Compito di geometria e algebra lineare del 3 giugno 2024

Istruzioni: Avete 2 ore e 30' di tempo. Non è sufficiente dare la risposta giusta, dovete fornire delle giiustificazioni. Durante lo svolgimento non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari né altri oggetti elettronici, pena l'annullamento del compito. Buon lavoro!

Esercizio 1. [9 punti] Sia V uno spazio vettoriale dotato di un prodotto scalare. Per ciascuna delle seguenti affermazioni, determina se è vera o falsa fornendo una motivazione: se l'affermazione è vera scrivi una dimostrazione, se è falsa fornisci un controesempio (in cui scegli V ed il prodotto scalare esplicitamente).

(1) Se il prodotto scalare è definito positivo, allora è non degenere.
(2) Se esiste un vettore non nullo $v \in V$ tale che $\langle v, v \rangle = 0$, allora il prodotto scalare è degenere.
(3) Se $W \subset V$ è un sottospazio, allora $V = W \oplus W^\perp$.

Esercizio 2. [9 punti] Considera lo spazio $\mathbb{R}^4$, con variabili x_1, x_2, x_3, x_4, munito del prodotto scalare Euclideo. Siano $U, W \subset \mathbb{R}^4$ i sottospazi

$$U = \text{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\\2\end{pmatrix}\right)$$

$$W = \{3x_2 - 2x_3 = x_1 + 2x_2 + x_4 = 0\}$$

(1) Determina una base per $U \cap W$,
(2) Determina una base per $U^\perp$.

Esercizio 3. [9 punti] Sia $V = S(2)$ lo spazio vettoriale formato dalle matrici simmetriche reali 2×2. Sia

$$A = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}.$$

Considera l'endomorfismo $f\colon V \to V$ definito nel modo seguente

$$f(X) = AX + XA.$$

(1) Determina la matrice associata a f rispetto ad una base di V a tua scelta.
(2) L'endomorfismo f è diagonalizzabile?

Esercizio 4. [9 punti] Considera nello spazio i punti

$$P = \begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix}3\\3\\-10\end{pmatrix}.$$

Sia r la retta passante per P e Q, e sia s la retta passante per R e S.

(1) Costruisci una isometria $f(x) = Ax + b$ senza punti fissi tale che $f(r) = s$.
(2) Costruisci una isometria $f(x) = Ax + b$ con punti fissi tale che $f(r) = s$.

Per entrambe le domande, spiega prima a parole come intendi costruire A e b.

Soluzioni

Esercizio 1.

(1) Fatto a lezione.

(2) Non è vero, ad esempio basta prendere $V = \mathbb{R}^2$ e considerare il prodotto scalare definito dalla matrice
$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
Il vettore $v = (1, 1)$ è isotropo ma il prodotto scalare non è degenere.

(3) Non è vero, basta prendere $W = \operatorname{Span}(v)$ nell'esempio precedente.

Esercizio 2. Il vettore generico di U è
$$\begin{pmatrix} t+2u \\ t \\ 2t+u \\ -t+2u \end{pmatrix}$$
e inserendo questo vettore nelle equazioni che definiscono W otteniamo la condizione $t + 2u = 0$. Quindi
$$U \cap W = \operatorname{Span} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$
Imponendo che un vettore generico sia ortogonale ad entrambi i generatori di U si trova che
$$U^\perp = \operatorname{Span} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Esercizio 3. Una base di V è
$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
La matrice associata a f rispetto a questa base è
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
Il polinomio caratteristico $p(\lambda) = \lambda(-\lambda^2 + 4)$ ha tre radici reali distinte $0, -2, 2$ e quindi la matrice è diagonalizzabile.

Esercizio 4. Vediamo intanto che
$$r = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad s = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$
Le due rette possono essere disegnate e si vede che
$$l = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
è perpendicolare a r e a s. Una isometria f senza punti fissi tale che $f(r) = s$ è una rototraslazione di asse la retta l, angolo $\pi/2$ e passo 2. Questa è
$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$
Una isometria con punti fissi è una antirotazione di asse l, angolo $\pi/2$ e di centro $(3, 2, 2)$. Questa è
$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ci sono anche altre soluzioni.