COMPITINO DI GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE DEL 31 MAGGIO 2024

Istruzioni: Avete 2 ore di tempo. Non è sufficiente dare la risposta giusta, dovete fornire delle giustificazioni. Durante lo svolgimento non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari né altri oggetti elettronici, pena l'annullamento del compito. Buon lavoro!

Esercizio 1. [12 punti] Sia $M(2)$ lo spazio delle matrici reali 2×2. Sia $S(2) \subset M(2)$ il sottospazio formato dalle matrici simmetriche. Considera il prodotto scalare su $M(2)$ dato da

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}({}^{\mathrm{t}}AB).$$

(1) Determina una base ortogonale per $S(2)$.
(2) Determina il sottospazio $S(2)^{\perp}$.

Esercizio 2. [12 punti] Considera la retta r passante per i punti

$$P = \begin{pmatrix} -21 \\ 1 \\ -22 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 73 \\ 1 \\ 72 \end{pmatrix}$$

ed il piano $\pi = \{z = 1\}$.

(1) Descrivi a parole come intendi costruire una isometria $f(x) = Ax + b$ tale che $f(r) \subset \pi$.
(2) Determina esplicitamente l'isometria $f(x) = Ax + b$ del punto precedente.

Esercizio 3. [12 punti] Considera la conica C di equazione

$$13x^2 + 10xy + 13y^2 - 46x - 62y + 13 = 0$$

(1) Determina il tipo di conica ed il suo centro, se esiste.
(2) Determina gli assi della conica e prova a disegnarla.

Soluzioni

Esercizio 1. Si verifica facilmente che la base canonica di $S(2)$, formata dalle matrici

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$$

è ortogonale. Imponendo che una generica matrice sia ortogonale a queste si trova poi che $S(2)^\perp$ consiste precisamente delle matrici antisimmetriche.

Esercizio 2. La retta r può essere descritta come

$$r = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \right\}.$$

Posso costruire una isometria f con una rotazione oraria di angolo $\pi/2$ intorno all'asse x. Ottengo:

$$f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & -1\\0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}.$$

In questa soluzione il vettore b è nullo. Ci sono molte altre soluzioni possibili.

Esercizio 3. La matrice che descrive la conica è

$$\bar{A} = \begin{pmatrix}13 & 5 & -23\\5 & 13 & -31\\-23 & -31 & 13\end{pmatrix}$$

La matrice 2×2 in basso a destra ha determinante negativo, quindi $\bar{A}$ è indefinita e C non è vuota. Si verifica anche che $\det \bar{A} < 0$ quindi non è degenere. La matrice A ha $\det A > 0$ e quindi C è una ellisse. Il centro è soluzione del sistema $Ax + b = 0$ che si trova essere il punto

$$P = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}.$$

Per trovare gli assi intanto sposto l'origine in P ponendo $x' = x - 1, y' = y - 2$. Sostituisco e come nuova equazione trovo

$$13(x')^2 + 10x'y' + 13(y')^2 - 72 = 0.$$

Gli autovalori della matrice

$$A = \begin{pmatrix}13 & 5\\5 & 13\end{pmatrix}$$

sono 18 e 8, con autovettori

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}.$$

Quindi girando gli assi in modo che siano generati da questi vettori ottengo un nuovo sistema di coordinate in cui la conica ha equazione

$$18(x'')^2 + 8(y'')^2 - 72 = 0$$

che posso scrivere anche

$$\frac{(x'')^2}{4} + \frac{(y'')^2}{9} = 1$$

e quindi l'ellisse ha centro P, assi orientati come le bisettrici dei quadranti, e semiassi di lunghezza 2 e 3.