COMPITI E COMPITINI DELL'ANNO 2018

Le soluzioni degli esercizi sono in fondo al file.

Compito di Geometria e algebra lineare dell'8 gennaio 2018

Istruzioni: I fogli per svolgere gli esercizi vi saranno forniti. Consegnate solo la bella e il foglio con gli esercizi e motivate sempre le vostre risposte. Sarà valutata anche l'esposizione e non saranno corretti esercizi illeggibili. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrici, cellulari, pena l'annullamento del compito. Avete a disposizione 3 ore di tempo.

Esercizio 1.

a) Si definisca cosa sia una isometria lineare di $\mathbb{R}^3$ rispetto al prodotto scalare standard;
b) Si dimostri che se F è una isometria lineare di $\mathbb{R}^3$ rispetto al prodotto scalare standard e λ è un autovalore di F allora $\lambda = \pm 1$;
c) Si faccia un esempio di isometria lineare di $\mathbb{R}^3$ rispetto al prodotto scalare standard che non sia diagonalizzabile e che non abbia 1 come autovalore.

Esercizio 2. Sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ definito dall'equazione $x + 2y + 3z = 0$. Sia $E = \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e sia S il sottospazio delle matrici simmetriche ovvero delle matrici della forma $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & d \end{smallmatrix}\right)$. Sia $F : W \longrightarrow S$ l'applicazione lineare definita da

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & x+2y \\ -3z & z \end{pmatrix} \qquad \text{per ogni } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in W.$$

Sia inoltre $G : \mathbb{R}^3 \longrightarrow E$ l'applicazione lineare tale che

$$G\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = F\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \text{per ogni } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in W \quad \text{e } G\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Scegliere una base per W e una per S e scrivere la matrice associata a F rispetto a queste basi;
b) Scrivere la matrice associata a G rispetto alle basi standard di $\mathbb{R}^3$ e di $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Esercizio 3. Si consideri l'isometria F di $\mathbb{R}^3$ associata alla matrice

$$A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -6 & 3 & -2 \\ 2 & 6 & 3 \\ 3 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

a) Determinare di che tipo di isometria si tratta;
b) Per quali $b \in \mathbb{R}^3$ l'isometria $F_b(v) = F(v) + b$ è una rotazione?
c) Scrivere F come composizione di riflessioni;

Esercizio 4. Sia $V = \mathbb{R}[t]_{\leqslant 2}$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a 2. Sia $g : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ il prodotto scalare definito dalla formula

$$g(p, q) = p(1)q(2) + p(2)q(1) + p'(0)q'(0).$$

a) Calcolare la segnatura di g;
b) Esiste una retta W passante per l'origine in V tale che $g|_W$ è nullo?
c) Esiste un piano W passante per l'origine in V tale che $g|_W$ è nullo?

1. Compito di Geometria e algebra lineare del 29 gennaio 2018

Istruzioni: I fogli per svolgere gli esercizi vi saranno forniti. Consegnate solo la bella e il foglio con gli esercizi e motivate sempre le vostre risposte. Sarà valutata anche l'esposizione e non saranno corretti esercizi illeggibili. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrici, cellulari, pena l'annullamento del compito. Avete a disposizione 3 ore di tempo.

Esercizio 1.

a) Si dia la definizione di prodotto scalare;
b) Sia g un prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$ di segnatura $(1, 2, 0)$. Si dica se esiste un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ di dimensione uno sul quale g è nullo;
c) Sia g un prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$ di segnatura $(1, 1, 1)$. Si dica se esiste un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ di dimensione due sul quale g è nullo.

Esercizio 2. Sia $E = \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ e sia

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Definiamo l'applicazione lineare $C_A : E \longrightarrow E$ mediante la formula

$$C_A(X) = AX - XA.$$

a) Supponiamo che il polinomio caratteristico di A sia $t^2 - 1$. Calcolare il polinomio caratteristico di C_A e dire se è diagonalizzabile.
b) Poniamo $a = 1$, $b = 1$, $c = -1$ e $d = -1$. Si calcoli il polinomio caratteristico di C_A, e se ne determini la forma di Jordan.

Esercizio 3. Siano U e W i piani affini di $\mathbb{R}^3$ definiti rispettivamente dalle equazioni $x+3y-z = 0$ e $x + 3y - z = 1$. Sia P_U la proiezione ortogonale di $\mathbb{R}^3$ su U.

a) Scrivere la matrice associata all'applicazione lineare P_U rispetto alla base standard.
b) Dato $v \in \mathbb{R}^3$ determinare il punto di W che ha minima distanza da W.

Esercizio 4. Sia g_a il prodotto scalare su $\mathbb{R}^4$ tale che

$$g_a\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}\right) = x_1\, y_1 + 3\, x_2\, y_2 + a\, x_3\, y_3 + \frac{16}{3} x_4\, y_4 + a\, x_1\, y_3 + a\, y_1\, x_3 + x_3\, y_4 + y_3\, x_4.$$

a) Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ il prodotto scalare g_a è definito positivo;
b) Si determini un valore di a tale che il prodotto scalare ristretto al sottospazio W definito dalle equazioni $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ e $x_4 = 0$ sia degenere.

2. Compito di Geometria e algebra lineare del 14 febbraio 2018

Istruzioni: I fogli per svolgere gli esercizi vi saranno forniti. Consegnate bella, brutta e foglio degli esercizi. Distinguete in modo chiaro tra bella e brutta. Motivate sempre le vostre risposte. Sarà valutata anche l'esposizione e non saranno corretti esercizi illeggibili. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrici, cellulari, pena l'annullamento del compito. Avete a disposizione 3 ore di tempo.

Esercizio 1.

a) Si definisca cosa è il nucleo di una applicazione lineare;
b) Si dimostri che se il nucleo di una applicazione lineare è zero allora l'applicazione è iniettiva;
c) Siano $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ e $S : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ due applicazioni lineari e si supponga che T è iniettiva e che $S \circ T = 0$. È possibile che la dimensione dell'immagine di S sia 2? [Se è possibile fare un esempio, altrimenti dimostrare che non è possibile.]

Esercizio 2. Sia A la seguente matrice 2×2

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}.$$

Determinare A^{101}.

Esercizio 3. Sia r la retta passante per l'origine e per $(1,1,0)$ e s la retta definita dalle equazioni

$$\begin{cases} y + z = 1 \\ x + 2y + 2z = 1 \end{cases}$$

a) Scrivere una isometria che porta r in s;
b) Scrivere una isometria che porta r in s che non abbia punti fissi e una che che abbia almeno un punto fisso [una delle due può essere quella trovata al punto precedente].
c) Esiste una riflessione che porta r in s?

Esercizio 4. Per $a \in \mathbb{R}$ sia g_a il prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$ definito da

$$g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}\right) = x\,x' + (a-1)y\,y' + a\,z\,z' + (a-1)(x\,z' + x'\,z)$$

a) Esiste una base di formata da vettori isotropi per $a = 0$?
b) Esiste una base formata da vettori isotropi per $a = 1$?
c) Esiste una isometria lineare rispetto a g_2 che porta e_1 in e_3?

