al prodotto scalare b.

Compitino di Geometria e algebra lineare dell'11 febbraio: prima parte

Istruzioni: Avete 35 minuti di tempo a disposizione. Come prima cosa scrivete nome, cognome e matricola su questo foglio. Prima di consegnare il foglio trascrivetevi su un foglietto le risposte. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari, pena l'annullamento del compito. Dovete scrivere la risposta senza nessuna spiegazione negli appositi spazi. Per essere ammessi alla seconda parte bisogna rispondere correttamente ad almeno 4 domande.

Domanda 1. Sia $z = \log_e 2 + i\frac{\pi}{3}$. Calcolare e^z.

Risposta: $e^z =$

Domanda 2. Sia A la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Si calcoli il determinante di A^3.

Risposta: $Det(A^3) =$

Domanda 3. Sia π il piano $x + 2y - z = 0$, P il punto $(1,1,1)$ e Q la proiezione ortogonale di P su π.

Risposta: $Q =$

Domanda 4. Si consideri l'applicazione lineare $F : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3$ definita da

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ y+z \\ x-z \end{pmatrix}$$

Si scriva la matrice associata ad F rispetto alla base $v_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (1,0,1)$ e $v_3 = (0,1,1)$ in partenza e standard in arrivo.

Risposta: $[F]^{v_1,v_2,v_3}_{e_1,e_2,e_3} =$

Domanda 5. Sia $U \subset \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ un sottospazio di dimensione 4. Sia $F : \mathrm{Mat}_{3\times 3} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una applicazione lineare surgettiva. Sapendo che l'intersezione tra U e $N(F)$ ha dimensione 3 calcolare la dimensione di $U + N(F)$.

Risposta: $\dim(U + N(F)) =$

Compitino di Geometria e algebra lineare di venerdì 11 febbraio 2022: seconda parte

Istruzioni: Avete 2 ore e 20 di tempo a disposizione. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari, pena l'annullamento del compito.

Esercizio 1.

a) Si enunci il teorema della dimensione.
b) Sia A una matrice 3×3 a coefficienti reali. Si dimostri che se $N(L_A) = N(L_{A^2})$ allora $\mathrm{Im}(L_A)\cap N(L_A) = \{0\}$ e $N(L_A) + \mathrm{Im}(L_A) = \mathbb{R}^3$.

Esercizio 2. Sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ definito dalle equazioni

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - 2\,x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

e sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ definito generato dai vettori

$$w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Si dia una parametrizzazione di $U + W$.
b) Si dia una descrizione cartesiana di $U \cap W$.

Esercizio 3. Sia $E = \mathbb{C}[t]_{\leqslant 2}$ e sia U il sottospazio di E dei polinomi p tali che $p(1) = 0$. Sia $F = \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ e sia V il sottospazio di F delle matrici della forma $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)$. Sia $T : U \longrightarrow V$ l'applicazione lineare definita da

$$T(p) = \begin{pmatrix} p(2) & p(3) \\ 0 & p(0) \end{pmatrix}$$

Sia inoltre $S_k : E \longrightarrow F$ una applicazione lineare tale che

$$S_k(p) = T(p) \quad \text{per ogni } p \in U \quad \text{e} \quad S_k(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1+k \\ k^2-1 & -(1+k)/2 \end{pmatrix}$$

a) Si scelga una base di U e una di W e si scriva la matrice associata a T rispetto a queste basi.
b) Si determini il rango di S_k al variare di $k \in \mathbb{C}$

Compito di geometria e algebra lineare del 6 giugno 2022

Istruzioni: Avete 2 ore e 30' di tempo. Non è sufficiente dare la risposta giusta, dovete fornire delle giiustificazioni. Durante lo svolgimento non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari né altri oggetti elettronici, pena l'annullamento del compito. Buon lavoro!

Esercizio 1. [9 punti]

(1) Enuncia il teorema della dimensione.
(2) Siano $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ e $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ due funzioni lineari.
  (a) È possibile che la composizione $f \circ g$ sia iniettiva?
  (b) È possibile che la composizione $g \circ f$ sia iniettiva?
  In entrambe le domande, se la risposta è "no" dovete dimostrarlo, se è "si" dovete costruire un esempio in cui la composizione è effettivamente iniettiva.

Esercizio 2. [9 punti] Considera i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$U = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\1\end{pmatrix}\right), \qquad W = \begin{cases} 2x_1 - x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 &= 0 \end{cases}$$

(1) Calcola le dimensioni di $U \cap W$ e $U + W$.
(2) Costruisci una funzione lineare $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ suriettiva tale che $f(v) = 0$ per ogni $v \in U$ e per ogni $v \in W$.

Esercizio 3. [9 punti] Sia $V = M(n)$ lo spazio vettoriale delle matrici reali $n \times n$.

(1) L'endomorfismo $f\colon V \to V$, $f(A) = -A$ è diagonalizzabile?
(2) L'endomorfismo $f\colon V \to V$, $f(A) = A^T$ è diagonalizzabile?

In entrambi i casi la risposta va motivata. Nel punto (2), se non ti riesce il caso n generale studia i casi $n = 2$ e $n = 3$.

