Spazi e sottospazi vettoriali

Nel caso della geometria del piano e dello spazio, abbiamo visto come molti problemi si possono studiare molto efficacemente utilizzando le prorietà di tre operazioni:

- la somma: $u + v$, con $u, v \in \mathbb{R}^3$.
- la moltiplicazione per un numero: $\lambda\, v$, con $\lambda \in \mathbb{R}$ e $u \in \mathbb{R}^3$.
- il prodotto scalare: $u \bullet v$, con $u, v \in \mathbb{R}^3$.

La definizione di spazio vettoriale è una astrazione delle proprietà che riguardano le prime due di queste operazioni. Nel secondo semestre studierete più a fondo anche le proprietà legate alla terza. Vedremo come da una struttura relativamente semplice si possano dedurre varie conseguenze interessanti anche nel caso di $\mathbb{R}^3$. L'affrontare questo argomento da un punto di vista astratto permette di trattare in modo uniforme e formalmente semplice situazioni molto diverse tra loro che, se affrontate troppo concretamente, possono avere un aspetto notazionalmente molto complicato. In altre parole, quella di spazio vettoriale, è una definizione molto azzeccata, che sembra cogliere in modo ottimale alcuni aspetti ricorrenti in diversi contesti. D'altro canto, al primo impatto, un modo di procedere un po' astratto può disorientatate. Il mio consiglio è di tenere sempre ben presenti gli esempi fondamentali che faremo in questo capitolo. Per nostra fortuna l'intuizione che uno si forma per $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ è di grande aiuto anche per il caso generale.

1. Definizione di spazio vettoriale

Sia $\mathbb{K}$ un campo, per noi sarà quasi sempre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Per definire uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ dobbiamo fornire

- un insieme V,
- una operazione, detta somma, che dati due elementi u, v di V fornisce un terzo elemento indicato con $u +_{\mathrm{V}} v$
- una operazione, detta moltiplicazione o prodotto per scalare, che dati un numero $\lambda \in \mathbb{K}$ e un elemento u di V fornisce un nuovo elemento di V indicato con $\lambda \cdot_{\mathrm{V}} u$
- un elemento $0_V \in V$, detto lo zero di V.

Inoltre le due operazioni devono verificare le seguenti proprietà:

P1: *Proprietà commutativa.* Per ogni $u, v \in V$

$$u +_{\mathrm{V}} v = v +_{\mathrm{V}} u.$$

P2: *Proprietà associativa.* Per ogni $u, v, w \in V$ e per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$

$$(u +_{\mathrm{V}} v) +_{\mathrm{V}} w = u +_{\mathrm{V}} (v +_{\mathrm{V}} w),$$
$$\lambda \cdot_{\mathrm{V}} (\mu \cdot_{\mathrm{V}} u) = (\lambda\mu) \cdot_{\mathrm{V}} u.$$

P3: *Proprietà dell'elemento neutro.* Per ogni $u \in V$

$$0_V +_{\mathrm{V}} u = u \qquad \text{e} \qquad 1_{\mathbb{K}} \cdot_{\mathrm{V}} u = u.$$

P4: *Esistenza dell'opposto.* Per ogni u in V esiste un elemento v di V, tale che
$$u +_{\mathrm{V}} v = 0_V.$$
P5: *Proprietà distributiva.* Per ogni $u, v \in V$ e per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$
$$\lambda \cdot_{\mathrm{V}} (u +_{\mathrm{V}} v) = \lambda \cdot_{\mathrm{V}} u +_{\mathrm{V}} \lambda \cdot_{\mathrm{V}} v,$$
$$(\lambda + \mu) \cdot_{\mathrm{V}} u = \lambda \cdot_{\mathrm{V}} u + \mu \cdot_{\mathrm{V}} u.$$

Ci riferiremo a queste proprietà anche come agli assiomi di spazio vettoriale.

1.1. **Esempio: $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.** I primi esempi da tenere in mente sono quelli che abbiamo già studiato di $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.

1.2. **Esempio: $\mathbb{K}^n$.** Una generalizzazione molto importante dei due esempi precedenti è la seguente. Sia $\mathbb{K}$ un campo. Definiamo
$$\mathbb{K}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{K} \text{ per } i = 1, \ldots, n\}.$$
È l'insieme delle n-uple di elementi di $\mathbb{K}$. Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $n = 2$ o 3, ritroviamo gli insiemi $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$. Per $n = 1$ ritroviamo $\mathbb{K}$, il campo stesso. Definiamo la somma tra due elementi di $\mathbb{K}^n$ e la moltiplicazione tra un elemento di $\mathbb{K}$ e un elemento di $\mathbb{K}^n$ nel seguente modo:
$$(x_1, \ldots, x_n) +_{\mathbb{K}^n} (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$
$$\lambda \cdot_{\mathbb{K}^n} (x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n).$$
Definiamo infine lo zero come
$$0_{\mathbb{K}^n} = (0, \ldots, 0).$$
Per esempio abbiamo
$$(1, 2, 3, 4) +_{\mathbb{R}^4} (-1, 3, 2, 0) = (1 - 1, 2 + 3, 3 + 2, 4 + 0) = (0, 5, 5, 4)$$
e
$$3 \cdot_{\mathbb{R}^5} (1, -1, 0, 2, 3) = (3 \cdot 1, 3 \cdot (-1), 3 \cdot 0, 3 \cdot 2, 3 \cdot 3) = (3, -3, 0, 6, 9).$$