AAA Compitino di algebra lineare del 26 febbraio 2018: prima parte

Istruzioni: Avete 35 minuti di tempo a disposizione. Come prima cosa scrivete nome, cognome e matricola nello spazio qui sotto. Scrivete solo i risultati senza nessuna spiegazione negli appositi spazi. Effettuate i calcoli necessari sui fogli che vi saranno consegnati a parte. Dovete consegnare solo questo foglio. Prima di consegnare il foglio trascrivetevi su un foglietto i risultati e le lettere ABB. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari, pena l'annullamento del compito. Per essere ammessi alla seconda parte del compito è necessario aver risposto correttamente a tutte e 5 le domande.

Nome e cognome e matricola: ______________________________

Domanda 1. Sia P il punto di coordinate $(1,1,2)$, Q il punto di coordinate $(-1,2,1)$ e O l'origine. Sia α l'angolo POQ. Calcolare $\cos\alpha$.

Risposta: $\cos\alpha =$

Domanda 2. Sia A la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcolare $\det(A)$.

Risposta: $\det(A) =$

Domanda 3. Sia $z = 2 + 3i$ e $w = 1 + i$. Calcolare la parte reale di z/w.

Risposta: $Re(z/w) =$

Domanda 4. Sia W il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad e \qquad v = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Descrivere W mediante una equazione lineare $ax + by + cz = 0$.

Risposta:

Domanda 5. Sia $F : \mathbb{R}^8 \longrightarrow \mathbb{R}^5$ una applicazione lineare suriettiva, $W \subset \mathbb{R}^8$ un sottospazio di dimensione 6 e $U = W \cap N(F)$. Sapendo che $N(F) + W = \mathbb{R}^8$ calcolare $\dim U$. [con $N(F)$ indico il nucleo di F]

Risposta: $\dim U =$

Compitino di algebra lineare del 26 febbraio 2018: seconda parte

Istruzioni: I fogli per svolgere gli esercizi vi saranno forniti. Mettete il vostro nome su tutti i fogli. Consegnate sia la bella che la brutta che il foglio con gli esercizi e motivate sempre le vostre risposte. Se un foglio che consegnate non volete che sia corretto scriveteci "brutta" in cima. Sarà valutata anche l'esposizione e non saranno corretti esercizi illeggibili. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrici, cellulari, pena l'annullamento del compito.

Esercizio 1.

a) Dare la definizione di vettori linearmente indipendenti.
b) Fare un esempio di tre vettori u, v, w in $\mathbb{R}^3$ tali che presi a coppie siano linearmente indipendenti (ovvero che u, v siano linearmente indipendenti. u, w siano linearmente indipendenti, e che v, w siano linearmente indipendenti) ma che u, v, w siano linearmente dipendenti
c) Siano u, v, w elementi di uno spazio vettoriale. Supponiamo che u e v siano linearmente indipendenti. Dimostrare che se u, v, w sono linearmente dipendenti allora $w \in \langle u, v \rangle$.

Esercizio 2. Sia U il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sia V il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 4\,x_3 - x_4 = 0 \\ 3\,x_1 + 5\,x_2 + 11\,x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

a) Calcolare la dimensione di U e V.

b) Calcolare la dimensione di $U + V$ e $U \cap V$.

Esercizio 3. Sia $V = \mathbb{R}[t]_{\leqslant 2}$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a 2. Sia $W = \{f \in V \,:\, f(1) = 0\}$ e sia $D : W \longrightarrow V$ l'applicazione lineare definita da $D(f) = f'$. Per $a \in \mathbb{R}$ sia $F_a : V \longrightarrow V$ l'applicazione linerare tale che

$$F_a(f) = D(f) \qquad \text{per ogni } f \in W \quad \text{ e } \quad F_a(1) = a(t-1).$$

a) Scegliere una base per W e scrivere la matrice associata a D rispetto a questa base in partenza e alla base standard in arrivo;
b) Per quali valori di a l'applicazione F_a è diagonalizzabile?

Esercizio 4. Sia A la seguente matrice 7×7

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calcolare rango, determinante e traccia di A;
b) Trovare un vettore non nullo $v \in \mathbb{R}^7$ tale che $A \cdot v = v$;
c) Determinare il polinomio caratteristico di A e dire se A è diagonalizzabile.

Compito di Geometria e algebra lineare del 4 giugno 2018

Istruzioni: I fogli per svolgere gli esercizi vi saranno forniti. Consegnate solo la bella e il foglio con gli esercizi e motivate sempre le vostre risposte. Sarà valutata anche l'esposizione e non saranno corretti esercizi illeggibili. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrici, cellulari, pena l'annullamento del compito. Avete a disposizione 3 ore di tempo.

Esercizio 1. Svolgi i punti seguenti:

(1) Siano $U, W \subset V$ due sottospazi di uno spazio vettoriale. Definisci il sottospazio $U + W$.
(2) Sia $V = \mathbb{R}^5$.
   (a) Esistono $U, W \subset V$ con $\dim U = \dim W = 3$ e $\dim U \cap W = 1$?
   (b) Esistono $U, W \subset V$ con $\dim U = \dim W = 3$ e $\dim U \cap W = 0$?
   In caso affermativo fornisci un esempio, in caso negativo dimostra che non esistono.

Esercizio 2. Considera la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & -3 & 3 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Sia B una qualsiasi matrice reale quadrata 3×3.

(1) Dimostra che se $AB = 0$ allora 0 è necessariamente un autovalore per B.
(2) Construisci una matrice B quadrata 3×3 che soddisfi entrambe queste proprietà:
   - $AB = 0$,
   - $B^2 = 0$ ma $B \neq 0$.

Esercizio 3. Considera i due piani in $\mathbb{R}^3$ seguenti:

$$\pi_1 = \{x + y = 1\}$$

$$\pi_2 = \left\{ \begin{pmatrix} t + 2u - 1 \\ t + 2u + 2 \\ 2u + 4 \end{pmatrix} \middle| \ t, u \in \mathbb{R} \right\}.$$

(1) Scrivi π_2 in forma cartesiana.
(2) Costruisci un'isometria $f(x) = Ax + b$ tale che:
- $f(\pi_1) = \pi_2$ e $f(\pi_2) = \pi_1$;
- f non abbia punti fissi;
- $\det A = 1$

(3) Costruisci un'isometria $g(x) = Ax + b$ tale che:
- $g(\pi_1) = \pi_2$ e $g(\pi_2) = \pi_1$;
- g non abbia punti fissi;
- $\det A = -1$

Esercizio 4. Considera il prodotto scalare g su $\mathbb{R}^4$ dato da $g(x, y) = {}^t xSy$ dove S è la matrice

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) Determina la segnatura di S.
(2) Esiste un sottospazio $W \subset \mathbb{R}^4$ di dimensione due su cui la restrizione $g|_W$ sia definita positiva? In caso affermativo trova una base per W.
(3) Esiste un sottospazio $W \subset \mathbb{R}^4$ di dimensione tre su cui la restrizione $g|_W$ sia nulla (cioè tale che $g(v, w) = 0 \ \forall v, w \in W$)? In caso affermativo trova una base per W.