Esercizio 4. [9 punti] Consideriamo nello spazio il piano $\pi = \{z = 1\}$ e la retta r passante per i punti $(2, 1, 0)$ e $(0, 1, -2)$.

(1) Costruisci una isometria $f(x) = Ax + b$ tale che $f(r) \subset \pi$ e f non abbia punti fissi.
(2) Costruisci una isometria $f(x) = Ax + b$ tale che $f(r) \subset \pi$ e f abbia punti fissi.

Compito di geometria e algebra lineare del 27 giugno 2022

Istruzioni: Avete 2 ore e 30' di tempo. Non è sufficiente dare la risposta giusta, dovete fornire delle giiustificazioni. Durante lo svolgimento non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari né altri oggetti elettronici, pena l'annullamento del compito. Buon lavoro!

Esercizio 1. [9 punti] Siano $v_1, v_2, v_3 \in V$ vettori in uno spazio vettoriale. Sia $f\colon V \to W$ una funzione lineare.

(1) È sempre vero che se v_1, v_2, v_3 sono indipendenti allora $f(v_1), f(v_2), f(v_3)$ sono indipendenti?
(2) È sempre vero che se v_1, v_2, v_3 sono dipendenti allora $f(v_1), f(v_2), f(v_3)$ sono dipendenti?

In entrambi i casi, se la risposta è positiva dovete dimostrarlo, e se è negativa dovete descrivere un controesempio.

Esercizio 2. [9 punti] Considera la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

dipendente da tre parametri reali $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(1) Per quali valori di a, b, c l'endomorfismo $L_A\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dato da
$$L_A(x) = Ax$$
  è diagonalizzabile?
(2) Sia $M(2)$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate reali 2×2. Per quali valori l'endomorfismo $L_A\colon M(2) \longrightarrow M(2)$ dato da
$$L_A(X) = AX$$
  è diagonalizzabile?

Esercizio 3. [9 punti] Calcola il determinante e la segnatura della matrice seguente:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Più in generale, per ogni $n \geqslant 1$ considera la matrice $(2n) \times (2n)$ seguente:

$$S_{2n} = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix}$$

dove 0_n e I_n sono rispettivamente la matrice nulla e la matrice identità, entrambe $n \times n$. Calcola il determinante e la segnatura di S_{2n} al variare di n.

Esercizio 4. [9 punti] Considera nello spazio la retta r passante per i punti $(3, 1, 1)$ e $(-7, 1, 1)$ e la retta s passante per il punto $(0, 2, 2)$ e parallela alla retta vettoriale $\text{Span}(1, 0, 1)$.

Costruisci una isometria $f(x) = Ax + b$ tale che $f(r) = s$.

Compito di geometria e algebra lineare del 17 luglio 2022

Istruzioni: Avete 2 ore e 30' di tempo. Non è sufficiente dare la risposta giusta, dovete fornire delle giiustificazioni. Durante lo svolgimento non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari né altri oggetti elettronici, pena l'annullamento del compito. Buon lavoro!

Esercizio 1. [9 punti] Rispondi alle domande seguenti.

(1) Siano $U, V, W \subset \mathbb{R}^2$ sottospazi di dimensione 1. È possibile che U, V, W siano in somma diretta?
(2) Siano $U, V, W \subset \mathbb{R}^3$ sottospazi di dimensione 1. È possibile che U, V, W siano in somma diretta?

In entrambi i casi, se la risposta è negativa devi dimostrarlo, se è positiva devi descrivere un esempio.

Esercizio 2. [9 punti] Considera il piano in $\mathbb{R}^3$ dato da

$$U = \{x + y + z = 0\}.$$

(1) Costruisci una funzione lineare $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\text{Im} f = U$ e $\ker f \subset U$.
(2) Costruisci una funzione lineare $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\ker f = U$ e $\text{Im} f \subset U$.

Esercizio 3. [9 punti] Considera la matrice seguente, dipendente da un parametro $t \in \mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t-2 \\ 0 & t+2 & 0 \\ t & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Determina per quali $t \in \mathbb{R}$ la matrice è diagonalizzabile.

Esercizio 4. [9 punti] Siano r e s due rette orientate incidenti in $\mathbb{R}^3$. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una rotazione di angolo α intorno a r, e sia $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una rotazione di angolo β intorno a s.

(1) La composizione $f \circ g$ è sicuramente una rotazione di un certo angolo θ intorno ad una certa retta passante per $P = r \cap s$. Spiega perché questo è vero.
(2) Nel caso in cui r e s sono ortogonali, determina $\cos\theta$ in funzione di $\cos\alpha$ e $\cos\beta$.

Compito di geometria e algebra lineare del 12 settembre 2022

Istruzioni: Avete 2 ore e 30' di tempo. Non è sufficiente dare la risposta giusta, dovete fornire delle giiustificazioni. Durante lo svolgimento non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari né altri oggetti elettronici, pena l'annullamento del compito. Buon lavoro!

Esercizio 1. [9 punti] Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

(1) Sia $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un endomorfismo. Se n è pari, f ha almeno un autovettore.
(2) Sia $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un endomorfismo. Se n è dispari, f ha almeno un autovettore.
(3) Ogni endomorfismo $f\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ ha almeno un autovettore.

