## 7. Compitino del 10 febbraio 2024: prima parte

Avete 40 minuti di tempo a disposizione. Non si possono usare appunti, libri, calcolatrice, smartphone o smartwatch, pena l'annullamento del compito.

Dovete consegnare questo foglio scrivendo solo la risposta nei riquadri senza nessuna spiegazione.

Prima di consegnare scrivetevi le risposte su un foglio.

**Domanda 1.** Calcolare la proiezione $R$ del punto $P = (1, 0, 1)$ sulla retta passante per l'origine e per il punto $Q = (1, 1, 1)$.

| |
|---|
| $R =$ |

**Domanda 2.** Decrivere una base del sottospazio di $\mathbb{R}^3$ definito dalle equazioni

$$x + y + z = 0 \quad \text{e} \quad y + 2z = 0.$$

| |
|---|
| *Risposta:* |

**Domanda 3.** Sia $F : \mathbb{R}^7 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ un'applicazione lineare surgettiva. Sia $W$ un sottospazio di $\mathbb{R}^7$ tale che $\mathbb{R}^7$ è la somma diretta di $W$ e di $N(F)$, (cioè $W + N(F) = \mathbb{R}^7$ e i sottospazi $W$ e $N(F)$ sono in somma diretta). Calcolare la dimensione di $W$.

| |
|---|
| $\dim W =$ |

**Domanda 4.** Sia $V = \mathbb{R}[t]_{\leqslant 2}$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coeffienti reali di grado minore o uguale a 2 nella variabile $t$. Sia $F : V \longrightarrow V$ l'applicazione definita da

$$F(p(t)) = p(0)t + p(1)t^2$$

Calcolare la matrice associata ad $F$ rispetto alla base $1 + t, 1 + t^2, t^2$ in partenza e alla base $t + 2t^2, 1, 1 + t^2$ in arrivo.

| |
|---|
| $[F]^{1+t,1+t^2,t^2}_{t+2t^2,1,1+t^2} =$ |

**Domanda 5.** Calcolare gli autovalori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

| |
|---|
| *Gli autovalori della matrice sono:* |

## 8. Compitino del 10 febbraio 2024: prima parte

Avete 40 minuti di tempo a disposizione. Non si possono usare appunti, libri, calcolatrice, smartphone o smartwatch, pena l'annullamento del compito.

Dovete consegnare questo foglio scrivendo solo la risposta nei riquadri senza nessuna spiegazione.

Prima di consegnare scrivetevi le risposte su un foglio.

**Domanda 1.** Calcolare la proiezione $R$ del punto $P = (1, 1, 2)$ sulla retta passante per l'origine e per il punto $Q = (1, 0, 1)$.

$R =$

**Domanda 2.** Decrivere una base del sottospazio di $\mathbb{R}^3$ definito dalle equazioni

$$x + 2y + z = 0 \quad \text{e} \quad y + z = 0.$$

*Risposta:*

**Domanda 3.** Sia $F : \mathbb{R}^9 \longrightarrow \mathbb{R}^5$ un'applicazione lineare surgettiva. Sia $W$ un sottospazio di $\mathbb{R}^9$ tale che $\mathbb{R}^9$ è la somma diretta di $W$ e di $N(F)$, (cioè $W + N(F) = \mathbb{R}^9$ e i sottospazi $W$ e $N(F)$ sono in somma diretta). Calcolare la dimensione di $W$.

$\dim W =$

**Domanda 4.** Sia $V = \mathbb{R}[t]_{\leqslant 2}$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coeffienti reali di grado minore o uguale a 2 nella variabile $t$. Sia $F : V \longrightarrow V$ l'applicazione definita da

$$F(p(t)) = p(0)t + p(1)t^2$$

Calcolare la matrice associata ad $F$ rispetto alla base $2 + t, 2 + t^2, t^2$ in partenza e alla base $1, 2t + 3t^2, 1 + t^2$ in arrivo.

$[F]^{2+t,2+t^2,t^2}_{1,2t+3t^2,1+t^2} =$

**Domanda 5.** Calcolare gli autovalori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

*Gli autovalori della matrice sono:*

## 9. Compitino del 10 febbraio 2024: prima parte

Avete 40 minuti di tempo a disposizione. Non si possono usare appunti, libri, calcolatrice, smartphone o smartwatch, pena l'annullamento del compito.

Dovete consegnare questo foglio scrivendo solo la risposta nei riquadri senza nessuna spiegazione.

Prima di consegnare scrivetevi le risposte su un foglio.

**Domanda 1.** Calcolare la proiezione $R$ del punto $P = (1, 2, 3)$ sulla retta passante per l'origine e per il punto $Q = (0, 1, 1)$.