Teorema 1.1. *L'insieme $\mathbb{K}^n$ con la somma, la moltiplicazione e lo zero appena definiti è uno spazio vettoriale.*

Dimostrazione. Il teorema afferma che le operazioni che abbiamo introdotto verificano le proprietà P1,...,P5 elencate sopra. La dimostrazione del teorema è quindi una lunga verifica di tutte queste proprietà. Noi vericheremo solo la proprietà commutativa e l'esistenza dell'opposto.

Proprietà commutativa: Dobbiamo verificare che dati due elementi $u = (x_1, \ldots, x_n)$ e $v = (y_1, \ldots, y_n)$ in $\mathbb{K}^n$, abbiamo $u + v = v + u$.
$$\begin{aligned}(x_1, \ldots, x_n) +_{\mathbb{K}^n} (y_1, \ldots, y_n) &= (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)\\ &= (y_1 + x_1, \ldots, y_n + x_n)\\ &= (y_1, \ldots, y_n) +_{\mathbb{K}^n} (x_1, \ldots, x_n)\end{aligned}$$

Analizziamo i passaggi uno a uno. La prima uguaglianza segue da come abbiamo definito $+_{\mathbb{K}^n}$. La seconda uguaglianza segue invece dal fatto che sappiamo che in un campo la somma è commutativa. Infine la terza uguaglianza segue di nuovo da come abbiamo definito $+_{\mathbb{K}^n}$.

Esistenza dell'opposto: Dato un elemento $u = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ dobbiamo verificare che esiste un elemento v tale che $u +_{\mathbb{K}^n} v = 0_{\mathbb{K}^n}$. Scegliamo $v = (-x_1, \dots, -x_n)$ e verifichiamo che ha la proprietà richiesta. Infatti

$$\begin{aligned} u + v &= (x_1, \dots, x_n) +_{\mathbb{K}^n} (-x_1, \dots, -x_n) \\ &= (x_1 - x_1, \dots, x_n - x_n) \\ &= (0, \dots, 0) = 0_{\mathbb{K}^n}. \end{aligned}$$

Anche in questo caso spieghiamo le uguaglianze passaggio per passaggio. La prima uguaglianza segue dalla definizione di u e v. La seconda uguaglianza dalla definizione di $+_{\mathbb{K}^n}$, la terza dalle proprietà dell'opposto nel campo $\mathbb{K}$ e la quarta dalla definizione di $O_{\mathbb{K}^n}$. □

1.3. **Notazione: vettori riga e vettori colonna.** Nel seguito del corso sarà conveniente scrivere gli elementi di $\mathbb{K}^n$ come colonne invece che come righe. Cioè nella forma

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Quando scriviamo gli elementi di $\mathbb{K}^n$ come righe parliamo di vettori riga e quando li scriviamo come colonne come vettori colonna. Noi non faremo grande distinzione tra le due cose, e useremo la forma che più ci conviene a seconda dei casi. solo più avanti sarà utile fissare una convenzione per poter effettuare alcuni calcoli in modo uniforme.

1.4. **Esempio: funzioni.** Facciamo ora un secondo esempio sicuramente più astratto del precedente. Sia X un insieme non vuoto. Consideriamo l'insieme di tutte le funzioni da X a $\mathbb{K}$. Sia

$$V = \mathcal{F}(X, \mathbb{K}) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{K}\}$$

Per esempio possiamo considerare $X = \mathbb{K} = \mathbb{R}$ e allora $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ è l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$, le funzioni che studiate ad analisi 1. Sull'insieme $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$ sono definite una somma, un prodotto per scalare e uno zero. Iniziamo dalla definizione di 0_V. Questo deve essere un elemento di V cioè una funzione da X a $\mathbb{K}$. Per definizione è la funzione seguente

$$0_V(x) = 0 \qquad \text{per ogni } x \in X,$$

la funzione che vale sempre il numero 0. Definiamo ora la somma di due funzioni. Siano $f, g \in V$ cioè $f, g : X \longrightarrow \mathbb{K}$ sono due funzioni da X a $\mathbb{K}$. Definiamo la funzione somma $f +_{\mathrm{V}} g$ nel seguente modo