In tutti i casi, se la frase è vera devi dimostrarlo, se è falsa devi fornire un controesempio.

Esercizio 2. [9 punti] Considera i sottospazi in $\mathbb{R}^4$ dati da

$$U = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$W = \begin{cases} x_1 + x_2 + 7x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_3 - 11x_4 = 0 \end{cases}$$

(1) Determina la dimensione di $U + W$.
(2) Costruisci una matrice 4×4 non nulla A tale che l'immagine dell'endomorfismo $L_A \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ sia contenuta sia in U che in W.

Esercizio 3. [9 punti] Considera la matrice simmetrica seguente, dipendente da un parametro $t \in \mathbb{R}$:

$$S = \begin{pmatrix} t & 0 & 1 & 0 \\ 0 & t & 0 & 1 \\ 1 & 0 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & t \end{pmatrix}.$$

Determina la segnatura di S al variare di $t \in \mathbb{R}$.

Esercizio 4. [9 punti] Considera nello spazio $\mathbb{R}^3$ la retta

$$r = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 1+t \\ -1 \end{pmatrix} \middle| \; t \in \mathbb{R} \right\}$$

ed il piano π di equazione $y = 2$.

(1) Descrivi una isometria $f(x) = Ax + b$ con punti fissi tale che $f(r)$ non interseca π.
(2) Descrivi una isometria $f(x) = Ax + b$ senza punti fissi tale che $f(r)$ non interseca π.

1. Soluzioni del compito del 7 gennaio 2021

Soluzione esercizio 1. a) se $F(x) = F(y)$ allora $G(F(x)) = G(F(y))$ ed essendo $G \circ F$ iniettiva questo implica $x = y$.

b) Sia $F : V \longrightarrow W$ una applicazione lineare e sia V di dimensione finita. Allora $\dim V = \dim N(F) + \dim Im(F)$.

Soluzione esercizio 2. a) L'applicazione F è iniettiva, infatti se $tp'(t)$ è polinomio nullo allora $p'(t) = 0$ e quindi $p = c$ è un polinomio costante. Ma l'unico polinomio costante che sta in U è zero. Quindi $N(F)$ è il solo polinomio nullo. Quindi l'immagine di una base di U è una base dell'immagine. Una base di U è data da $t - 1$, $t^2 - 1$, $t^3 - 1$ e quindi una base dell'immagine è t, $2t^2$, $3t^3$. Eliminando le costanti possiamo anche scegliere come base t, t^2 e t^3.

b) Scrivo la matrice associata a G rispetto alla base standard in partenza e in arrivo. Per calcolare $G(t^3)$ osserviamo che $t^3 = (t^3 - 1) + 1$ e che l'addendo $t^3 - 1$ è in U, per linearità, ricaviamo che

$$G(t^3) = F(t^3 - 1) + G(1) = 3t^3 + 4 + t + t^2.$$

Similmente otteniamo $G(t^2) = F(t^2-1)+G(1) = 2t^2+4+t+t^2 = 4+t+3t^2$ e $G(t) = F(t-1)+G(1) = 4+2t+t^2$ e infine $G(1) = 4 + t + t^2$. Quindi

$$[G]^{1,t,t^2,t^3}_{1,t,t^2,t^3} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Quindi sottraendo la prima colonna alla seconda, terza e quarta otteniamo

$$DetG = Det \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = Det \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 24.$$

Soluzione esercizio 3. a) L'intersezione tra la retta ℓ e il piano π è il punto $P = (1, 1, -1)$. La retta ℓ' è l'intersezione del piano π e del piano π' contenente la retta ℓ e la retta ortogonale a π passante per P ovvero la retta $P + \mathbb{R}(1, 1, 1)$. Questo è il piano $x = y$, infatti tale piano contiene evidentemenre sia la retta ℓ che la retta $P + \mathbb{R}(1, 1, 1)$. Quindi la retta ℓ' ha equazioni $x = y$ e $x + y + z = 1$.

b) Consideriamo il piano contente le rette ℓ e ℓ'. Equivalentemente questo è il piano contenente le rette ℓ e $P + \mathbb{R}(1, 1, 1)$. Come visto nel punto precedente questo è il piano π' di equazione $x = y$. Noi cerchiamo un piano parallelo a questo e a distanza 1 da questo. Un piano parallelo a questo ha equazione $x = y + a$. La distanza di un tale piano dal piano $x = y$ è uguale alla distanza del piano $x = y + a$ dall'origine. Per calcolare tale distanza tracciamo l'ortogonale al piano $x = y$ passante per l'origine. Questa e' la retta $\mathbb{R}(1, -1, 0)$ che interseca il piano $x = y + a$ nel punto $(a/2, -a/2, 0)$. Quindi la distanza è $|a|/\sqrt{2}$. Quindi ci sono due piani che hanno la proprietà cercata: $x = y \pm \sqrt{2}$.