Compito di Geometria e algebra lineare del 25 giugno 2018

Istruzioni: I fogli per svolgere gli esercizi vi saranno forniti. Consegnate solo la bella e il foglio con gli esercizi e motivate sempre le vostre risposte. Sarà valutata anche l'esposizione e non saranno corretti esercizi illeggibili. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrici, cellulari, pena l'annullamento del compito. Avete a disposizione 3 ore di tempo.

Esercizio 1. Sia $f : V \to V$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale V.

(1) Definisci il nucleo di f e mostra che è un sottospazio vettoriale di V.
(2) Se f è diagonalizzabile, è vero che $f^2 = f \circ f$ è diagonalizzabile? Motiva la risposta.

Esercizio 2. Considera la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -8 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -5 & -1 \\ 0 & -4 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(1) La matrice A è diagonalizzabile?
(2) Calcola il polinomio minimo di A.
(3) Costruisci un'altra matrice B che non sia simile ad A, che non sia diagonalizzabile, ma che abbia lo stesso polinomio caratteristico di A.

Esercizio 3. Considera il prodotto scalare g su $\mathbb{R}^4$ dato da

$$g(x,y) = {}^t\!xSy$$

dove S è la matrice

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 12 & 6 & 4 \\ 1 & 6 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

(1) Determina il radicale di g e calcolane la dimensione.
(2) Dato $W = \operatorname{Span}(e_1, e_2)$, mostra che $\mathbb{R}^4 = W \oplus W^\perp$.
(3) Calcola la segnatura di $g|_W$.
(4) Calcola la segnatura di g.

Esercizio 4. Considera in $\mathbb{R}^3$ il piano

$$\pi = \{z = 1\}$$

e la retta

$$r = \left\{ \begin{pmatrix} 2+t \\ t \\ -1 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}.$$

(1) Determina la distanza fra π e r.
(2) Determina equazioni cartesiane per il piano π' contenente r e perpendicolare a π.
(3) Scrivi una isometria $f(x) = Ax + b$ che sposti il piano π in π'.

Compito di Geometria e algebra lineare del 16 luglio 2018

Istruzioni: I fogli per svolgere gli esercizi vi saranno forniti. Consegnate solo la bella e il foglio con gli esercizi e motivate sempre le vostre risposte. Sarà valutata anche l'esposizione e non saranno corretti esercizi illeggibili. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrici, cellulari, pena l'annullamento del compito. Avete a disposizione 3 ore di tempo.

Esercizio 1. Considera $\mathbb{R}^3$ dotato dell'usuale prodotto scalare euclideo. Dimostra che una isometria vettoriale di $\mathbb{R}^3$ avente determinante 1 è necessariamente una rotazione intorno ad un asse.

Esercizio 2. Determina una matrice A di taglia 3×3 tale che l'endomorfismo $L_A \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $L_A(x) = Ax$ soddisfi le proprietà seguenti:

- $ImL_A \cap \ker L_A = \operatorname{Span}(e_1 - e_2)$,
- A non è nilpotente.

Esercizio 3. Considera su $\mathbb{R}^3$ il prodotto scalare $g_\lambda(x,y) = {}^t\!xA_\lambda y$ dove A_λ è la matrice

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dipendente da un parametro $\lambda \in \mathbb{R}$. Considera l'endomorfismo $L_{B_{\lambda,a}} \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $L_{B_{\lambda,a}}(x) = B_{\lambda,a}x$, dove $B_{\lambda,a}$ è una matrice che dipende da due parametri $a, \lambda \in \mathbb{R}$ nel modo seguente:

$$B_{\lambda,a} = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ \lambda^2 & 2 & \lambda+1 \\ \lambda^2 & \lambda+1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Dimostra che se $\lambda \neq 0$ allora $L_{B_{\lambda,a}}$ è autoaggiunto rispetto a g_λ per ogni a.
(2) Dimostra che se $\lambda \neq 0$ allora $L_{B_{\lambda,a}}$ è diagonalizzabile per ogni a.

Esercizio 4. Sia V lo spazio vettoriale formato dai polinomi a coefficienti reali di grado $\leqslant 3$. Considera il prodotto scalare

$$g(p,q) = p(1)q(-1) + p(-1)q(1).$$

(1) Determina una base del radicale di g.
(2) Determina la segnatura di g.
(3) Costruisci una base ortogonale che contenga il vettore $x^2 + 1$.

Compito di Geometria e algebra lineare del 10 settembre 2018

Istruzioni: I fogli per svolgere gli esercizi vi saranno forniti. Mettete il vostro nome su tutti i fogli. Consegnate sia la bella che la brutta che il foglio con gli esercizi e motivate sempre le vostre risposte. Se un foglio che consegnate non volete che sia corretto scriveteci "brutta" in cima. Sarà valutata anche l'esposizione e non saranno corretti esercizi illeggibili. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrici, cellulari, pena l'annullamento del compito. Avete 3 ore di tempo a disposizione.

Esercizio 1.

a) Siano U, V, W tre sottospazi di uno spazio vettoriale E. Cosa vuol dire che U, V, W sono in somma diretta?
b) In generale è vero che se U, V, W sono sottospazi di uno spazio vettoriale E allora $(U + V) \cap W = U \cap W + V \cap W$? Motivare la risposta.

Esercizio 2. Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 4. Sia $F : V \longrightarrow V$ l'applicazione lineare definita da

$$F(p(t)) = p''(t^2 - 1)$$

dove p'' indica la derivata seconda. [$p''(t^2 - 1)$ non indica la moltiplicazione tra p'' e $(t^2 - 1)$ ma il polinomio p'' valutato in $t^2 - 1$)].

a) Si determini la forma di Jordan di F.
b) Si determini un sottospazio W di V di dimensione 3 tale che $F(W) \subset W$ e $F|_W : W \longrightarrow W$ si diagonalizzi.

Esercizio 3. Sia θ l'angolo compreso tra $\pi/2$ e π radianti il cui coseno è uguale a $-5/7$. Sia r la retta passante per i punti $P = (0, 3, 1)$ e $Q = (1, 1, 2)$. Sia $f(x) = Ax + b$ una rotazione di $\mathbb{R}^3$ di angolo θ attorno alla retta r.

a) Si descriva chiaramente che procedimento si intende utilizzare per calcolare A e b senza effettuare i conti. È importante che la spiegazione sia chiara. (2 punti)
b) Si determinino A e b. È importante che il risultato sia di A che di b sia corretto. (6 punti, la determinazione della sola matrice A vale 1 punto, e della sola b zero)

Esercizio 4. Sia $E = \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici 2×2 a coefficienti reali e sia U il sottospazio di E delle matrici della forma

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

con $a, b \in \mathbb{R}$. Sia

$$S = \begin{pmatrix} c & d \\ d & e \end{pmatrix}$$

una matrice simmetrica e sia g_S il prodotto scalare su E definito da

$$g_S(X, Y) = Tr(X^t\, S\, Y).$$

a) Si determini la segnatura di g_S se $c = d = e = 1$;
b) Si scelga S in modo che g_S abbia segnatura $(2, 2, 0)$ e U sia un sottospazio isotropo (ovvero g_S ristretto a $U \times U$ è zero).

c) Sia $W = \{(c, d, e) \in \mathbb{R}^3 \,:\, g_S$ ristretto a U sia zero$\}$. Si dimostri che W è un sottospazio vettoriale e se ne calcoli la dimensione.