$$(f +_{\mathrm{V}} g)(x) = f(x) + g(x).$$

Si noti che la somma che compare sulla sinistra, la somma di due funzioni, la stiamo definendo, mentra la somma che compare sulla destra è la somma di due numeri di $\mathbb{K}$ e quindi è già definita. Definiamo infine la moltiplicazione tra un numero λ di $\mathbb{K}$ e una funzione mediante

$$(\lambda \cdot_{\mathrm{V}} f)(x) = \lambda \cdot f(x).$$

Vogliamo dimostrare che anche in questo caso abbiamo definito uno spazio vettoriale. Prima di farne la verifica nel teorema seguente facciamo una osservazione che utilizzeremo sistematicamente. Se $f, g : A \longrightarrow B$ sono due funzioni, dire che sono uguali vuol dire che $f(a) = g(a)$ per ogni $a \in A$.

Teorema 1.2. *L'insieme $V = \mathcal{F}(X, \mathbb{K})$ con la somma, la moltiplicazione e lo zero appena definiti è un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale.*

Dimostrazione. Anche in questo caso si tratta di una lunga e noiosa verifica delle proprietà P1,...,P5. Verifichiamo la prima delle due proprietà distributive e, anche in questo caso, l'esistenza dell'opposto lasciando le altre proprietà da verificare per esercizio.

Esistenza dell'opposto: Sia $f \in V$, dobbiamo verificare che esiste $g \in V$ tale che $f +_{\mathrm{V}} g = 0_V$. Più esplicitamente data una funzione $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ dobbiamo verificare che esiste una funzione $g : X \longrightarrow \mathbb{K}$ tale che $(f +_{\mathrm{V}} g)(x) = 0_V(x)$ per ogni $x \in X$. Definiamo g nel seguente modo

$$g(x) = -f(x) \qquad \text{per ogni } x \in X.$$

Se $x \in X$ abbiamo quindi

$$(f +_{\mathrm{V}} g)(x) = f(x) + g(x) = f(x) - f(x) = 0_{\mathbb{K}} = 0_V(x)$$

da cui concludiamo che $f +_{\mathrm{V}} g = 0_V$. Analizziamo i singoli passaggi che abbiamo fatto. Nel primo abbiamo utilizzato la definizione di $+_{\mathrm{V}}$. Nel secondo abbiamo utilizzato la definizione che noi abbiamo dato di g. Nel terzo abbiamo utilizzato che in $\mathbb{K}$ se sommo un numero con il suo opposto ottengo 0. Nel quarto abbiamo utilizzato la definizione di 0_V.

Proprietà distributiva: Sia $\lambda \in \mathbb{K}$ e $f, g \in V$ dobbiamo verificare che $\lambda \cdot_{\mathrm{V}} (f +_{\mathrm{V}} g) = \lambda \cdot_{\mathrm{V}} f +_{\mathrm{V}} \lambda \cdot_{\mathrm{V}} g$. Ovvero dato $\lambda \in \mathbb{K}$ e date $f, g : X \longrightarrow \mathbb{K}$ dobbiamo verificare che $(\lambda \cdot_{\mathrm{V}} (f +_{\mathrm{V}} g))(x) = (\lambda \cdot_{\mathrm{V}} f +_{\mathrm{V}} \lambda \cdot_{\mathrm{V}} g)(x)$ per ogni $x \in X$.

$$\begin{aligned}
(\lambda \cdot_{\mathrm{V}} (f +_{\mathrm{V}} g))(x) &= \lambda \cdot \big((f +_{\mathrm{V}} g)(x)\big) = \lambda \cdot (f(x) + g(x)) \\
&= \lambda \cdot f(x) + \lambda \cdot g(x) = (\lambda \cdot_{\mathrm{V}} f)(x) + (\lambda \cdot_{\mathrm{V}} g)(x) \\
&= (\lambda \cdot_{\mathrm{V}} f +_{\mathrm{V}} \lambda \cdot_{\mathrm{V}} f)(x)
\end{aligned}$$

Nella prima uguaglianza abbiamo usato la definizione di $\cdot_{\mathrm{V}}$, nella seconda la definizione di $+_{\mathrm{V}}$, nella terza la proprietà distributive di moltiplicazione e somma nel campo $\mathbb{K}$, nella quarta la definizione di $\cdot_{\mathrm{V}}$ e nella quindi la definizione di $+_{\mathrm{V}}$. □

Esercizio 1. Completare la dimostrazione del Teorema 1.1.

Esercizio 2. Completare la dimostrazione del Teorema 1.2.

2. Prime osservazioni

In questa sezione faremo alcune precisazioni sulla definizione che abbiamo dato di spazio vettoriale. Faremo inoltre vedere alcuni esempi di come dalla lista di proprietà elencate seguono le proprietà che siamo abituati ad utilizzare per somma e moltiplicazioni.