Soluzione esercizio 4. a) Se $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ è un matrice 2×2 ricaviamo che $b(A, A) = a^2 + 2bc + d^2$. Quindi la matrice associata a b rispetto alla base standard è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Questa matrice ha determinante -1 quindi le segnature possibili sono $(3, 1, 0)$ e $(1, 3, 0)$. Inoltre l'indice di positività è almeno 2, come si vede dalla restrizione di b al sottospazio delle matrici diagonali (ovvero il sottospazio generato dal primo e dall'ultimo vettore della base canonica), quindi la segnatura è $(3, 1, 0)$.

b) No, infatti dal calcolo effettuato al punto precedente vediamo che una matrice $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ è un vettore isotropo di V se e solo se $a^2 + 2bc + d^2 = 0$. In particolare per $a = d = b = 0$ e $c = 1$ otteniamo una matrice B che è un vettore isotropo, e per $a = d = c = 0$ e $b =$ otteniamo un secondo vettore isotropo che indichiamo con C. La loro somma invece è la matrice $a = d = 0$ e $b = c = 1$ che non è un vettore isotropo.

Soluzione esercizio 1. a) Calcoliamo la matrice associata a G rispetto alla base u_1, u_2, u_3. Abbiamo

$$[G]^{u_1,u_2,u_3}_{u_1,u_2,u_3} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Il polinomio caratteristico e' quindi $(t-2)(t^2-9)$ quindi G ha tre autovalori distinti, $2, 3, -3$ e pertanto è diagonalizzabile. Siano v_1, v_2, v_3 autovettori relativi a questi autovalori

b) Osserviamo che l'immagine di F è contenuta in U e pertanto, per il teorema della dimensione $N(F) \neq \{0\}$. Sia $v_4 \neq 0$ un vettore del. Allora v_1, v_2, v_3, v_4 sono autovettori relativi agli autovalori $2, 3, -3, 0$, quindi sono linearmente indipendenti e quindi sono una base di $\mathbb{R}^4$ e pertanto anche F è diagonalizzabile.

Soluzione esercizio 2. a) Osserviamo intanto che le rette AB e CD si intersecano nel punto $E = (1, 0, 0)$. Traslando le rette di $-E$ otteniamo le rette per l'origine generate da $u = \vec{EB} = (0, 1, 0)$ e $v = \vec{EC} = (0, 2, 1)$.

Se L è una applicazione lineare che porta e_1 in u e $e_1 + e_2$ in v allora L porta OP nella retta $\mathbb{R}u$ e OQ nella retta $\mathbb{R}v$ e quindi $F(x) = L(x) + E$ porta OP in AB e OQ in CD.

Osserviamo che esistono infinite applicazioni L con le proprietà cercate. Osserviamo infatti che $L(e_2) = L(e_1 + e_2 - e_1) = v - u$ e che il valori di e_3 lo possiamo scegliere liberamente. Poniamolo uguale a 0. Quindi $L = L_A$ per A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e $F(x) = Ax + E$ con $E = (1, 0, 0)$

b) Una tale isometria non esiste infatti l'angolo che formano le rette AB e CD è diverso dall'angolo che formano le rette OP e OQ. Calcoliamo il coseno di tali angoli:

$$\cos(\widehat{BED}) = \frac{\vec{EB} \cdot \vec{ED}}{\|\vec{ED}\|\|\vec{ED}\|} = \frac{2}{\sqrt{5}} \qquad \cos(\widehat{POQ}) = \frac{\vec{OP} \cdot \vec{OQ}}{\|\vec{OP}\|\|\vec{OQ}\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

che sono due numeri diversi.

Soluzione esercizio 3. a) Il determinante della matrice A_k è uguale a $k^2(k-1)^2$. Quindi per $k \neq 0, 1$ è un numero strettamente positivo e le segnature possibili sono $(4, 0, 0)$, $(0, 4, 0)$ e $(2, 2, 0)$. Osserviamo inoltre che e_1 è sempre un vettore isotropo quindi l'unica segnatura possibile è $(2, 2, 0)$.

Rimane da studiare la segnatura per $k = 0$ e $k = 1$. Per questi valori otteniamo le matrici

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

che hanno indice $i_0 = 2$. Per $k = 0$ restringiamo il prodotto scalare al piano generato da e_1 ed e_2 e vediamo che otteniamo un prodotto scalare non degenere associato ad una matrice di determinante -1 quindi con segnatura $(1, 1, 0)$ quindi sia i_+ che i_- del prodotto scalare b_0 sono non nulli. Quindi la segnatura di b_0 è $(1, 1, 2)$

Similmente si ragiona per la forma b_1 e si conclude che ha segnatura $(1, 1, 2)$.

b) Per $k \neq 0, 1$ abbiamo che la forma è non degenere e quindi l'ortogonale di $U = Span(e_1, e_2)$ ha dimensione $4 - \dim U = 2$.

Per $k = 0$ osserviamo che $b_0|_U$ ha come matrice associata

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

in particolare osserviamo che abbiamo che $b_0|U$ è non degenere e quindi la dimensione dell'ortogonale è uguale a 2.

