Indicazioni per lo studio e per gli esercizi per casa. Questo file di esercizi sarà aggiornato durante l'anno. In particolare in questa sezione comparirà a fine settimana una indicazione di quello che è stato fatto durante la settimana e la lista degli esercizi che si consiglia di svolgere per la successiva.

Chi cerca invece gli esercizi dei compiti con soluzioni (a volte complete a volte solo tracce) li trova alla voce compiti degli anni passati alla pagina web del corso.

Prima settimana. Questa settimana abbiamo ricordato alcune definizioni fondamentali sugli insiemi e sulle funzioni. Il materiale fatto questa settimana lo trovate nelle note del primo semestre, la prima lezione. Per chi segue le lezioni consiglio vivamente di dare una occhiata a queste, perché seguono molto da vicino le lezioni.

Per casa potete fare gli esercizi 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7, 1.8, 1.9, 1.10, 1.11, 1.12 e gli esercizi 2.1 e 2.2, 2.3. Sono tanti e alcuni sono lunghi, quindi se non avete il tempo di farli tutti suggerisco di fare l'1.2 o l'1.3, l'1.4, l'1.6, l'1.8, l'1,9, il 2.1 e il 2.2. Per esperienza, alcuni troveranno l'1.9 non facile ma e' utile averci provato almeno un po' prima di vedere la soluzione. Se trovate difficoltà a farli provate a soffermarvi sul primo di questo esempi, quello dell'esercizio 1.9 e chiedetevi, come abbiamo fatto a lezione, se 1 appartiene all'insieme, se 0 appartiene all'insieme e cosi' via. Quando vi siete fatti un'idea provate a motivare la risposta.

Seconda settimana. Questa settimana abbiamo iniziato a studiare la geometria del piano e dello spazio. Abbiamo introdotto la somma, la moltiplicazione per un numero e il prodotto scalare. Abbiamo descritto rette e piani in $\mathbb{R}^3$. Gli argomenti di questa settimana li potete trovare nella prima nota sulla geometria del piano e dello spazio.

Potete fare gli esercizi 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5, 4.6. 4.7, 4.8, 4.10. Consiglio in particolare di fare almeno il 4.3, il 4.5, il 4.6 e il 4.7.

Terza settimana. Questa settimana abbiamo fatto ancora qualche esercizio sulla geometria del piano e dello spazio e abbiamo visto come descrivere proiezioni ortogonali e simmetrie rispetto ad un piano (questo materiale lo trovare nella prima e nella seconda nota sulla geometria del piano e dello spazio). Abbiamo inoltre dato la definizione di spazio e sottospazio vettoriale (questo argomento lo trovate nella prima nota sugli spazi vettoriali).

Potete fare gli esercizi dal 4.11 al 4.15 e i primi 7 esercizi della sezione 5. Consiglio di fare almeno il 4.12. il 4.13, almeno una parte del 5.1 e del 5.2, il 5.3, e il 5.4.

Quarta settimana. Questa settimana abbiamo dato la definizione di spazio vettoriale, di sottospazio vettoriale, di somma di sottospazi, di base di uno spazio vettoriale, di coordinate rispetto ad una base, di insieme di generatori e di sottospazio generato.

Potete fare gli esercizi 5.8, 5.11, 512, 6.1 (senza la parte relativa ai vettori linearmente indipendenti) il 6.2, il 6.4, il 6.6, il 6.7, il 6.8 e il 6.11.

1. Esercizi sui prerequisiti

Questi esercizi riguardano argomenti che nel corso sono stati solo velocemente richiamati durante la prima settimana e che il corso presuppone noti dalle superiori. Si tratta di qualche nozione di calcolo proposizionale, di insiemistica, di trigonometria e coordinate polari.

Esercizio 1.1. Scrivere il numero $1,2\overline{345}$ come frazione. Scrivere la frazione $11/7$ come numero con la virgola.

Esercizio 1.2. In una classe di Ingegneria meccanica di 200 studenti tutti hanno almeno dato un esame tra analisi, geometria e fisica al primo appello utile. 160 hanno dato analisi, 70 geometria, 60 fisica, 15 hanno dato analisi e geometria, ma non fisica e 25 analisi e fisisca ma non geometria. Gli studenti che hanno dato sia geometria che fisica hanno dato anche analisi. Quanti sono gli studenti che hanno almeno due esami?

Esercizio 1.3. In una classe di Ingegneria meccanica di 250 studenti tutti hanno almeno dato un esame tra analisi, geometria e fisica al primo appello utile. 150 hanno dato analisi, 100 geometria, 75 fisica, e 15 tutti e tre gli esami. Gli studenti che hanno dato sia geometria che fisica hanno dato anche analisi. Quanti sono gli studenti che hanno almeno due esami?