2.1. **Notazione 1.** Nel proseguio del corso, quasi sempre, indicheremo le operazioni $+_V$ e $\cdot_V$ e lo zero 0_V semplicemente con $+$, $\cdot$ e 0. È comodo però avere a disposizione questa notazione in alcuni esempi iniziali per non fare confusione tra ciò che stiamo definendo e quello che invece già abbiamo definito.

2.2. **Notazione 2: vettori.** A differenza che in fisica, per noi la parola vettore non avrà un particolare significato. Utilizzeremo la parola vettore come sinonimo di "elemento di uno spazio vettoriale".

2.3. **Notazione 3: somme di più elementi.** Come per i campi, il fatto che valgano la proprietà commutativa e associative per $+_{\mathrm{V}}$ implica che noi possiamo sommare una lista di vettori in qualsiasi ordine. Scriveremo queste somme con $v_1 + \cdots + v_n$ senza parentesi.

2.4. **Notazione 4: lo spazio vettoriale banale.** Lo spazio vettoriale banale è lo spazio che ha come unico elemento lo zero 0. Lo indicheremo con 0. Anche con $\mathbb{K}^0$ indichiamo questo spazio vettoriale.

2.5. **Proprietà algebriche.** L'elenco delle proprietà P1,. . . ,P5 che caratterizzano gli spazi vettoriali è molto breve. Sembrano mancare molto proprietà che per l'intuizione che abbiamo sviluppato studiando $\mathbb{R}^3$ ci aspetteremmo valgano. Faremo vedere qualche esempio di come dedurre alcune di queste proprietà dagli assiomi P1,...,P5 iniziali.

Il primo lemma ci dice che possiamo semplificare come siamo abituati a fare.

Lemma 2.1. *Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e siano $u, v, w \in V$. Se $v +_{\mathrm{V}} u = w +_{\mathrm{V}} u$ allora $v = w$.*

Dimostrazione. Sia $x = v + u = w + u$. Per l'assioma P4 esiste un elemento y tale che $u + y = 0_V$. Calcoliamo $x + y$. Abbiamo

$$\begin{aligned} x + y &= (v + u) + y && \text{per } x = v + u, \\ &= v + (u + y) && \text{per la proprietà associativa,} \\ &= v + 0_V && \text{perché } u + y = 0_V, \\ &= v && \text{per la proprietà di } 0_V. \end{aligned}$$

Similmente utilizzando l'uguaglianza $x = w+u$ otteniamo $x+y = w$. Quindi $v = w$. □

L'assioma P4 afferma l'esistenza di un opposto. Il prossimo lemma stabilisce che tale opposto è unico.

Lemma 2.2 (unicità dell'opposto)**.** *Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e sia $u \in V$ allora esiste un unico elemento v tale che $u +_{\mathrm{V}} v = 0_V$.*

Dimostrazione. L'esistenza di un tale elemento è il contenuto dell'assioma P4. Per dimostrarne l'unicità dimostriamo che due elementi che hanno questa proprietà sono in realtà uguali, ovvero che se $u +_{\mathrm{V}} v = u +_{\mathrm{V}} w = 0_V$ allora $v = w$. □

Grazie al lemma appena dimostrato, dato un elemento $u \in V$ possiamo quindi parlare dell'opposto di u senza ambiguità. Sfruttando l'esistenza dell'opposto possiamo anche introdurre la sottrazione.

Definizione 2.3 (Opposto e sottrazione)**.** Sia $u \in V$. L'unico elemento v di V tale che $u + v = 0_V$ si chiamo l'opposto di u e lo indichiamo con $-u$.

Inoltre, dati, $w, u \in V$ definiamo la sottrazione

$$w - u = w + (-u).$$

Dimostriamo infine qualche proprietà riguardante la moltiplicazione per zero.

Lemma 2.4. *Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale. Allora*

a) $0_{\mathbb{K}} \cdot_{\mathrm{V}} u = 0_V$ *per ogni* $u \in V$.
b) $\lambda \cdot_{\mathrm{V}} 0_V = 0_V$ *per ogni* $\lambda \in \mathbb{K}$.
c) se $\lambda \in \mathbb{K}$ *e* $u \in V$ *e se* $\lambda \cdot_{\mathrm{V}} u = 0_V$ *allora* $\lambda = 0_{\mathbb{K}}$ *o* $u = 0_V$.