Per $k = 1$ osserviamo che U è il radicale di b_1 e quindi $U^\perp = \mathbb{R}^4$

2. Soluzione compito del 14 febbraio

Soluzione esercizio 1. a) Indichiamo con $\cdot$ il prodotto hermitiano standard. Sia $A \cdot v = \lambda v$ con $v \neq 0$. Allora

$$\lambda \|v\|^2 = (\lambda v) \cdot v = Av \cdot v = v \cdot Av = v \cdot \lambda v = \bar{\lambda}\|v\|^2.$$

Poiché $\|v\| \neq 0$ otteniamo $\lambda = \bar{\lambda}$ ovvero $\lambda \in \mathbb{R}$.

b) F è hermitiana se per ogni $u, v \in V$ vale $h(F(u), v) = h(u, F(v))$.

Soluzione esercizio 2. Osserviamo che la retta AB è la retta $A + \mathbb{R}(0,1,0)$ e la retta CD è la retta $(2,1,2)+\mathbb{R}(1,1,0)$. Troviamo intanto una isometria lineare che porta la retta $\mathbb{R}(0,1,0)$ nella retta $\mathbb{R}(1,1,0)$. Possiamo scegliere la rotazione R di 45 gradi attorno all'asse z che ha come matrice associata rispetto alla base standard la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per ottenere l'isometria cercata operiamo come segue:

- applichiamo una traslazione che porti la retta AB nella retta $\mathbb{R}(0,1,0)$ (per esempio la traslazione $v \mapsto v - A$);
- applichiamo la rotazione $R = L_M$ che porta la retta $\mathbb{R}(0,1,0)$ nella retta $\mathbb{R}(1,1,0)$
- applichiamo una traslazione che porti la retta $\mathbb{R}(1,1,0)$ nella retta CD (per esempio la traslazione $v \mapsto v + C$)

In definitiva otteniamo la composizione

$$v \mapsto v - A \mapsto M \cdot (v - A) \mapsto M \cdot (v - A) + C = M \cdot v + C - M \cdot A$$

esplicitando il calcolo otteniamo $f(v) = M \cdot v + b$ con

$$b = C - M \cdot A = \begin{pmatrix} 2 - 1/\sqrt{2} \\ 1 - 1/\sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Soluzione esercizio 3. a) Il polinomio caratteristico della matrice è $t^2 - t - 2 = (t+1)(t-2)$, quindi la matrice ha due autovalori distinti e in particolare è diagonalizzabile con autovalori -1 e 2. L'autospazio di autovalore 2 è generato da $v_1 = (1,1)$ e l'autospazio di autovalore -1 è generato da $v_2 = (1,-1)$. Quindi se

$$M = [Id]^{v_1,v_2}_{e_1,e_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad e \quad M^{-1} = [Id]^{e_1,e_2}_{v_1,v_2} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Allora

$$M^{-1}AM = [L_A]^{v_1,v_2}_{v_1,v_2} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = B.$$

b) Dal punto precedente ricaviamo che $A = MBM^{-1}$ quindi

$$A^{1000} = (MBM^{-1})^{1000} = MB^{1000}M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{1000} & 0 \\ 0 & (-1)^{1000} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Quindi

$$A^{1000} \begin{pmatrix} 2^{999} + 1/2 & 2^{999} - 1/2 \\ 2^{999} - 1/2 & 2^{999} + 1/2 \end{pmatrix}$$

Soluzione esercizio 4. a) Osserviamo che $b|_W$ è definita positiva e che $b|_U$ è definita negativa. Infatti se $p \in U$ allora $b(p,p) = -(p(2)^2 + p(0)^2) \leqslant 0$. Inoltre se $p \in U$ e $b(p,p) = -(p(2)^2 + p(0)^2) = 0$ allora $p(0) = p(2) = 0$, da cui, poiché se $p \in U$ allora p è un polinomio di grado minore o uguale a 2 con $p(1) = 0$, ne ricaviamo $p = 0$. Quindi b ha segnatura $(1,2,0)$.

b) Osserviamo che $t^2 = t + (t^2 - t) = t + p$ con $p \in U$. Quindi $\alpha t + q$ con $q \in V$ è ortogonale a t^2 se e solo se

$$\alpha - p(2)q(2) - p(0)q(0) = \alpha - 2q(2)$$

Quindi l'ortogonale di t^2 è il sottospazio dei polinomi $2q(2)t + q$ con $q \in U$. Poiché una base di U è data dai polinomi $t^2 - t$ e $t - 1$ Una parametrizzazione di U è quindi data da

$$(a,b) \mapsto 2(2a+b)t + a(t^2 - t) + b(t-1).$$

3. Soluzioni prima parte prima del compitino dell'11 febbraio

Domanda 1. $1 + i\sqrt{3}$

Domanda 2. 8

Domanda 3. $(2/3, 1/3, 4/3)$

Domanda 4. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Domanda 5. 7

4. Soluzioni del compitino dell'11 febbraio, seconda parte

Soluzione esercizio 1. a) Il teorema della dimensione afferma che se $F : V \longrightarrow W$ è una applicazione lineare e V è uno spazio vettoriale di dimensione finita allora

