GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE 2023/24
ESERCIZI PER CASA

1. Esercizi del 15 marzo

Scegli 3 fra gli esercizi seguenti e consegna le soluzioni il giorno venerdí 22 marzo a lezione.

Esercizio 1.1. Determina la segnatura della matrice seguente, al variare di $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & t \end{pmatrix},$$

Esercizio 1.2. Sia $V = M(2)$ lo spazio formato dalle matrici reali 2×2. Considera il prodotto scalare

$$\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}(AB).$$

(1) Esiste un sottospazio vettoriale $W \subset V$ di dimensione 1 tale che $W \subset W^\perp$?
(2) Calcola la segnatura della restrizione del prodotto scalare al sottospazio $S \subset V$ formato da tutte le matrici simmetriche.

Esercizio 1.3. Sia $\mathbb{R}_2[x]$ lo spazio formato dai polinomi reali di grado ≤ 2. Considera il prodotto scalare su $\mathbb{R}_2[x]$ dato da

$$\langle p, q \rangle = p(0)q(0) + p'(0)q'(0) + p''(0)q''(0)$$

dove p' e p'' sono i polinomi ottenuti come derivata prima e seconda di p. Considera l'insieme $W \subset \mathbb{R}_2[x]$ formato da tutti i polinomi $p(x)$ che si annullano in $x = -1$, cioè tali che $p(-1) = 0$.

(1) Mostra che il prodotto scalare è definito positivo.
(2) Trova una base ortogonale per il prodotto scalare.
(3) Mostra che W è un sottospazio vettoriale e calcola la sua dimensione.
(4) Determina il sottospazio ortogonale $W^\perp$.

Esercizio 1.4. Sia V spazio vettoriale dotato di un prodotto scalare. Siano $U, W \subset V$ sottospazi vettoriali qualsiasi. Mostra i fatti seguenti:

(1) Se $U \subset W$, allora $W^\perp \subset U^\perp$.
(2) $U \subset (U^\perp)^\perp$. Se g è definito positivo, allora $U = (U^\perp)^\perp$.

Esercizio 1.5. Calcola determinante e segnatura della matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Più in generale, per ogni $n \geq 1$ considera la matrice $(2n) \times (2n)$ seguente:

$$S_{2n} = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix}$$

dove 0_n e I_n sono rispettivamente la matrice nulla e la matrice identità, entrambe $n \times n$. Calcola il determinante e la segnatura di S_{2n}.

2. Esercizi del 27 aprile

Scegli 3 fra gli esercizi seguenti e consegna le soluzioni il giorno mercoledí 8 maggio a lezione.

Esercizio 2.1. Considera le rette

$$r = \begin{cases} x - y + z = 3 \\ x - z = 1 \end{cases} \qquad s = \begin{cases} x + z = 1 \\ 2x - y - z = -1 \end{cases}$$

(1) Determina se le rette sono incidenti, parallele o sghembe.
(2) Determina la distanza fra le due rette e una retta perpendicolare a entrambe.

Esercizio 2.2. Descrivi nella forma $f(x) = Ax + b$ una rotazione di angolo π intorno alla retta affine

$$r = \{x = 1,\ y = -1\}.$$

Devi trovare la matrice A ed il vettore b.

Esercizio 2.3. Siano $P, Q \in \mathbb{R}^2$ due punti distinti del piano.

(1) Siano f e g due rotazioni di angolo $\pi/2$ rispettivamente intorno a P e Q. Che tipo di isometria è la composizione $f \circ g$?
(2) Siano f e g due rotazioni di angolo π rispettivamente intorno a P e Q. Che tipo di isometria è la composizione $f \circ g$?

In entrambe le domande cercate di dare più informazioni che potete sulla isometria $f \circ g$.

Esercizio 2.4. Considera in $\mathbb{R}^3$ il piano

$$\pi = \{z = 1\}$$

e la retta

$$r = \left\{ \begin{pmatrix} 2 + t \\ t \\ -1 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}.$$

(1) Determina la distanza fra π e r.
(2) Determina equazioni cartesiane per il piano π' contenente r e perpendicolare a π.
(3) Scrivi una isometria $f(x) = Ax + b$ che sposti il piano π in π', cioè tale che $f(\pi) = \pi'$. Devi determinare la matrice A ed il vettore b.

3. Esercizi del 17 maggio

Scegli 3 fra gli esercizi seguenti e consegna le soluzioni il giorno mercoledí 22 maggio a lezione.

Esercizio 3.1. Siano r e s due rette orientate incidenti in $\mathbb{R}^3$. Sia $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una rotazione di angolo α intorno a r, e sia $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una rotazione di angolo β intorno a s.

(1) La composizione $f \circ g$ è sicuramente una rotazione di un certo angolo θ intorno ad una certa retta passante per $P = r \cap s$. Spiega perché questo è vero (devi usare la classificazione delle isometrie affini dello spazio).
(2) Nel caso in cui r e s sono ortogonali, determina $\cos\theta$ in funzione di $\cos\alpha$ e $\cos\beta$.

Esercizio 3.2. Sia θ l'angolo compreso tra $\pi/2$ e π radianti il cui coseno è uguale a $-5/7$. Sia r la retta passante per i punti $P = (0, 3, 1)$ e $Q = (1, 1, 2)$. Sia $f(x) = Ax + b$ una rotazione di $\mathbb{R}^3$ di angolo θ attorno alla retta r.

(1) Descrivi chiaramente che procedimento intendi utilizzare per calcolare A e b.
(2) Determina A e b.

Esercizio 3.3. Si considerino i seguenti punti di $\mathbb{R}^3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Si descriva una isometria $F(x) = Ax + b$ di $\mathbb{R}^3$ tale che $F(AB) = CD$.

Esercizio 3.4. Considera nello spazio $\mathbb{R}^3$ la retta

$$r = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 1 + t \\ -1 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$$

ed il piano π di equazione $y = 2$.

(1) Descrivi una isometria $f(x) = Ax + b$ con punti fissi tale che $f(r)$ non intersechi π.
(2) Descrivi una isometria $f(x) = Ax + b$ senza punti fissi tale che $f(r)$ non intersechi π.

Esercizio 3.5. Sia A una matrice $n \times n$. Considera l'endomorfismo $L_A(x) = Ax$. Sia $\mathbb{R}^n$ dotato del prodotto scalare Euclideo. Mostra che L_A è una riflessione ortogonale rispetto a qualche sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ se e solo se A è simultaneamente una matrice ortogonale e simmetrica.