Esercizio 1.4. Sia

$$A = \{1, 2, 3, 5\} \qquad B = \{x \in \mathbb{N} : x^2 = 9 \text{ o } x^2 = 16\} \quad \text{e} \quad C = \{4, 6, 7\}$$

Si descrivano gli insiemi

$$A \setminus B \qquad C \times (A \setminus B) \qquad (A \times B) \cap (C \times B).$$

elencandone gli elementi.

Esercizio 1.5. Sia $A = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ e sia $B = \{x^2 \,:\, x \in A\}$. Si calcoli $card(B)$.

Esercizio 1.6. Siano A e B due sottoinsiemi dell'insieme C, ovvero contenuti in C. Sia

$$D = \{x \in C \,:\, \text{ se } x \in A \text{ allora } x \in B\}$$

Capire chi è l'insieme D. Si faccia un disegno di A, B e C e si colori l'insieme D.

[provate a fissare x in C e cercate di capire se per quel dato x la frase " se $x \in A$ allora $x \in B$" sia vera o meno. Sulla correzione di questo esercizio ci soffermeremo.]

Esercizio 1.7. Sia $D = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 9 = 0\}$ e sia $E = \{x \in \mathbb{R} : x + 1 \in D\}$ ed $F = \{x + 1 : x \in D\}$. Si elenchino gli elementi di D, E ed F.

Esercizio 1.8. Siano A e B come nell'esercizio 1 e sia $G = \{x + 1 \,:\, x \in B\}$. Si dica quali delle seguenti frasi è vera?

a) esiste $a \in A$
b) $5 \in A \cap B$
c) esiste $a \in A$ tale che $a \in B$
d) per ogni $a \in A$ è vero anche che $a \in B$
e) se $a \in A$ allora $a \in B$
f) per ogni $x \in G$ esiste $y \in B$ tale che $x = y + 1$
g) per ogni $x \in G$ e per ogni $y \in B$ è vero che $x = y + 1$

Esercizio 1.9. Si dia una descrizione più esplicita dei seguenti insiemi

$$\{x \in \mathbb{R} \,:\, \forall y \in \mathbb{R},\ x = xy\}$$
$$\{x \in \mathbb{R} \,:\, \forall y \in \mathbb{R}\ \exists z \in \mathbb{R} \text{ tale che } x + y + z = 0\}$$
$$\{x \in \mathbb{R} \,:\, \exists z \in \mathbb{R} \text{ tale che } \forall y \in \mathbb{R},\ x + y + z = 0\}$$

Esercizio 1.10. Si dia una descrizione più esplicita dei seguenti insiemi

$$\{x \in \mathbb{R} \,:\, \forall y \in \mathbb{R},\ \forall z \in \mathbb{R}, y + xz = 0\}$$
$$\{x \in \mathbb{R} \,:\, \forall y \in \mathbb{R},\ \exists z \in \mathbb{R} \text{ tale che } y + xz = 0\}$$
$$\{x \in \mathbb{R} \,:\, \exists y \in \mathbb{R},\ \text{tale che } \forall z \in \mathbb{R}, y + xz = 0\}$$
$$\{x \in \mathbb{R} \,:\, \exists y \in \mathbb{R},\ \exists z \in \mathbb{R} \text{ tale che } y + xz = 0\}$$
$$\{x \in \mathbb{R} \,:\, \forall z \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R} \text{ tale che } y + xz = 0\}$$
$$\{x \in \mathbb{R} \,:\, \exists z \in \mathbb{R},\ \text{tale che } \forall y \in \mathbb{R} y + xz = 0\}$$

Esercizio 1.11. Si dia una descrizione più esplicita dei seguenti insiemi

$$\{x \in \mathbb{R} \,:\, \forall y \in \mathbb{R}\ \exists z \in \mathbb{R} \text{ tale che } x\,z = x\,z\,y^2\}$$
$$\{x \in \mathbb{R} \,:\, \exists y \in \mathbb{R} \text{ tale che } \forall z \in \mathbb{R},\ x\,z = x\,z\,y^2\}$$
$$\{x \in \mathbb{R} \,:\, \forall y \in \mathbb{R}\ \exists z \in \mathbb{R} \text{ tale che } x\,z = x\,y^2\}$$
$$\{x \in \mathbb{R} \,:\, \exists y \in \mathbb{R} \text{ tale che } \forall z \in \mathbb{R},\ x\,z = x\,y^2\}$$

Esercizio 1.12. Si proponga una formula sulla cardinalità dell'unione di tre insiemi simile a quella fatta in classe per l'unione di due insiemi.