Dimostrazione. a) Sia $v = 0_{\mathbb{K}} \cdot_{\mathrm{V}} u$ Vogliamo dimostrare che $v = 0_V$. Calcoliamo $v + v$. Abbiamo

$$\begin{aligned}
v + v &= 0_{\mathbb{K}} \cdot_{\mathrm{V}} u + 0_{\mathbb{K}} \cdot_{\mathrm{V}} u && \text{per definizione di } v \\
&= (0_{\mathbb{K}} + 0_{\mathbb{K}}) \cdot_{\mathrm{V}} u && \text{per la proprietà distributiva} \\
&= 0_{\mathbb{K}} \cdot_{\mathrm{V}} u && \text{perché } 0_{\mathbb{K}} + 0_{\mathbb{K}} = 0_{\mathbb{K}} \\
&= v && \text{per la definizione di } v \\
&= 0_V + v && \text{per la proprietà dell'elemento neutro}
\end{aligned}$$

Quindi abbiamo fatto vedere che $v + v = 0_V + v$, per il Lemma 2.1 ne deduciamo $v = 0_V$.

La dimostrazione dei punti b) e c) la lasciamo per esercizio. □

Esercizio 3. Dimostrare il punto b) e il punto c) del Lemma 2.4.

3. Sottospazi vettoriali

Molte delle osservazioni che abbiamo fatto su $\mathbb{R}^3$ hanno riguardato le rette e i piani passanti per l'origine. Il concetto di sottospazio vettoriale è una generalizzazione di questi due esempi. Diamone la definizione.

Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e sia $W \subset V$. Diciamo che W è un sottospazio vettoriale se valgono le seguenti tre proprietà

SV1: $0_V \in W$,
SV2: se $u, v \in W$ allora $u + v \in W$,
SV3: se $\lambda \in \mathbb{K}$ e $u \in W$ allora $\lambda \cdot u \in W$.

Facciamo subito qualche esempio. Come per gli esempi di spazio vettoriale che abbiamo fatto, anche questi sono esempi molto importanti. Per questi esempi faremo tutte le verifiche,

3.1. **Esempio: rette in $\mathbb{R}^3$.** Sia $P \in \mathbb{R}^3$ e consideriamo la retta

$$W = \{\lambda P : \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Dimostriamo che è un sottospazio vettoriale. Dobbiamo verificare le tre proprietà elencate sopra.

SV1: Dobbiamo verificare che $0_{\mathbb{R}^3} \in W$. Infatti per $\lambda = 0$ otteniamo che $0 \cdot P = 0_{\mathbb{R}^3} \in W$

SV2: Dobbiamo verificare che dati $u, v \in W$ anche $u + v \in W$. Poiché $u, v \in W$ possiamo scrivere $u = \lambda P$ e $v = \mu P$ per opportuni $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Quindi, se poniamo $\nu = \lambda + \mu$ abbiamo

$$u + v = \lambda P + \mu P = (\lambda + \mu)P = \nu P \in W.$$

SV3: Dobbiamo verificare che dati $\lambda \in \mathbb{R}$ e $u \in W$ anche $\lambda u \in W$. Poiché $u \in W$ possiamo scrivere $u = \mu P$ per un opportuno $\mu \in \mathbb{R}$. Quindi, se poniamo $\nu = \lambda\mu$ abbiamo

$$\lambda u = \lambda(\mu P) = (\lambda\mu)P = \nu P \in W.$$

3.2. **Esempio: piani in $\mathbb{R}^3$.** Sia $P \in \mathbb{R}^3$ e consideriamo il piano U ortogonale alla retta OP:

$$U = \{Q \in \mathbb{R}^3 \, : \, Q \bullet P = 0\}.$$

Dimostriamo che è un sottospazio vettoriale. Anche in questo caso dobbiamo verificare le tre proprietà elencate sopra.

SV1: Dobbiamo verificare che $0_{\mathbb{R}^3} \in U$. Infatti $0_{\mathbb{R}^3} \bullet P = 0$ e quindi $0_{\mathbb{R}^3} \in U$.

SV2: Dobbiamo verificare che dati $u, v \in U$ anche $u + v \in U$, ovvero che $(u + v) \bullet P = 0$. Infatti, poiché u e v sono elementi di U, abbiamo $u \bullet P = v \bullet P = 0$, ne deduciamo

$$(u + v) \bullet P = u \bullet P + v \bullet P = 0 + 0 = 0.$$

SV3: Dobbiamo verificare che dati $\lambda \in \mathbb{R}$ e $u \in U$ anche $\lambda u \in U$ ovvero che $(\lambda u) \bullet P = 0$ Infatti, poiché u è un elemento di U, abbiamo $u \bullet P = 0$; ne deduciamo

$$(\lambda u) \bullet P = \lambda(u \bullet P) = \lambda 0 = 0.$$

3.3. **Esempio: alcuni sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ che non sono sottospazi.** Consideriamo qualche esempio di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ che non sono sottospazi. Sia

$$\begin{aligned} X &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 = 1\}, \\ Y &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, xy = 0\}, \\ Z &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \geqslant 0 \text{ e } y \geqslant 0\}. \end{aligned}$$

Per far vedere che un sottoinsieme non è un sottospazio basta far vedere che una delle tre prorietà che caratterizzano i sottospazi non è verificata.