$R =$

**Domanda 2.** Decrivere una base del sottospazio di $\mathbb{R}^3$ definito dalle equazioni

$$x + 2y + 2z = 0 \quad \text{e} \quad y + 2z = 0.$$

*Risposta:*

**Domanda 3.** Sia $F : \mathbb{R}^8 \longrightarrow \mathbb{R}^7$ un'applicazione lineare surgettiva. Sia $W$ un sottospazio di $\mathbb{R}^8$ tale che $\mathbb{R}^8$ è la somma diretta di $W$ e di $N(F)$, (cioè $W + N(F) = \mathbb{R}^8$ e i sottospazi $W$ e $N(F)$ sono in somma diretta). Calcolare la dimensione di $W$.

$\dim W =$

**Domanda 4.** Sia $V = \mathbb{R}[t]_{\leqslant 2}$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coeffienti reali di grado minore o uguale a 2 nella variabile $t$. Sia $F : V \longrightarrow V$ l'applicazione definita da

$$F(p(t)) = p(0)t + p(1)t^2$$

Calcolare la matrice associata ad $F$ rispetto alla base $1+2t, t^2, 1+2t^2$, in partenza e alla base $1, 1+t^2, t+3t^2$ in arrivo.

$[F]^{1+2t,t^2,1+2t^2}_{t+2t^2,1,1+t^2} =$

**Domanda 5.** Calcolare gli autovalori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

*Gli autovalori della matrice sono:*

## 10. Compitino del 10 febbraio 2024: seconda parte

Avete 2 ore e 20 minuti di tempo a disposizione. Non si possono usare appunti, libri, calcolatrice, smartphone o smartwatch, pena l'annullamento del compito. Scrivere chiaramente e motivare le risposte. Non saranno corretti esercizi scritti in modo illeggibile.

**Esercizio 1.** Siano $U$ e $W$ due sottospazi vettoriali dello spazio vettoriale $V$ e siano $u_1, u_2, w_1, w_2 \in V$ quattro vettori distinti.

a) Come è definito $U + W$?
b) Dimostrare che se $u_1, u_2$ sono una base di $U$ e $w_1, w_2$ sono una base di $W$ allora $u_1, u_2, w_1, w_2$ sono generatori di $U + W$.
c) Fare un esempio in cui $u_1, u_2$ sono una base di $U$, $w_1, w_2$ sono una base di $W$ e $u_1, u_2, w_1, w_2$ non sono una base di $U + W$.

**Esercizio 2.** Sia $W$ il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Sia $U$ il nucleo di $L_A$ dove $A$ è la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

a) Trovare una base di $U \cap W$
b) Dare una descrizione cartesiana (ovvero tramite equazioni) di $U \cap W$.

**Esercizio 3.** Sia $V = \mathbb{C}[t]_{\leqslant 2}$ e sia $F : V \longrightarrow V$ l'applicazione

$$F(p(t)) = p'(t+1)$$

a) Dire se $F$ è diagonalizzabile.
b) Trovare una base $g_1, g_2, g_3$ tale che

$$[F]^{1,t,t^2}_{g_1,g_2,g_3}$$

è diagonale.
c) Determinare una base $f_1, f_2, f_3$ tale che

$$[F]^{f_1,f_2,f_3}_{f_1,f_2,f_3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

[leggere attentamente il testo, non ci sono errori di battitura]

## 11. Soluzioni compitino del 10 febbraio 2024: prima parte

**Risposta domanda 1.** $\frac{2}{3}(1,1,1)$

**Risposta domanda 2.** Il vettore $(1,-2,1)$ è una base del sottospazio. Più in generale ogni vettore della forma $(a,-2a,a)$ con $a \neq 0$ è una base del sottospazio.

**Risposta domanda 3.** $\dim W = 4$

**Risposta domanda 4.**

$$[F]^{1+t,1+t^2,t^2}_{t+2t^2,1,1+t^2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Risposta domanda 5.** Gli autovalori sono $-1, 2, 1$

## 12. Soluzioni compitino del 10 febbraio 2024: prima parte

**Risposta domanda 1.** $\frac{3}{2}(1,0,1)$

**Risposta domanda 2.** Il vettore $(1,-1,1)$ è una base del sottospazio. Più in generale ogni vettore della forma $(a,-a,a)$ con $a \neq 0$ è una base del sottospazio.

**Risposta domanda 3.** $\dim W = 5$

**Risposta domanda 4.**

$$[F]^{1+t,1+t^2,t^2}_{t+2t^2,1,1+t^2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Risposta domanda 5.** Gli autovalori sono $1, 2, 3$

## 13. Soluzioni compitino del 10 febbraio 2024: prima parte

**Risposta domanda 1.** $\frac{5}{2}(0,1,1)$

**Risposta domanda 2.** Il vettore $(2,-2,1)$ è una base del sottospazio. Più in generale ogni vettore della forma $(2a,-2a,a)$ con $a \neq 0$ è una base del sottospazio.