Esercizio 1.13. Determinare le coordinate cartesiane dei punti che hanno le seguenti coordinate polari senza usare la calcolatrice

$$\rho = 5, \alpha = 3\pi/2 \qquad \rho = 3, \alpha = 5\pi/4 \qquad \rho = 2, \alpha = -\pi/3 \qquad \rho = 4, \alpha = -\pi/6$$

Esercizio 1.14. Determinare le coordinate polari dei punti che hanno le seguenti coordinate cartesiane senza usare la calcolatrice

$$(-2,-2), \qquad (3,-3\sqrt{3}), \qquad (-1,1)$$

Esercizio 1.15. Determinare le coordinate cartesiane dei punti che hanno le seguenti coordinate polari usando la calcolatrice

$$\rho = 5, \alpha = 1,1 \qquad \rho = 3, \alpha = \pi/7 \qquad \rho = 2, \alpha = 2 \qquad \rho = 4\sqrt{3}, \alpha = -\pi/9$$

Esercizio 1.16. Determinare le coordinate polari dei punti che hanno le seguenti coordinate cartesiane usando la calcolatrice

$$(-2,-3), \qquad (3,5), \qquad (4,1)$$

2. Esercizi sui prerequisiti: concetti di base sulle funzioni

Queste esercizi riguardano alcuni concetti riguardanti le funzioni, che supponiamo noti dalle superiori, e che verranno richiamati più avanti nel corso. Altri esercizi simili, forse leggermente più semplici li trovate nella nota sui prerequisiti.

Esercizio 2.1. Sia $A = \{2,3,5\}$ e $B = \{3,7,9\}$. Siano $f : A \longrightarrow B$ e $g : B \longrightarrow A$ definite nel modo seguente

$$f(2) = 7 \qquad f(3) = 9 \qquad f(5) = 7 \qquad g(3) = 5 \qquad g(7) = 2 \qquad g(9) = 3$$

Si dica quali sono il dominio, il codominio e l'immagine di f e g. Si dica se una delle due funzioni è surgettiva. Fare un diagramma che rappresenta le funzioni.

Esercizio 2.2. Siano f e g come nell'esercizio precedente. Si dica quali delle seguenti frasi è vera?

a) $f(5) = 2$
b) $f(5) = 2$ o $g(3) = 5$ [si chiede di valutare la veridicità della frase complessiva non delle singole affermazioni che la compongono]
c) $f(5) = 2$ e $g(3) = 5$ [si chiede di valutare la veridicità della frase complessiva non delle singole affermazioni che la compongono]
d) per ogni $y \in Im(f)$ esiste $x \in A$ tale che $f(x) = y$
e) per ogni $y \in Im(f)$ e per ogni $x \in A$ è vero che $f(x) = y$
f) esiste $b \in B$ tale che per ogni $a \in A$ è vero che $f(a) = b$
g) per ogni $b \in B$ esiste $a \in A$ tale che $f(a) = b$
h) esistono $a \in A$ e $b \in B$ tali che $f(a) = b$ e $g(b) = a$.

Esercizio 2.3. Sia $\mathbb{R}_+$, l'insieme dei numeri reali maggiori o uguali a 0. Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ definita da $f(x) = x^2$ e sia $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ definita dalla stessa formula $g(x) = x^2$. Dire se f e g sono iniettive o surgettive.

Esercizio 2.4. Sia $A = \{-1,1,3,4\}$, $B = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Sia $f : A \longrightarrow \mathbb{Z}$ definita da $f(n) = n^2 - 1$. Determinare l'immagine di f e calcolare $f^{-1}(B)$.

Esercizio 2.5. Dire quali tra le seguenti funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ sono iniettive e quali surgettive.

$$f(x) = x^3 - x; \qquad g(x) = x^4 - x^2 + 1; \qquad h(x) = x + 7.$$

Per le funzioni che sono sia iniettive che surgettive determinare l'inversa.

Esercizio 2.6. Siano $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definite da $f(x) = x^2 + 4x$ e $g(x) = x^2 - 1$. Determinare l'immagine di f, di g e di $f \circ g$.

Esercizio 2.7. Siano $f, g, h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ le funzioni $f(x) = x^2 - 2x - 3$, $g(x) = x^2 - 3$ e $h = f \circ g$. Sia $A = [-5,5]$. Determinare $f^{-1}(A)$ e $h^{-1}(A)$.