Nel caso dell'insieme X, osserviamo che $O \notin X$ e quindi SV1 non è verificata. (Per questo insieme nessuna delle tre proprietà è verificata ma per dire che non è un sottospazio basta trovarne una).

Nel caso dell'insieme Y la proprietà SV2 non è verificata. Per far vedere che la proprietà SV2 non è verificata basta esibire due elementi $u, v \in Y$ tali che $u + v \notin Y$. Possiamo scegliere $u = (1, 0)$ e $v = (0, 1)$ che sono elementi di Y mentre $u + v = (1, 1)$ non lo è.

Nel caso dell'insieme Z la proprietà SV3 non è verificata. Come nel caso precedente basta mostrare che esiste un $\lambda \in \mathbb{R}$ e un $u \in Z$ tali che $\lambda u \notin Z$. Scegliamo $\lambda = -1$ e $u = (1, 1)$. Allora $u \in Z$ ma $\lambda u = (-1, -1) \notin U$.

3.4. **Esempio: iperpiani in $\mathbb{K}^n$.** Dati $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ Consideriamo l'insieme

$$U = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n \,:\, a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0\}.$$

Dimostriamo che U è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^n$.

SV1: $O_{\mathbb{K}^n} \in U$ ovvero $(0, \ldots, 0) \in \mathbb{K}^n$. Infatti $a_1 \cdot 0 + \cdots + a_n \cdot 0 = 0$.

SV2: Dobbiamo verificare che se $u = (x_1, \ldots, x_n) \in U$ e $v = (y_1, \ldots, y_n) \in U$ allora $u + v = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \in U$. Infatti se u e v sono elementi di U abbiamo

$$\begin{aligned} a_1(x_1 + y_1) + \cdots + a_n(x_n + y_n) &= a_1x_1 + a_1y_1 + \cdots + a_nx_n + a_ny_n \\ &= a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + a_1y_1 + \cdots + a_ny_n \\ &= 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

In questi passaggi la prima e la seconda uguaglianza sono conseguenza delle proprietà distributiva e commutativa della somma e del prodotto in $\mathbb{K}$, mentre la terza è dovuta al fatto che $u, v \in U$. Quindi $u + v \in U$.

SV3: Dobbiamo verificare che se $u = (x_1, \ldots, x_n) \in U$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ allora $\lambda \cdot u = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n x_n) \in U$. Infatti se $u \in U$ allora

$$\begin{aligned} a_1(\lambda x_1) + \cdots + a_n(\lambda x_n) &= \lambda(a_1x_1 + \cdots + a_nx_n) \\ &= \lambda\, 0 = 0 \end{aligned}$$

In questi passaggi la prima uguaglianza è conseguenza delle proprietà associativa e commutativa della somma e del prodotto in $\mathbb{K}$, mentre la seconda è dovuta al fatto che $u \in U$. Quindi $\lambda u \in U$.

3.5. **Esempio: i polinomi $\mathbb{R}[x]$.** Consideriamo l'$\mathbb{R}$-spazio vettoriale $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, che ricordiamo essere l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$. Siu $U = \mathbb{R}[x] \subset V$ il sottoinsieme dei polinomi. U è un sottospazio vettoriale di V. Infatti,

SV1: la funzione 0_V che vale sempre zero, è il polinomio nullo che è un elemento di U.

SV2: se $f(x), g(x) \in U$, cioè sono due polinomi, allora anche la loro somma è un polinomio.

SV3: se $f(x) \in U$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, allora la moltiplicazione di λ per $f(x)$ è ancora un polinomio e quindi appartiene a U.

3.6. **Esempio: $\mathbb{K}[x]$ e i polinomi di grado minore o uguale n.** Ci sono alcune varianti dell'esempio precedente, per esempio, invece delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, possiamo prendere le funzioni da $\mathbb{C}$ in $\mathbb{C}$ e come sottospazio l'insieme dei polinomi a coefficienti complessi, Questo lo indicheremo con $\mathbb{C}[x]$. Oppure, invece di prendere tutti i polinomi, possiamo prendere solo i polinomi di grado minore o uguale a n che indicheremo con $\mathbb{R}[x]_{\leqslant n}$, nel caso si prendano i polinomi a coefficienti reali o $\mathbb{C}[x]_{\leqslant n}$ nel caso dei polinomi a coefficienti complessi.