Esercizio 1. a) Sia $g(\cdot,\cdot)$ un prodotto scalare dello spazio vettoriale V. Una isometria lineare rispetto a g è una applicazione lineare $F : V \longrightarrow V$ tale che

$$g(F(u), F(v)) = g(u, v)$$

per ogni $u, v \in V$.

b) Sia F una isometria lineare di $\mathbb{R}^3$ rispetto al prodotto scalare standard. Sia $F(v) = \lambda\, v$ con $\lambda \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}^3$ e $v \neq 0$. Allora

$$\|v\|^2 = \|F(v)\|^2 = \|\lambda\, v\|^2 = \lambda^2 \|v\|^2.$$

Poiché $\|v\| \neq 0$ ricaviamo $\lambda^2 = 1$ ovvero $\lambda = \pm 1$.

c) una antirotazione di un angolo diverso da 0 e π rispetto ad un asse passante per l'origine ha questa proprietà. Per esempio l'antirotazione associata alla matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2. I vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sono una base di W e le matrici

$$E_{11}; \qquad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad E_{22}$$

sono una base di S e la matrice associata a F rispetto a queste basi è

$$[F]^{v_1,v_2}_{E_{11},E,E_{22}} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 0 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Scriviamo prima la matrice associata a G rispetto alla base v_1, v_2, e_1 per $\mathbb{R}^3$ e alla base standard per $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Abbiamo

$$[G]^{v_1,v_2,e_1}_{E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$[G]^{e_1,e_2,e_3}_{E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}} = [G]^{v_1,v_2,e_1}_{E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}} \cdot [\,]^{e_1,e_2,e_3}_{v_1,v_2,e_1}.$$

Calcoliamo la matrice di cambiamento di base

$$[\,]^{e_1,e_2,e_3}_{v_1,v_2,e_1} = \left([\,]^{v_1,v_2,e_1}_{e_1,e_2,e_3}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$[G]^{e_1,e_2,e_3}_{E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3. a) Per capire di che tipo di isometria lineare si tratta calcoliamo l'insieme dei punti fissati fa F ovvero risolviamo il sistema $A\cdot x = x$. Otteniamo il sistema $B \cdot x = 0$ associato alla matrice

$$B = A - \mathsf{I} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -13 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -13 \end{pmatrix}$$

Se sommo alla prima riga 5 volte la seconda riga ottengo l'opposto della prima riga, quindi la terza equazione si ottiene dalle prime due. Quindi il sistema è equivalente al sistema

$$\begin{cases} -13x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}.$$

Ricavo x_2 dalla seconda equazione e sostituisco nella prima equazione trovando $x_1 = x_3$ e $x_2 = 5x_3$. In particolare l'insieme dei punti fissi è la retta r generata da $(1, 5, 1)$. Quindi l'isometria è una rotazione di asse r. NOTA BENE: il sistema lineare si puo‘ risolvere in moltissimi modi diversi e vanno tutti bene. Quello che non va bene e‘ scrivere la soluzione senza giustificazioni.

b) Essendo che la parte lineare di F_b è una rotazione, F_b è una rotazione se e solo se ha almeno un punto fisso ovvero se e solo se l'equazione $F_b(v) = v$ ha soluzione. Equivalentemente se ha soluzione l'equazione

$$(-F)(v) = b$$

che è come dire che $b \in Im(-F)$. Essendo F una rotazione diversa dall'identità l'immagine di $-F$ è il piano ortogonale all'asse di rotazione r. Quindi F_b ha un punto fisso se e solo se b appartiene al piano ortogonale a r passante per l'origine ovvero, visto che $(1, 5, 1)$ genera r, al piano di equazione $x_1 + 5\,x_2 + x_3 = 0$.

c) La rotazione F sarà la composizione di due riflessioni che contengono la retta r la prima di queste due riflessioni si può scegliere a piacere. Sia π il piano $x_1 - x_3 = 0$. Se u è il vettore $(1, 0, -1)$, la riflessione R rispetto al piano π si può escrivere mediante l'equazione

$$R(v) = v - 2\frac{u \cdot v}{\|u\|^2}u.$$

Ed è quindi uguale a $R(x, y, z) = (z, y, x)$. Si noti infine che la composizione $S = RF$ è una isometria di determinante -1 che lascia la retta r fissa e quindi è sicuramente una riflessione. Infine osservando che $R^2 =$ ricaviamo

$$F = RS.$$

Esercizio 4. a) Calcoliamo la matrice associata a g rispetto alla base standard. Le entrate della matrice sono i prodotti $g(t^i, t^j)$ per $i, j = 0, 1, 2$, otteniamo quindi

$$[g]_{1,t,t^2} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Se calcoliamo i determinanti delle sottomatrici matrici 1×1, 2×2 in alto a sinistra e di tutta la matrice otteniamo

$$2, 1, -9.$$

Quindi la segnatura è $(2, 1, 0)$.

b) In una qualche base f_1, f_2, f_3 il prodotto scalare si scriverà nella forma

$$[g]_{f_1,f_2,f_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

In particolare la retta generata da $f_1 - f_3$ è isotropa. Se vogliamo essere più espliciti (l'esercizio non lo chiedeva) per esempio la retta generata dal polinomio $t^2 - 1$ è isotropa.

c) Non esiste un piano isotropo. Infatti supponiamo sia W un piano allora $W^\perp$ ha dimensione 1 e quindi non può essere che $g(u, v) = 0$ per ogni $u, v \in W$.

Esercizio 1. a) Sia V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale. Un prodotto scalare su V è una mappa $g : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ che gode delle seguenti proprietà:

- $g(u,v) = g(v,u)$ per ogni $u,v \in V$;
- $g(u+v,w) = g(u,w) + g(v,w)$ per ogni $u,v,w \in V$;
- $g(\lambda\, u, v) = \lambda\, g(u,v)$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ e per ogni $u,v \in V$.

b) Si esiste. Infatti esiste una base ortogonale u_1,u_2,u_3 tale che $g(u_1,u_1) = 1$ e $g(u_2,u_2) = g(u_3,u_3) = -1$. Allora g ristretta alla retta generata da $v = u_1 + u_2$ è nulla.

c) Si esiste. Infatti esiste una base ortogonale u_1,u_2,u_3 tale che $g(u_1,u_1) = 1$ e $g(u_2,u_2) = -1$ e $g(u_3,u_3) = 0$. Allora g ristretta al piano generato da $v = u_1 + u_2$ e da u_3 è nulla.

Esercizio 2. a) Se A è diagonale, ovvero se $b = c = 0$ otteniamo che

$$[C_A]^{E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}}_{E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e quindi è diagonalizzabile. Se A è diagonalizzabile allora esiste G invertibile e D diagonale tale che $A = G \cdot D \cdot G^{-1}$. Osserviamo che

$$C_A(X) = GDG^{-1}X - XGDG^{-1} = G \cdot (DG^{-1}XG - G^{-1}XGD) \cdot G^{-1}$$

Consideriamo quindi la trasformazione $T_G(X) = GXG^{-1}$ e osserviamo che $T_G^{-1}(X) = G^{-1}XG$. Dalla formula precedente ricaviamo

$$C_A = T_G \circ C_D \circ T_G^{-1}$$

In particolare C_A e C_D sono simili e essendo C_D diagonalizzabile lo è anche C_A.