**Risposta domanda 3.** $\dim W = 7$

**Risposta domanda 4.**

$$[F]^{1+2t,t^2,1+2t^2}_{1,1+t^2,t+3t^2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad [F]^{1+2t,t^2,1+2t^2}_{t+t^2,1,1+t^2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

**Risposta domanda 5.** Gli autovalori sono $2, 2, 1$

## 14. Soluzioni compitino del 10 febbraio 2024, seconda parte

**Soluzione esercizio 1.** a)

$$U + W = \{u + w \,:\, u \in U \text{ e } w \in W\}$$

b) Se $v \in U + W$ allora esistono $u \in U$ e $w \in W$ tali che $v = u + w$. Poiché $u_1, u_2$ sono una base di $U$ e $w_1, w_2$ sono una base di $W$ esistono $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ tali che $u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$ e $w = \mu_1 w_1 + \mu_2 w_2$. Quindi

$$v = u + w = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \mu_1 w_1 + \mu_2 w_2$$

dimostrando che ogni elemento in $U + W$ è una combinazione lineare di $u_1, u_2, w_1, w_2$.

c) Sia $V = U = W = \mathbb{R}^2$ e sia $u_1 = e_1$, $u_2 = e_2$, $w_1 = e_1 + e_2$ e $w_2 = e_1 - e_2$.

**Soluzione esercizio 2.** Un vettore in $w$ in $W$ si scrive come

$$w = av_1 + bv_2 = \begin{pmatrix} a+2b \\ 2a+4b \\ 2a+3b \\ a+3b \end{pmatrix}$$

Un tale vettore è in $N(L_A)$ se $A \cdot w = 0$. Effettuando il prodotto troviamo le due equazioni

$$0 = 0 \qquad a + b = 0$$

Quindi $a = -b$ e i vettori nell'intersezione sone sono i multiplipi di

$$v_0 = v_2 - v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

In particolare $v_0$ è una base dell'intersezione e $\dim U \cap W = 1$.

c) I vettori dell'intersezione sono i vettori $v = x_1 e_1 + \cdots + x_4 e_4$ per cui esiste $b$ tale

$$x_1 = b \quad x_2 = 2b \quad x_3 = b \quad x_4 = 2b$$

Ricavando $b$ prima dalla prima equazione e sostituendo nelle altre ricaviamo che

$$x_1 = x_3 \qquad x_2 = x_4 \qquad x_2 = 2x_1$$

sono una descrizione cartesiana di $U \cap W$.

**Soluzione esercizio 3.** a) Abbiamo $F(1) = 0$, $F(t) = 1$ e $F(t^2) = 2 + 2t$, quindi nella base standard la matrice associata a $F$ è uguale a

$$[F]_{1,t,t^2}^{1,t,t^2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico è uguale a $\lambda^3$ e quindi l'unico autovalore di $F$ è zero con molteplicità algebrica 3. L'appplicazione $F$ non 'e però nulla e quindi la molteplicità geometrica è minore di quella algebrica. In particolare non è diagonalizzabile.

b) Cerchiamo una base tale che

$$F(1) = ag_1 \qquad F(t) = bg_2 \qquad F(t^2) = bg_3$$

ovvero

$$0 = ag_1 \qquad 1 = bg_2 \qquad 2 + 2t = cg_3$$

Possiamo quindi scegliere $a = 0$, $b = c = 1$ e

$$g_2 = 1 \qquad g_3 = 2 + 2t$$

e $g_1$ a piacere in modo che $g_1, g_2.g_3$ sia una base. Per esempio $g_3 = t^2$.

c) Dalla forma della matrice ricaviamo

$$F(f_1) = 0 \qquad F(f_2) = f_1 \qquad F(f_3) = f_2$$

Possiamo scegliere $f_1 = 1$, $f_2 = t$ in modo che le prime due equazioni siano soddisfatte e

$$F(f_3) = t$$

Se $f_3 = x + yt + zt^2$ ricaviamo dall'ultima equazione

$$y + 2z = 0 \qquad 2z = 1$$

Per esempio $z = 1/2$ e $y = -1$. Quindi

$$f_3 = -t + \frac{1}{2}t^2.$$

Controlliamo che $f_1, f_2, f_3$ sia effetivamente una base infatti, $f_1 \neq 0$, il polinomio $f_2$ non è nello span di $f_1$ e $f_3$ non è nello span di $f_1, f_2$. Quindi sono lineramente indipendenti ed essendo tre sono una base.