$$\dim V = \dim N(F) + \dim \mathrm{Im}(F)$$

b) Sia $v \in N(L_A) \cap \mathrm{Im}(L_A)$. Quindi $A \cdot v = 0$ e esiste w tale che $A \cdot w = v$. In particolare $A^2 \cdot w = 0$. Dall'ipotesi $N(L_A) = N(L_{A^2})$ ricaviamo quindi $A \cdot w = 0$ e quindi $v = 0$. Questo dimostra $N(L_A) \cap \mathrm{Im}(L_A) = \{0\}$. Osserviamo inoltre che per il teorema della dimensione $\dim N(L_A) + \dim \mathrm{Im}(L_A) = 3$, quindi, utilizzando che $\dim N(L_A) \cap \mathrm{Im}(L_A) = 0$, dalla formula di Grassmann ricaviamo $\dim \big(N(L_A) + \mathrm{Im}(L_A)\big) = 3$ e quindi $N(L_A) + \mathrm{Im}(L_A) = \mathbb{C}^3$.

Soluzione esercizio 2. Osserviamo che i vettori che generano W sono linearmente indipendenti e che il sistema che definisce W ha rango 2, quindi anche $\dim W = \dim U = 2$. Inoltre osserviamo che il sistema che definisce U è gia in forma a scalini e quindi è immediato scrivere una sua base:

$$u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Possiamo ricavare delle equazioni di W vedendo quando il sistema $xw_1 + yw_2 = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{smallmatrix}\right)$ ha soluzione. Riducendo a scalini la matrice del sistema completo associato

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & | & x_1 \\ 1 & 1 & | & x_2 \\ -1 & 0 & | & x_3 \\ 0 & 1 & | & x_4 \end{pmatrix}$$

otteniamo che W è definito dalle equazioni $x_1 = x_4$ e $x_1 = x_2 + x_3$.

a) un vettore di W è della forma $w = aw_1 + bw_2$. Questo vettore è un vettore di $U \cap W$ se le sue coordinate risolvono le due equazioni che definiscono U. Sostituendo troviamo

$$-a + b - 2b = 0 \qquad a + a + b + b = 0$$

ovvero l'unica condizione $a = -b$. Ne ricaviamo che l'intersezione ha dimensione uno e che è l'insieme dei vettori

$$t(w_2 - w_1) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ t \\ t \end{pmatrix}.$$

Quindi le equazioni che definiscono $U \cap W$ sono

$$x_2 = 0 \qquad x_1 = x_4 \qquad x_3 = x_4,$$

b) Dal punto precedente, per la formula di Grassmann, ricaviamo che $U + W$ ha dimensione 3. Osserviamo inoltre che $w_1 \notin U$ infatti non risolve l'equazione, $x_2 - x_2 + x_4 = 0$ quindi i vettori

$$u_1,\ u_2,\ w_1$$

sono linearmente indipendenti ed essendo tre sono una base di $U + W$. In particolare l'applicazione

$$\begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix} \mapsto ru_1 + su_2 + tu_3 = \begin{pmatrix} -r + 2s \\ r - s + t \\ r - t \\ s + t \end{pmatrix}$$

è una parametrizzazione di $U + W$.

Soluzione esercizio 3. a) Una base di U sono i polinomi $t-1, t^2-1$ e una base di V sono le matrici E_{11}, E_{12}, E_{22}. Abbiamo

$$[T]^{t-1,t^2-1}_{E_{11},E_{12},E_{22}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 8 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Questa matrice ha rango 2.

b) Osserviamo che l'immagine di S_k contiene l'immagine di T. Ne ricaviamo che

$$2 = rango(T) \leqslant rango(S_k) \leqslant \dim E = 3.$$

Se $k \neq \pm 1$ osserviamo che $S_k(t) \notin V$, quindi l'immagine di S è più grande dell'immagine di T e ricaviamo $rango(S_k) = 3$.

Se $k = 1$ ricaviamo che l'immagine di S_k è generata dall'immagine di T e dalla matrice $S_1(t)$ ovvero

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

che è uguale a $T(t-1)$ quindi l'immagine di S_1 è uguale all'immagine di T. Quindi $rango(S_1) = 2$.

Infine se $k = -1$ ricaviamo che l'immagine di S_k è generata dall'immagine di T e dalla matrice $S_{-1}(t)$ ovvero

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Bisogna controllare se questa matrice è nell'immagine di T. Ma se $p \in U$ e $T(p) = A$ allora $p(1) = p(0) = p(3) = 0$. Ma p è un polinomio di grado al massimo 2 e quindi $p = 0$. Quindi in questo caso $rango(S_{-1}) = 3$.

Soluzioni del compito del 6 giugno 2022

Esercizio 1.

(1) Fatto a lezione

(2) (a) g non può essere iniettiva perché la dimensione del codominio è minore di quella del dominio: il teorema della dimensione ci darebbe $3 = \dim \mathrm{Im} g + \dim \mathrm{Ker} g$ ma $\mathrm{Im} g \leqslant 2$ porta a $\dim \mathrm{Ker} g \geqslant 1$. Se g non è iniettiva, neanche $f \circ g$ può essere iniettiva.