In particolare se il polinomio caratteristico di A è uguale a $t^2 - 1$ allora A è diagonalizzabile con autovalori $1, -1$ quindi C_A è diagonalizzabile con autovalori $2, -2$ con molteplicità 1 e 0 con molteplicità 2. [Si poteva anche in modi diversi da questo calcolando che il polinomio caratteristico è $t^2(t^2-1)$.]

b) Se scriviamo la matrice associata a C_A rispetto alla base standard di E otteniamo:

$$[C_A]^{E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}}_{E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il rango di questa matrice è due e il polinomio caratteristico è t^4, quindi l'unico autovalore è zero e la forma di Jordan avrà due blocchi: di dimensione 1 e 3 o di dimensione 2 e 2. Per discrimanare il caso nel quale ci troviamo calcoliamo il rango di C_A^2 che nel primo caso sarebbe 1 e nel secondo 0.

$$[C_A^2]^{E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}}_{E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

dal quale deduciamo che il rango di C_A^2 è uno. Quindi la forma di Jordan sarà del tipo

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3. a) a) Sia u il vettore $(1, 3, -1)$. Allora

$$P_U(v) = v - \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|^2}u.$$

Quindi la matrice associata a P_U rispetto alla base standard è

$$A = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 10 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 10 \end{pmatrix}$$

b) Sia r la retta per v ortogonale a W e sia v' l'intersezione di questa retta con W, ovvero la proiezione ortogonale di v su W. Allora

Sia v' è il punto di W più vicino a v. Infatti se u è un altro punto di W allora per il teorema di Pitagora

$$\|v - u\| = \sqrt{\|v - v'\|^2 + \|v' - u\|^2} \geqslant \|v - v'\|$$

e l'uguaglianza vale solo per $u = v'$.

Quindi se u_0 è un qualsiasi punto di W, per esempio $u_0 = (1, 0, 0)$ allora $v' - u_0$ è la proiezione ortogonale di $v - u_0$ su $W - u_0 = U$. Quindi $v' - u_0 = P_U(v - u_0)$ ovvero

$$v' = P_U(v - u_0) + u_0 = A \cdot \begin{pmatrix} x - 1 & y & z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 4. a) La matrice associata a g_a rispetto alla base standard è la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ a & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 16/3 \end{pmatrix}$$

e i determinanti delle sottomatrici quadrate, 1×1, 2×2, 3×3 e di tutta la matrice sono uguali a

$$1, 3, 3(a - a^2), -16(a^2 - a + 3/16).$$

Il prodotto scalare è definito positivo se tutti questi determinanti sono positivi, ovvero se $1/4 < a < 3/4$.

b) Una base del sottospazio in questione è data dai vettori $u = (1, -1, 0)$ e $(0, -1, 1)$ e la matrice associata alla restrizione di g_a a W rispetto a questa base è la matrice

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 + a \\ 3 + a & 3 + a \end{pmatrix}$$

che per $a = 1$ o $a = -3$ è degenere.

Soluzioni del compito del 14 febbraio 2018

Esercizio 1. a) Sia $F : V \longrightarrow W$ una applicazione lineare, allora $N(F) = \{v \in V \ : \ F(v) = 0\}$.

b) Siano $u, v \in V$ tali che $F(u) = F(v)$ allora per linearità $F(u - v) = 0$ e poiché per ipotesi $N(F) = 0$ di deve avere $u - v = 0$ ovvero $u = v$.

c) Se T è iniettiva allora $\dim Im(T) = 3$. Da $ST = 0$ ricaviamo che $N(S) \supset Im(T)$. Quindi $\dim N(S) \geqslant 3$. Quindi per il teorema della dimensione $\dim ImS = 4 - \dim N(S) \leqslant 1$. Quindi non è possibile che la dimensione dell'immagine di S sia 2.

Esercizio 2. a) La matrice A ha polinomio caratteristico $t^2 - t - 2 = (t - 2)(t + 1)$. $u = (1, 1)$ è un autovettore di autovalore -1 e $v = (3, 2)$ è un autovettore di autovalore 2. Quindi

$$B = [L_A]^{u,v}_{u,v} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = []^{u,v}_{e_1,e_2} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C^{-1} = []^{e_1,e_2}_{u,v} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

e $A = CBC^{-1}$ da cui

$$A^{101} = C \cdot B^{101} \cdot C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1)^{101} & 0 \\ 0 & 2^{101} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 3 \cdot 2^{101} & -3 - 3 \cdot 2^{101} \\ 2 + 2^{102} & -3 - 2^{102} \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3. a) Osserviamo che le equazioni che definiscono la retta s sono equivalenti a $x = -1$ e $y + z = 1$. Sia s' la retta passante per l'origine parallela a s. Quindi s' è la retta definita dalle equazioni $x = y + z = 0$. Quindi se $u_1 = (1, 1, 0)$, $v_0 = (-1, 1, 0)$ e $v_1 = (0, 1, -1)$ allora

$$s = \mathbb{R}v_1 + v_0 \quad \text{e} \quad s' = \mathbb{R}v_1 \quad \text{e} \quad r = \mathbb{R}u_1$$

Consideriamo una trasformazione ortogonale che porta u_1 in v_1. Per esempio le trasformazioni ortogonali associate alle matrici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La prima ha determinante 1 ed è quindi una rotazione e la seconda ha determinante -1 e fissa almeno una retta e quindi è una riflessione. Quindi se $w \in s$ (per esempio $w = v_0$) allora tutte le trasformazioni della forma

$$f(v) = A \cdot v + w \qquad \text{o} \qquad f(v) = B \cdot v + w$$

portano r in s.

b) Consideriamo una trasformazione della forma $f(v) = A \cdot v + w$ con $w \in s$ allora f ha un punto fisso se e solo se l'equazione

$$(A - \mathsf{I}) \cdot v = w$$

ha soluzione. Se $v = (x, y, z)$ e $w = v_0 + t\, v_1$ otteniamo il sistema

$$\begin{cases} -x + z = -1 \\ 0 = 1 + t \\ -x - z = -t \end{cases}$$

quindi per $t = -1$ ha un punto fisso e per $t \neq -1$ non ha punti fissi.

c) Una tale riflessione non esiste. Infatti sia π un piano e R la riflessione associata e supponiamo che $R(r) = s$. Allora se fosse $\pi \cap r \neq \varnothing$ allora $r \cap \pi$ sarebbe contenuto in s e quindi r e s si intersecherebbero. Ma r e s non si intersecano. Se invece $r \cap \pi = \varnothing$ allora r e π sono paralleli e quindi $R(r)$ è parallelo ad r. Ma r ed s non sono paralleli e quindi una tale trasformazione non esiste.