3.7. **Esempio: $\{0\}$ e V, i sottospazi banali.** Se V è uno spazio vettoriale allora $U = V$ è esso stesso un sottospazio vettoriale, così come anche $U = \{0\}$. A volte ci riferiremo a questi sottospazi come ai sottospazi banali. Mentre diremo che un sottospazio è proprio se è diverso V.

Esercizio 4. Dimostrare che $\mathbb{R}[x]_{\leqslant n}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x]$. È vero che la somma di due polinomi di grado esattamente n è un polinomio di grado esattamente n?

Esercizio 5. Si considerino i seguenti sottoinsiemi dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$. Quali sono sottospazi vettoriali?

$$\begin{aligned}
T &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3x + 4y = 0\} \\
U &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3x + 4y = 1\} \\
W &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 0\} \\
X &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = -1\} \\
Z &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4xy + 4y^2 = 0\}
\end{aligned}$$

Nei casi in cui è un sottospazio si devono verificare le tre proprietà che caratterizzano i sottospazi, nei casi in cui non è un sottospazio basta fare un esempio che mostra che almeno una di queste proprietà fallisce. [Si,No,No,Si,No,No,Si]

Esercizio 6. Si considerino i seguenti sottoinsiemi dello spazio vettoriale $\mathcal{F}(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$. Quali sono sottospazi vettoriali?

$$\begin{aligned} U &= \{f(x) \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}, \mathbb{R}) : f(1) = 0 \ e \ f(2) = 0\} \\ W &= \{f(x) \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}, \mathbb{R}) : f(1)f(2) = 0\} \\ X &= \{f(x) \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}, \mathbb{R}) : f(-x) = f(x) \text{ per ogni } x \in \mathbb{Z}\} \\ Y &= \{f(x) \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}, \mathbb{R}) : f(x+1) = 2f(x) \text{ per ogni } x \in \mathbb{Z}\} \\ Z &= \{f(x) \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}, \mathbb{R}) : f(x+1) = f(x) + 1 \text{ per ogni } x \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

Nei casi in cui è un sottospazio si devono verificare le tre proprietà che caratterizzano i sottospazi, nei casi in cui non è un sottospazio basta fare un esempio che mostra che almeno una di queste proprietà fallisce. [Si,No,Si,Si,No]

4. Intersezione e unione di sottospazi vettoriali

Studiamo ora l'intersezione di sottospazi vettoriali. In $\mathbb{R}^3$ quando interseco due piani distinti passanti per l'origine ottengo una retta. Questo è un esempio di una affermazione più generale.

Lemma 4.1. *Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e siano $U, W \subset V$ due $\mathbb{K}$-sottospazi vettoriali. Allora $U \cap W$ è un sottospazio vettoriale.*

Dimostrazione. Anche in questo caso dobbiamo verificare che $U \cap V$ verifica le tre proprietà che caratterizzano i sottospazi vettoriali.

SV1: 0_V è sia un elemento di U che di W e quindi è un elemento di $U \cap W$.

SV2: Siano $v, v' \in U \cap W$. Poiché $v, v' \in U$, e U è un sottospazio vettoriale anche $v + v' \in U$. Similmente verifichiamo che $v + v' \in W$. Quindi $v + v' \in U \cap W$.

SV3: Sia $\lambda \in \mathbb{K}$ e $v \in U \cap W$. Poiché $v \in U$, e U è un sottospazio vettoriale anche $\lambda v \in U$. Similmente verifichiamo che $\lambda v \in W$. Quindi $\lambda v \in U \cap W$. □

4.1. **Esempio: l'unione di sottospazi non è un sottospazio.** L'unione non è detto sia un sottospazio vettoriale. Facciamo un esempio che utilizzeremo spesso. Sia $V = \mathbb{R}^2$ e sia $U = \mathbb{R}_1^e$, ovvero l'asse delle x, e $W = \mathbb{R}e_2$, ovvero l'asse delle y, sono sottospazi vettoriali. In particolare $u = e_1, v = e_2 \in U \cup W$, ma $u + v = e_1 + e_2 = (1,1) \notin U \cup W$ e quindi $U \cup W$ non verifica SV2.

Esercizio 7. Siano U e W due sottospazi vettoriali dello spazio vettoriale V. Se $U \cup W$ è un sottospazio vettoriale allora $U \subset W$ o $W \subset U$.

5. Somma di sottospazi vettoriali

Nella sezione precedente abbiamo visto che l'unione di due sottospazi vettoriali non è quasi mai un sottospazio vettoriale. C'è però un minimo sottospazio che contiene l'unione che si chiama la somma.