(b) $g \circ f$ può essere iniettiva. Ad esempio basta rappresentare f e g come la moltiplicazione a sinistra per le matrici seguenti:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2. Si trova che $U \cap W$ è una retta generata dal vettore $(1, 0, 2, -1)$. Quindi $\dim U \cap W = 1$ e per Grassmann $\dim(U + W) = 3$. Per costruire f è sufficiente prendere una base v_1, v_2, v_3 di $U + W$ e costruire una $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4$ non nulla tale che $f(v_i) = 0$ per ogni i. Ad esempio si prende

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La funzione $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = -3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4$ funziona.

Esercizio 3.

(1) La funzione f manda ogni matrice A in $-A$. Quindi qualsiasi matrice non nulla è un autovettore con autovalore -1. Una qualsiasi base di matrici (ad esempio quella canonica) è una base di autovettori. Quindi f è diagonalizzabile.

(2) Diamo tre soluzioni diverse.

(a) Se prendiamo la base canonica $E_{i,j}$ notiamo che $f(E_{i,j}) = E_{j,i}$. Notiamo che la matrice associata a f rispetto alla base canonica è simmetrica e quindi diagonalizzabile per il teorema spettrale (è utile scrivere i casi $n = 2$ e $n = 3$ per farsi una idea del fatto che la matrice associata viene simmetrica).

(b) Una base esplicita di autovettori è data dalle matrici

$$E_{ii}, \quad E_{ij} + E_{ji}, \quad E_{ij} - E_{ji}.$$

Queste hanno autovalore rispettivamente $1, 1, -1$.

(c) Lo spazio $M(n)$ si decompone in somma diretta come $S(n) \oplus A(n)$ dove $S(n)$ sono le matrici simmetriche e $A(n)$ le antisimmetriche. La funzione f lascia invariante sia $S(n)$ che $A(n)$, e gli elementi di $S(n)$ e $A(n)$ sono autovettori con autovalore 1 e -1. Quindi $S(n)$ e $A(n)$ sono proprio gli autospazi di f. Lo spazio $M(n)$ si decompone in autospazi e allora f è diagonalizzabile.

Esercizio 4. Facendo un disegno si vede che retta e piano si intersecano in $P = (3, 1, 1)$ con un angolo di $\pi/4$. È possibile mandare r in π in vari modi: ad esempio con una rotazione di $\pi/4$ intorno alla retta passante per P e parallela a y, seguita da una traslazione parallela a π. In questo modo si ottiene

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1+\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

dove a, b sono arbitrari. Si ottengono punti fissi precisamente quando $b = 1$.

Soluzioni del compito del 27 giugno 2022

Esercizio 1.

(1) No. Ad esempio, non accade se $V = W = \mathbb{R}^3$, v_1, v_2, v_3 è la base canonica, e $f = L_A$ con A la matrice nulla. Ci sono numerosi altri controesempi. Ad esempio se la dimensione di W è minore o uguale a due non è mai vero.

(2) Sì. Per definizione, i tre vettori sono dipendenti se esiste una combinazione lineare nulla $av_1 + bv_2 + cv_3 = 0$ con coefficienti a, b, c non tutti nulli. Applicando f e usando la linearità si ottiene $af(v_1) + bf(v_2) + cf(v_3) = 0$ e quindi anche $f(v_1), f(v_2), f(v_3)$ sono dipendenti.

Esercizio 2.

(1) La matrice è triangolare e quindi gli autovalori sono a e c. Se sono distinti è diagonalizzabile. Se coincidono, troviamo un solo autovalore $a = c$ con molteplicità algebrica 2, e si vede che la molteplicità geometrica è 2 solo quando $b = 0$. Riassumendo, la matrice è diagonalizzabile se e solo se $a \neq c$ oppure $a = c$ e $b = 0$.

(2) La matrice associata alla base canonica è una matrice 4×4, triangolare e con valori a, c, a, c sulla diagonale. Ragionando similmente a sopra si ottiene lo stesso risultato.

Esercizio 3. La matrice ha determinante 1. Le segnature possibili sono quindi $(4, 0, 0)$, $(2, 2, 0)$, $(0, 4, 0)$. Poiché la traccia è nulla, l'unica possibile è $(2, 2, 0)$.

In generale, si dimostra per induzione su n che il determinante di S_{2n} è $(-1)^n$ e la segnatura è $(n, n, 0)$. Il caso $n = 1$ è facile. Supponiamo dimostrato il caso $n - 1$ e dimostriamo il caso n. Per dimostrare che il determinante è $(-1)^n$ in realtà l'induzione non serve: basta notare che scambiando n colonne opportune si ottiene la matrice identià, e ricordando che ogni scambio cambia il segno del determinante.

Per quanto riguarda la segnatura, notiamo che cancellando due opportune coppie di righe e colonne troviamo che $S_{2(n-1)}$ è sottomatrice di S_{2n}. Per ipotesi induttiva sappiamo che la segnatura della sottomatrice $S_{2(n-1)}$ è $(n-1, n-1, 0)$. Quindi la segnatura della matrice S_{2n} deve essere una di queste:

$$(n+1, n-1, 0), \quad (n, n, 0), \quad (n-1, n+1, 0).$$

L'unica compatibile con il segno del determinante è la seconda.