Esercizio 4. La matrice associata a g_a rispetto alla base standard è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a-1 \\ 0 & a-1 & 0 \\ a-1 & 0 & a \end{pmatrix}$$

a) per $a = 0$ otteniamo che i tre determinanti delle sottomatrici 1×1 e 2×2 in alto a sinistra e di tutta la matrice sono uguali a $1, -1, 1$. Quindi la segnatura è $(1, 2, 0)$. In una questo caso esiste sempre una base di vettori isotropi, per esempio nel nostro caso e_3, $e_1 + e_2$ $e_1 + e_3/2$ è una base fatta di vettori isotropi.

b) per $a = 1$ la matrice associata ha già forma diagonale e possiamo subito calcolare la segnatura che risulta uguale a $(2, 0, 1)$. In questo caso c'è una unica retta di vettori isotropi che nel nostro caso è la retta $\mathbb{R}e_2$. Quindi non esiste una base di vettori isotropi.

c) non esiste infatti conserverebbe il prodotto scalare ma $g_2(e_1, e_1) = 1$ mentre $g_2(e_3, e_3) = 2$.

Soluzioni del compitino del 26 febbraio 2018, prima parte versione AAA

Domanda 1. 1/2.

Domanda 2. 5.

Domanda 3. 5/2.

Domanda 4. $3x + 2y + z = 0$.

Domanda 5. $\dim U = 1$.

Esercizio 1. a) n vettori $v_1, \dots, v_n$ si dicono linearmente indipendenti se una loro combinazione lineare nulla ha tutti i coefficienti nulli. Ovvero se $a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = 0$ implica $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$.

b) Prendiamo $V = \mathbb{R}^2$ e $u = e_1, v = e_2, w = e_1 + e_2$.

c) Poiché u, v, w sono linearmente dipendenti esistono dei numeri a, b, c non tutti nulli tali che $au + bv + cw = 0$. Se fosse $c = 0$ ricaveremmo $au + bv = 0$ e poiché u e v sono linearmente indipendenti dedurremmo $a = b = 0$ contro l'ipotesi che a, b, c non sono tutti e tre nulli. Quindi possiamo assumere $c \neq 0$. Possiamo quindi dividere per c e ricavare

$$w = -\frac{a}{c}u - \frac{b}{c}v.$$

Quindi $w \in \langle u, v \rangle$.

Esercizio 2. a) U è generato da due vettori linearmente indipendenti quindi ha dimensione 2. Se riduciamo la terza equazione sparisce perché è tre volte la prima più due volte la seconda. Quindi V è definito dalle equazioni:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 4\,x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

che è già a scalini, quindi ha due variabili libere e due variabili dipendenti, in particolare le soluzioni del sistema hanno dimensione 2. Quindi anche V ha dimensione 2.

b) Dalla formula di Grassmann abbiamo che

$$\dim(U + V) + \dim(U \cap V) = \dim U + \dim V = 4$$

quindi basta calcolare la dimensione della somma o dell'intersezione. In questo caso si poteva equivalentemente calcolare la somma o l'intersezione. Calcoliamo l'intersezione. L'intersezione è fatta dei vettori

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Che risolvono il sistema che definisce V. Sostituendo troviao che le equazioni che definiscono V si riducono entrambe a $a + b = 0$. Quindi l'intersezione è fatta dei vettori in cui $a = -b$ ovvero dei vettori della forma

$$a\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = a \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

In particolare ha dimensione 1. Quindi $\dim(U \cap V) = 1$ e $\dim(U + V) = 3$.

Esercizio 3. a) $f_1 = t - 1$ e $f_2 = t^2 - 1$ è una base di W e $D(f_1) = 1$, $D(f_2) = 2t$ quindi

$$[D]_{1,t,t^2}^{f_1,f_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Per studiare la diagonalizzabilità di F_a scriviamo la matrice associata a F_a scegliendo una stessa base in partenza e in arrivo. Vista la definizione di F_a ci conviene scegliere la base $f_1, f_2, 1$. Abbiamo $F_a(f_1) = 1$, $F_a(f_2) = 2t = 2f_1 + 2$ e $F_a(1) = af_1$. Quindi

$$[F_a]_{f_1,f_2,1}^{f_1,f_2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi il polinomio caratteristico di F_a è uguale a $\det(F_a - \lambda)$ e sviluppando si ottiene $\lambda(\lambda^2 - a)$. Per $a < 0$ il polinomio non ha tutte le radici reali e quindi F_a non è diagonalizzabile, per $a > 0$ ha tre radici distinte e quindi è diagonalizzabile, per $a = 0$ vediamo che 0 è un autovalore con molteplicità algebrica 3 mentre la molteplicità geometrica di 0 è uno, quindi non è diagonalizzabile.

Esercizio 4. a)Osserviamo che tutte le righe pari sono uguali tra loro e così pure le righe dispari, inoltre le prime due righe non sono una multipla dell'altra quindi la matrice ha rango 2 e determinante 0. La traccia inoltre è uguale alla somma degli elementi sulla diagonale ed e' quindi uguale a 1.

b) Osserviamo che $v = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$ ha le proprietà richieste.

c) Il polinomio caratteristico è della forma $-t^7 + a_1t^6 + a_2t^5 + \cdots + a_7$.

Osserviamo che poiché il rango della matrice è 2, la molteplicità geometrica di 0, ovvero la dimensione del nucleo, è 5, e la molteplicità algebrica di 0 è maggiore o uguale a 5. Quindi t^5 divide il polinomio caratteristico, ovvero $a_3 = a_4 = \cdots = a_7 = 0$. Il polinomio caratteristico ha quindi la forma $-t^7 + at^6 + bt^5 = 0$. Dal punto b sappiamo che 1 è un autovalore quindi $-1 + a + b = 0$. Inoltre $a = Tr(A) = 1$. Quindi ricaviamo che il polinomio caratteristico è

$$t^6(1 - t)$$

quindi 0 ha molteplicità algebrica 6 e 1 ha molteplicità algebrica 1. Inoltre abbiamo già osservato che 0 ha molteplicità geometrica 5 e quindi la matrice non è diagonalizzabile.

3. Soluzioni del compito del 4 giugno 2018

Esercizio 1.

(1) Visto a lezione.

(2) (a) Esistono, ad esempio $U = \mathrm{Span}(e_1, e_2, e_3), W = \mathrm{Span}(e_1, e_4, e_5)$.

(b) Non esistono. Per la formula di Grassmann, sappiamo che $\dim(U+W) \leqslant 5$ e quindi

$$\dim U \cap V = \dim U + \dim W - \dim(U + W) = 3 + 3 - \dim(U + W) \geqslant 3 + 3 - 5 = 1.$$

Esercizio 2.

(1) Notiamo che $\ker A = \{x - y + z = 0\}$ ha dimensione 2. Se $AB = 0$, allora l'immagine di B è contenuta in $\ker A$, quindi ha dimensione $\leqslant 2$. Qundi B ha rango $\leqslant 2$ e non è invertibile. Quindi $\dim\ker B \geqslant 3 - 2 = 1$ e allora 0 è autovalore per B.