Definizione 5.1 (Somma di sottospazi vettoriali)**.** Siano U e W due sottospazi vettoriali di V. Definiamo la somma di U e W nel seguente modo

$$U + W = \{u + w \,:\, u \in U \text{ e } w \in W\}.$$

5.1. **Esempio.** Consideriamo $V = \mathbb{R}^3$, U l'asse delle x e W l'asse delle y. Allora $U + W$ è il piano x, y. Infatti i vettori di U sono i vettori della forma $u = (x, 0, 0)$ e quelli di W sono i vettori della forma $w = (0, y, 0)$. Quindi $u + w = (x, y, 0)$ è un punto del piano x, y e viceversa ogni punto di questo piano si può scrivere come somma di un vettore in U e uno in W.

Nella prossima proposizione dimostriamo che $U + W$ è anch'esso un sottospazio vettoriale e che contiene sia U che W.

Proposizione 5.2. *Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e siano U e W due $\mathbb{K}$-sottospazi vettoriali. Allora*

a) $U + W$ è un $\mathbb{K}$-sottospazio vettoriale.
b) $U + W \supset U \cup W$.

Dimostrazione. a) Dobbiamo verificare le tre proprietà che caratterizzano i sottospazi vettoriali

SV1: 0_v è sia un elemento di U che di W. Quindi scegliendo $u = 0_V$ e $w = 0_V$ otteniamo che $u + w = 0_V$ è un elemento di $U + W$.

SV2: siano v e v' due elementi di $U + W$. Quindi esistono $u, u' \in U$ e $w, w' \in W$ tali che $v = u + w$ e $v' = u' + w'$. Essendo U e W sottospazi, ricaviamo anche che $u'' = u + u' \in U$ e $w'' = w + w' \in W$.

Ne ricaviamo che $v + v' = u + u' + w + w' = u'' + w''$ è un elemento di $U + W$.

SV3: sia $\lambda \in \mathbb{K}$ e sia $v \in U + W$. Allora esistono $u \in U$ e $w \in W$ tali che $v = u + w$. Essendo U e W sottospazi, ricaviamo anche che $u' = \lambda u \in U$ e $w' = \lambda w \in W$.

Ne ricaviamo che $\lambda v = \lambda u + \lambda w = u' + w'$ è un elemento di $U + W$.

b) Dobbiamo far vedere che ogni elemento di U è un elemento di $U + W$ e che ogni elemento di W è un elemento di $U + W$. Dimostriamo la prima di queste due affermazioni, la seconda si dimostra in modo del tutto analogo scambiando il ruolo di U e W. Sia $u \in U$ e scegliamo $w = 0_V$ che è un elemento di W perché W è un sottospazio vettoriale. Quindi $u = u + 0_V = u + w$ è un elemento di $U + W$. □

Nella prossima proposizione facciamo vedere che $U + W$ è il più piccolo sottospazio di V che contiene $U \cup W$. Esprimiamo questo fatto dicendo che ogni altro sottospazio Z che contiene $U \cup W$ contiene anche $U + W$, ovvero dicendo che Z è più grande (o uguale) di $U + W$.

Proposizione 5.3. *Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e siano U e W due $\mathbb{K}$-sottospazi vettoriali. Se Z è un sottospazio vettoriale di V e $Z \supset U \cup W$ allora $Z \supset U + W$.*

Dimostrazione. Dobbiamo far vedere che un elemento v di $U + W$ è anche un elemento di Z. Infatti se v è un elemento di $U + W$ allora $v = u + w$ con $u \in U$ e $w \in W$. Poiché U e W sono sottoinsiemi di Z abbiamo che u e w sono anche elementi di Z, e poiché Z è un sottospazio vettoriale abbiamo anche che $v = u + w \in Z$. □

6. Altri esercizi

Esercizio 8. Sia $V, +_V, \cdot_V, 0_V$ il seguente spazio vettoriale su $\mathbb{R}$: come insieme $V = \mathbb{R}^+$, $0_V = 1$ e somma e prodotto sono definite nel modo seguente

$$x +_V y = xy \qquad \lambda \cdot_V x = x^\lambda$$

per $x, y \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Verificare che è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

Esercizio 9. Siano U e W due spazi vettoriali e sia $V = U \times W$. Su V definisco 0_V, somma e prodotto per scalare nel seguente modo:

$$(u, w) +_V (u', w') = (u + u', w + w') \qquad \lambda \cdot_V (u, w) = (\lambda u, \lambda w) \qquad 0_V = (0, 0)$$

per ogni $u, u' \in U$, $w, w' \in W$ e $\lambda \in K$. Si verifichi che V è uno spazio vettoriale.

Esercizio 10. Sia $\mathcal{R}$ una retta passante per l'origine di $\mathbb{R}^3$ e sia Π il piano ortogonale a $\mathcal{R}$ passante per l'origine. Si determini $\mathcal{R} \cap \Pi$ e $\mathcal{R} + \Pi$.

Esercizio 11. Dimostrare che gli unici sottospazi di $\mathbb{R}^2$ sono $\{0\}$ le rette per l'origine e tutto $\mathbb{R}^2$.