Esercizio 4. Le giaciture delle due rette sono entrambe contenute nel piano $y = 0$ e formano un angolo di $\pi/4$. Quindi per mandare la giacitura di r in quella di s è sufficiente ruotare intorno all'asse y di questo angolo, con la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}.$$

Per trovare b è sufficiente imporre che $f(x) = Ax + b$ mandi un punto di r in un punto di s. Ad esempio questo funziona:

$$b = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 1 \\ 2 - \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}.$$

Più geometricamente, possiamo costruire una rototraslazione con asse perpendicolare alle due rette, parallelo all'asse y e trovare un risultato analogo (la b che funziona non è unica).

Soluzioni del compito del 17 luglio 2022

Esercizio 1.

(1) No, perché avremmo $\dim(U+V+W) = \dim U + \dim V + \dim W = 1+1+1 = 3$ ma $U+V+W \subset \mathbb{R}^2$.
(2) Si, ad esempio U, V, W possono essere le rette generate dai vettori della base canonica di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 2. Notiamo intanto che una base di U è data dai vettori $(1,-1,0)$ e $(0,1,-1)$.

(1) Ad esempio $f = L_A$ con
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$
(2) Ad esempio $f = L_A$ con
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3. Gli autovalori sono $\lambda_1 = t+2$, $\lambda_2 = t+1$, $\lambda_3 = 3-t$. Quando sono tutti diversi è diagonalizzabile. Valutiamo i casi in cui non sono tutti diversi.

L'uguaglianza $\lambda_1 = \lambda_2$ non è possibile. L'uguaglianza $\lambda_1 = \lambda_3$ si verifica per $t = 1/2$, e in questo caso calcolando le molteplicità geometriche si vede che è diagonalizzabile. L'uguaglianza $\lambda_2 = \lambda_3$ si verifica per $t = 1$, e in questo caso calcolando le molteplicità geometriche si vede che non è diagonalizzabile.

Quindi la matrice è diagonalizzabile per ogni $t \neq 1$.

Esercizio 4.

(1) Componendo due isometrie affini che preservano l'orientazione (cioè con $\det A = 1$) si ottiene sempre una isometria affine che preserva l'orientazione. Poiché la composizione deve fissare il punto P, ha qualche punto fisso e quindi è una rotazione intorno a qualche asse.
(2) Prendo un sistema di riferimento in cui P è l'origine e i primi due vettori della base sono quelli che generano r e s. In questo sistema di riferimento le rotazioni sono $f(x) = Ax$ e $g(x) = A'x$, con
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix}$$

Quindi $f(g(x)) = AA'x$ e moltiplicando le matrici si ottiene
$$AA' = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ \sin\alpha\sin\beta & \cos\alpha & -\sin\alpha\cos\beta \\ -\cos\alpha\sin\beta & \sin\alpha & \cos\alpha\cos\beta \end{pmatrix}.$$

Vediamo che $2\cos\theta + 1 = \mathrm{tr}(AA') = \cos\alpha + \cos\beta + \cos\alpha\cos\beta$ e quindi
$$\cos\theta = \frac{1}{2}(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\alpha\cos\beta - 1).$$

Soluzioni del compito del 12 settembre 2022

Esercizio 1. Le affermazioni (1) e (3) sono vere perché il polinomio caratteristico ha sempre almeno una radice. L'affermazione (2) è falsa, basta prendere una rotazione i $\mathbb{R}^2$ di angolo diverso da 0 e π.

Esercizio 2. Scrivendo il vettore generico di U come $(t+2u, t, -u, t+u)$ e inserendolo nelle equazioni di W si vede che $U \cap W$ è una retta generata da $(-1,1,1,0)$. Quindi per Grassmann $U + W$ ha dimensione $2+2-1 = 3$.

Un endomorfismo richiesto è ad esempio dato dalla matrice
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3. Il polinomio caratteristico è $((t-\lambda)^2-1)^2$ e ha radici $\lambda = t \pm 1$, ciascuna con molteplicità due. Quindi la segnatura è $(4,0,0)$ per $t > 1$, $(2,0,2)$ per $t = 1$, $(2,2,0)$ per $-1 < t < 1$, $(0,2,2)$ per $t = -1$ e $(0,4,0)$ per $t < -1$.

In alternativa si può usare il metodo di Jacobi e ottenere la successione $1, t, t^2, t(t^2-1), (t^2-1)^2$ che funziona tranne nei casi $t = -1, 0, 1$, che vanno analizzati separatamente. Ad esempio nel caso $t = -1$ la matrice ha rango 2 e la sottomatrice quadrata in alto a sinistra ha segnatura $(0,2,0)$, quindi l'unica possibilità è $(2,2,0)$.

Esercizio 4. Retta e piano si intersecano con angolo $\pi/4$ nel punto $(1,2,-1)$. Facendo un disegno si vede che una isometria con punti fissi è una rotazione oraria di angolo $\pi/4$ intorno alla retta

$$r' = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ t \end{pmatrix} \right\}.$$

Cambiando coordinate e riportando in quelle originali, si ottiene questo:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ 1-\sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Per ottenere una isometria senza punti fissi basta aggiungere una traslazione lungo la direzione dell'asse, quindi ad esempio

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ 1-\sqrt{2}/2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$