(2) L'ipotesi $AB = 0$ equivale a chiedere che B sia del tipo

$$B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a+d & b+e & c+f \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

dove a, b, c, d, e, f sono arbitrari. Fra queste matrici è facile trovarne una non nulla per cui $B^2 = 0$, ad esempio

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Un metodo alternativo consiste nel prendere una matrice nilpotente di indice due e cambiarla per similitudine in modo che la sua immagine sia contenuta in $\ker A$.

Esercizio 3. Il piano π_2 in forma cartesiana è $x - y + 3 = 0$. I due piani si intersecano nella retta $x = -1, y = 2$. Una isometria come richiesto con $\det A = 1$ è una qualsiasi rototraslazione con angolo $\frac{\pi}{2}$ e asse r, una con $\det A = -1$ è una qualsiasi glissoriflessione ottenuta riflettendo lungo il piano $y = 2$ e quindi traslando lungo r. Ad esempio:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$g\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\4\\1\end{pmatrix},$$

Esercizio 4. Il polinomio caratteristico ha radici 1 e -1 entrambe con molteplicità due, quindi la segnatura è $(2, 2, 0)$. Quindi esiste un piano W su cui la restrizione è definita positiva: per trovarlo cerchiamo due vettori v_1, v_2 che siano ortogonali e con $g(v_1, v_1) > 0, g(v_2, v_2) > 0$. Ad esempio:

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}.$$

Non esiste un sottospazio W di dimensione tre su cui $g|_W$ sia nullo. Se esistesse, per Grassmann W intersecherebbe il piano definito positivo trovato nel punto precedente in almeno una retta. Quindi esiste un vettore $v \neq 0$ nell'intersezione fra i due che è simultaneamente positivo (cioè $g(v, v) > 0$) e nullo (cioè $g(v, v) = 0$), assurdo.

4. Soluzioni del compito del 25 giugno 2018

Esercizio 1.

(1) Svolto a lezione.
(2) È vero. Se $v_1, \ldots, v_n$ è una base di autovettori per f, è anche una base di autovettori per f^2. Infatti se $f(v_i) = \lambda_i(v_i)$ allora $f^2(v_i) = \lambda_i^2(v_i)$.

Esercizio 2. Il polinomio caratteristico è $(\lambda - 3)^2(\lambda + 1)^2$. Le molteplicità geometriche di entrambi gli autovalori -1 e 3 sono 1. Quiindi A non è diagonalizzabile. La forma di Jordan è necessariamente

$$J = \begin{pmatrix}3&1&0&0\\0&3&0&0\\0&0&-1&1\\0&0&0&-1\end{pmatrix}.$$

Quindi il polinomio minimo è anch'esso $(\lambda-3)^2(\lambda+1)^2$. La matrice seguente soddisfa le richieste dell'ultimo punto:

$$B = \begin{pmatrix}3&0&0&0\\0&3&0&0\\0&0&-1&1\\0&0&0&-1\end{pmatrix}.$$

Esercizio 3. Il radicale è $\ker S$, ed ha dimensione $4-2 = 2$ perché S ha rango 2. Concretamente:

$$\ker S = \{x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0, \quad x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0\}.$$

La restrizione $g|_W$ nella base $\{e_1, e_2\}$ è rappresentata dalla matrice

$$\begin{pmatrix}1&2\\2&12\end{pmatrix}.$$

Questa ha segnatura $(2, 0, 0)$. Per quanto riguarda g, la sua segnatura è $(i_+, i_-, 2)$ e poiché $g|_W$ è definito positivo abbiamo $i_+ \geqslant 2$. Quindi la segnatura di g è $(2, 0, 2)$.

Esercizio 4. La retta r è ad altezza -1 e quindi la distanza da π è chiaramente 2. Per trovare π' basta aggiungere una direzione verticale a r e quindi

$$\pi' = \left\{ \begin{pmatrix} 2+t \\ t \\ -1+u \end{pmatrix} \;\middle|\; t, u \in \mathbb{R} \right\}.$$

Come equazione cartesiana troviamo

$$\pi' = \{x - y = 2\}.$$

Per mandare π in π' cerchiamo innanzitutto un'isometria che mandi il vettore $(0,0,1)$ ortogonale a π nel vettore $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ ortogonale a π'. Ad esempio prendiamo la matrice ortogonale

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'isometria cercata è $f(x) = Ax + b$ per un opportuno $b \in \mathbb{R}^3$. Una isometria di questo tipo manda π in un piano parallelo a π', e per assicurarmi che lo mandi proprio in π' impongo ad esempio che $f(0,0,1) = (2,0,0)$, visto che $(0,0,1) \in \pi$ e $(2,0,0) \in \pi'$. In questo modo ottengo

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} . + \begin{pmatrix} 2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Soluzioni compito del 16 luglio 2018

Esercizio 1. Fatto a lezione.

Esercizio 2. Sappiamo che ImL_A e $\ker L_A$ sono due sottospazi di $\mathbb{R}^3$ che si intersecano in una retta, e per il teorema della dimensione la somma delle loro dimensioni è 3. Quindi uno dei due spazi è una retta e l'altro è un piano che la contiene.

Se ImL_A è una retta e $\ker L_A$ un piano che la contiene, dall'inclusione $ImL_A \subset \ker L_A$ deduciamo facilmente che $A^2 = 0$ e quindi L_A è nilpotente. Quindi questa strada non va bene.

Cerchiamo allora un esempio in cui $\ker L_A$ è la retta $\mathrm{Span}(e_1 - e_2)$ e ImL_A è un piano che la contiene. Ad esempio questa matrice funziona:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Questa matrice non è nilpotente perché ha autovalore 1.

Esercizio 3. Per mostrare che $B_{\lambda,a}$ è autoaggiunto dobbiamo verificare che

$${}^t(B_{\lambda,a}x)A_\lambda y = {}^t x A_\lambda B_{\lambda,a} y$$

per ogni $x, y \in \mathbb{R}^3$. Riscriviamo l'equazione nel modo seguente:

$${}^t x\, {}^t B_{\lambda,a} A_\lambda y = {}^t x A_\lambda B_{\lambda,a} y.$$

Questa equazione è verificata per ogni x, y perché

$${}^t B_{\lambda,a} A_\lambda = A_\lambda B_{\lambda,a}.$$

Questa uguaglianza si dimostra facilmente svolgendo i due prodotti fra matrici. Per il teorema spettrale, un operatore autoaggiunto è sempre diagonalizzabile se il prodotto scalare è definito positivo. Il prodotto g_λ è definito positivo perché $\lambda \neq 0$. Questo conclude i punti (1) e (2).

Esercizio 4. La matrice associata rispetto alla base canonica $\{1, x, x^2, x^3\}$ è

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

La matrice ha rango due e quindi il radicale ha dimensione 2 ed è generato da

$$1 - x^2, \quad x - x^3.$$

Per calcolare la segnatura è sufficiente notare che esistono sia elementi positivi che negativi della base canonica, quindi $i_+ \geqslant 1$ e $i_- \geqslant 1$ e deduciamo che la segnatura può essere solo $(1, 1, 2)$.

Il vettore $x^2 + 1$ non è nel radicale. Per costruire una base ortogonale che contenga $x^2 + 1$ è sufficiente trovare un altro vettore che sia ortogonale a $x^2 + 1$ ma che non sia nel radicale, ad esempio $x^3 + x$. I vettori

$$1 - x^2, \quad x - x^3, \quad x^2 + 1, \quad x^3 + x$$

formano una base ortogonale.

