Compito di geometria e algebra lineare del 9 settembre 2024

Istruzioni: Avete 2 ore e 30' di tempo. Non è sufficiente dare la risposta giusta, dovete fornire delle giiustificazioni. Durante lo svolgimento non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari né altri oggetti elettronici, pena l'annullamento del compito. Buon lavoro!

Esercizio 1. Siano $v_1, v_2, v_3 \in V$ tre vettori in uno spazio vettoriale V. Per ciascuna delle seguenti affermazioni, determina se è vera o falsa fornendo una motivazione: se l'affermazione è vera scrivi una dimostrazione, se è falsa fornisci un controesempio (in cui scegli V e i tre vettori v_1, v_2, v_3 esplicitamente).

(1) Se $\dim(\mathrm{Span}(v_i, v_j)) = 2$ per ogni $i \neq j$, allora i tre vettori v_1, v_2, v_3 sono indipendenti.
(2) Se i tre vettori v_1, v_2, v_3 sono dipendenti, allora almeno uno dei tre vettori si scrive come combinazione lineare degli altri due.
(3) Se i tre vettori v_1, v_2, v_3 sono dipendenti, allora ciascuno dei tre vettori si scrive come combinazione lineare degli altri due.

Esercizio 2. Sia $W \subset \mathbb{R}^3$ il sottospazio definito da

$$W = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right).$$

Consideriamo $\mathbb{R}^3$ munito del prodotto scalare Euclideo.

(1) Costruisci una matrice A reale 3×3 tale che l'endomorfismo $L_A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ soddisfi questa richiesta:
$$L_A(W) = W^\perp.$$
(2) Costruisci una matrice A reale 3×3 tale che che l'endomorfismo $L_A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ soddisfi queste richieste: vale $L_A(W) = W^\perp$ e inoltre L_A non è diagonalizzabile.

Esercizio 3. Sia $V = M(2, \mathbb{R})$ lo spazio vettoriale formato da tutte le matrici reali 2×2. Sia

$$J = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}.$$

Considera il prodotto scalare $g\colon V \times V \to \mathbb{R}$ dato da

$$g(A, B) = \mathrm{tr}({}^{\mathrm{t}}AJB).$$

(1) Calcola la segnatura di g.
(2) Esiste un piano vettoriale $W \subset V$ tale che $W^\perp = W$?

Esercizio 4. Considera nello spazio i punti

$$P = \begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Siano r la retta passante per P e Q e s la retta passante per R e S.

(1) Costruisci una isometria affine $f(x) = Ax + b$ tale che $f(r) = s$.
(2) Costruisci una isometria affine $f(x) = Ax + b$ tale che $f(r) = s$ e $f(s) = r$.

In entrambi i casi prima descrivi come intendi costruire f a parole e poi determina A e b.

Soluzioni

Esercizio 1.

(1) Falso: ad esempio $V = \mathbb{R}^2$, $v_1 = e_1, v_2 = e_2, v_3 = e_1 + e_2$

(2) Vero: per ipotesi esistono $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ non tutti nulli tali che
$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0.$$
Siccome i coefficienti non sono tutti nulli, abbiamo $\lambda_i \neq 0$ per almeno un i. Supponiamo ad esempio che sia $i = 1$, e scriviamo
$$\lambda_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2 - \frac{\lambda_3}{\lambda_1} v_3.$$
Gli altri casi $i = 2, 3$ sono analoghi.

(3) Falso: ad esempio $V = \mathbb{R}^2$, $v_1 = v_2 = e_1, v_3 = e_2$. Il vettore v_3 non può essere scritto come combinazione lineare dei primi due.

Esercizio 2. Consideriamo la base
$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$
Vediamo che $W = \text{Span}(v_1, v_2)$ e $W^\perp = \text{Span}(v_3)$. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo che nella base v_1, v_2, v_3 si scrive come
$$[f]^{v_1,v_2,v_3}_{v_1,v_2,v_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Questo endomorfismo soddisfa entrambe le condizioni. Per ottenere A tale che $f = L_A$ dobbiamo scrivere f rispetto alla base canonica, e otteniamo
$$A = [f]^{e_1,e_2,e_3}_{e_1,e_2,e_3} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$
Ci sono molte altre soluzioni possibili.

Esercizio 3. La matrice associata rispetto alla base canonica di V è
$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
La matrice ha determinante 1, quindi le possibili segnature sono $(4, 0, 0), (2, 2, 0), (0, 4, 0)$. Il fatto che ci siano degli zeri sulla diagonale esclude che sia definita, quindi la segnatura per esclusione è $(2, 2, 0)$. Il piano $W = \text{Span}(e_1, e_2)$ è tale che $W^\perp = W$.

Esercizio 4. Si vede facilmente facendo un disegno che r e s sono due rette sghembe con perpendicolare comune
$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$
Il punto medio fra le due rette è
$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
Per ottenere una isometria f tale che $f(r) = s$ e $f(s) = r$ è sufficiente operare una antirotazione di centro P, di asse verticale e di angolo $\pi/2$. Facendo i conti otteniamo
$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$
Ci sono altre soluzioni possibili.