Soluzioni del compito del 10 settembre

Esercizio 1. a) U, V, W sono in somma diretta se $u + v + w = 0$ con $u \in U$, $v \in V$ e $w \in W$ implica $u = v = w = 0$.

b) In generale non è vero. Prendiamo $E = \mathbb{R}^2$, $U = \mathbb{R}e_1$, $V = \mathbb{R}e_2$ e $W = \mathbb{R}(e_1 + e_2)$. In questo caso $(U + V) \cap W = W$ e $U \cap W + V \cap W = 0$.

Esercizio 2. a) Sia $A = [F]^{1,t,t^2,t^3,t^4}_{1,t,t^2.t^3,t^4}$ la matrice associata ad F rispetto alla base standard di V. Otteniamo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -6 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

Il polinomio caratteristico è quindi uguale a $t^4(12 - t)$. La molteplicità algebrica di 0 è 4 la matrice ha rango 3 quindi 0 ha molteplicità geometrica uguale a 2. Da queste informazioni ricaviamo che la forma di Jordan è una delle due seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} \textit{ oppure } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

Nel primo caso il rango di A^2 è 2 e nel secondo è 1 Per distinguere quale sia quella giusta calcoliamo quindi A^2 ottenendo:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 12 & 96 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -288 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 144 \end{pmatrix}$$

che ha rango 2 quindi la forma di Jordan giusta è

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}.$$

b) Se W ha una base di autovettori, questi saranno, in particolare degli elementi di V che sono autovettori di F. In particolare gli autovalori possibili sono 0 che ha molteplicià geometrica 2 e 12 che ha molteplicità algebrica (e quindi geometrica) 1. Gli autovettori di autovalore zero sono gli elementi non nulli del nucleo e quindi una loro base è data da e_1 ed e_2. Per trovare un autovettore di autovalore 12 dobbiamo risolvere $F(p) = 12p$, ovvero $(F - 12id)(p)$.

$$\begin{pmatrix} -12 & 0 & 2 & -6 & 12 \\ 0 & -12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & 6 & -24 \\ 0 & 0 & 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ v \end{pmatrix}$$

da cui $u = y = 0$ e

$$-12x + 2z + 12v = 0 \qquad z + 2v = 0.$$

Per esempio $v = 1$, $z = -2$, $x = 2/3$. Quindi lo spazio generato da $1, t$ e $t^4 - 2t^2 + \frac{2}{3}$ ha le proprietà richieste.

Esercizio 3. a) Calcolo la matrice associata ad una rotazione g di angolo θ attorno alla retta r_0 parallela a r e passante per l'origine. Per calcolare tale matrice determino una base ortonormale u_1, u_2, u_3 nella quale il primo vettore genera la retta r_0. In questa base la matrice associata alla rotazione sarà uguale a

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5/7 & -2\sqrt{6}/7 \\ 0 & 2\sqrt{6}/7 & -5/7 \end{pmatrix}.$$

Determino poi la matrice associata alla rotazione nella base standard effettuando il cambiamento di base. La rotazione f si può infine ottenere come

$$f = \tau^{-1} \circ g \circ \tau$$

dove τ è una traslazione che porta r in r_0, per esempio $\tau(v) = v - P$ e quindi $\tau^{-1}(v) = v + P$.

b) La retta r_0 è la retta $\mathbb{R}u$ con $u = Q - P = (1, -2, 1)$. Posso quindi scegliere $u_1 = u/\sqrt{6}$. I vettori (x, y, z) ortogonali a u sono i vettori che verificano $x - 2y + z = 0$, per esempio $v = (1, 1, 1)$ e posso quindi scegliere $u_2 = v/\sqrt{3}$. I vettori ortogonali a u e a v sono i vettori che verificano $x - 2y + z = 0$ e $x + y + z = 0$ ovvero $x + z = y = 0$ per esempio $w = (1, 0, -1)$. Posso quindi scegliere $u_3 = w/\text{`}sqrt2$. Avremo quindi $[g]^{u_1,u_2,u_3}_{u_1,u_2,u_3} = B$. Ricaviamo

$$A = [g]^{e_1,e_2,e_3}_{e_1,e_2,e_3} = [Id]^{u_1,u_2,u_3}_{e_1,e_2,e_3} \cdot [g]^{u_1,u_2,u_3}_{u_1,u_2,u_3} \cdot [Id]^{e_1,e_2,e_3}_{u_1,u_2,u_3}.$$

Dal calcolo di u_1, u_2, u_3 ricaviamo

$$[Id]^{u_1,u_2,u_3}_{e_1,e_2,e_3} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} \\ -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Poiché la base è ortonormale ricaviamo anche $[Id]^{e_1,e_2,e_3}_{u_1,u_2,u_3} = \left([Id]^{u_1,u_2,u_3}_{e_1,e_2,e_3} \right)^t$ e moltiplicando le matrici otteniamo

$$A = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -3 & -2 & 6 \\ -6 & 3 & -2 \\ -2 & -6 & -3 \end{pmatrix}.$$

Si noti che le rotazioni attorno alla retta r di angolo θ sono 2, l'altramatrice possibile era la trasposta di questa. Infine per calcolare b procediamo come abbiamo detto sopra

$$f(v) = g(v - P) + P = A \cdot v + P - A \cdot P$$

da cui

$$b = P - A \cdot P = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 4.

$$g_S\Big(\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' & y' \\ z' & w' \end{pmatrix}\Big) = cxx' + cyy' + ezz' + eww' + dxz' + dx'z + dyw' + dwy'$$

In particolare la matrice associata a g_S rispetto alla base standard di E è la matrice

$$\begin{pmatrix} c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \\ d & 0 & e & 0 \\ 0 & d & 0 & e \end{pmatrix}.$$

a) Per $c = d = 1$ la matrice associata ha rango 2 quindi anche $i_0 = 4 - 2 = 2$. Inoltre la forma ristretta al sottospazio generato dai primi due vettori della base è chiaramente definita positiva quindi $i_+ \geqslant 2$. La segnatura è quindi $(2, 0, 2)$.

b e c) Determiniamo per quali S la forma g_S ristretta a UxU sia zero. Questo sappiamo essere equivalente a richiedere $g_S(u, u) = 0$ per ogni $u \in U$. Sviluppando $g_S(u, u)$ per

$$u = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

otteniamo

$$\begin{aligned} g_S(u, u) &= ca^2 + cb^2 + eb^2 + ea^2 + dxz' + dx'z + dyw' + dwy' = \\ &= c(a^2 + b^2) + e(a^2 + b^2) + d(-2ab + 2ab) = (c + e)(a^2 + b^2) \end{aligned}$$

Quindi g_S è zero su U se e solo se $c = -e$. In particolare W è un sottospazio vettoriale di dimensione 2 di $\mathbb{R}^3$ (punto c)

Se scegliamo $d = 0$ e $c = 1$ e $e = -1$ vediamo che la matrice associata a g_S è diagonale e la segnatura risulta essere uguale a $(2, 2, 0)$ come richiesto (punto b).