Esercizio 2.8. Sia $\mathbb{R}_+$, l'insieme dei numeri reali maggiori o uguali a 0. Sia $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ definita da $f(x) = x^2 + 2x$. Si dimostri che f è bigettiva e se ne calcoli l'inversa.

Esercizio 2.9. Sia $f : X \longrightarrow Y$.

- Si dimostri che se f è bigettiva allora $f \circ f^{-1} = id_Y$ e $f^{-1} \circ f = id_X$.
- Viceversa si dimostri che se esistono $g, h : Y \longrightarrow X$ tali che $f \circ g = id_Y$ e $h \circ f = id_X$ allora f è bigettiva e $g = h = f^{-1}$.
- Si dia un esempio di una funzione f che non sia bigettiva, per la quale esiste $g : Y \longrightarrow X$ tale che $f \circ g = id_Y$.

Esercizio 2.10. Sia $f : X \longrightarrow Y$ e sia $g : Y \longrightarrow Z$. Si dimostri che se f e g sono bigettive, allora anche $g \circ f$ lo è e $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

Esercizio 2.11. Sia $f : X \longrightarrow Y$ e sia $g : Y \longrightarrow Z$. Si dimostri che

- se $g \circ f$ è iniettiva, allora f è iniettiva.
- se $g \circ f$ è surgettiva, allora g è surgettiva.
- fare un esempio in cui $g \circ f$ è bigettiva, ma f non è surgettiva e g non è iniettiva.

3. Numeri complessi

Esercizio 3.1. Si definisca un campo che ha soli due elementi. [questo esercizio non ha nessuna importanza per il proseguio del corso, rimarrà come una curiosità]

Esercizio 3.2. Sia K un campo. Si dimostrino le seguenti affermazioni:

a) Se $a, b \in K$ e $b \neq 0$ allora $(\frac{a}{b}) \cdot_K b = a$.
b) Se $a, b, c \in K$ e $a +_K c = b +_K c$ allora $a = b$.
c) Se $a \in K$ allora $0 \cdot_K a = 0_K$.
d) Se $a, b \in K$ e $a \cdot_K b = 0_K$ allora $a = 0_K$ o $b = 0_K$.
e) Se $a, b \in K$ allora $(-a) \cdot_K b = -(a \cdot_K b)$.
f) Se $a, b \in K$ allora $(-a) \cdot_K (-b) = a \cdot_K b$.

Esercizio 3.3. Sia $K = \mathbb{R}_+$ sia $0_K = 1$ e $1_K = 10$. Definiamo somma e prodotto come segue

$$a +_K b = a \cdot b \qquad a \cdot_K b = a^{\log_{10} b}.$$

Si dimostri che K con questa scelta del prodotto e della somma dell'elemento zero e dell'elemento uno è un campo.

Esercizio 3.4. Completate la dimostrazione che i numeri complessi sono un campo.

Esercizio 3.5. Dimostrate, seguendo il procedimento fatto in classe, che se w è un numero complesso allora l'equazione $z^2 = w$ ha sempre soluzione.

Esercizio 3.6. Calcolare $(1 + i)^2$. Calcolare $(3 + 4i) \cdot (3 - 2i)$.

Esercizio 3.7. Sia $z = 3 + 4i$ e $w = 7 - 3i$. Calcolare $\bar{z}/w$ e $z \cdot \bar{w}$.

Esercizio 3.8. Verificare che per ogni $z \in \mathbb{C}$ si ha $\overline{\overline{z}} = z$.

Esercizio 3.9. Calcolare le radici quadrate complesse dei seguenti numeri:

$$37, \quad -169, \quad ,9i, \quad -\frac{3}{4} + i, \quad 3 + 7i.$$

(ogni tanto vi verranno dei numeracci)

Esercizio 3.10. Risolvere le seguenti equazioni dove z è un numero complesso

$$(1 + i)z + 14 = 0, \quad z^2 + 5z + 10 = 0, \quad (1 + i)z^2 + \sqrt{3}z - \frac{1}{2} - \frac{i}{2} = 0$$

(ogni tanto vi verranno dei numeracci)

Esercizio 3.11. Calcolare le radici quarte di -16 (ovvero gli z tali che $z^4 = -16$). Calcolare le radici ottave di 1 (ovvero gli z tali che $z^8 = 1$). [utilizzare le coordinate polari].

Esercizio 3.12. Determinare tutti i numeri complessi z tali che $z^4 = \bar{z}^3$.

Esercizio 3.13. Determinare tutti i numeri complessi z tali che

$$\frac{z - i}{z + i}$$

è un numero reale.

Esercizio 3.14. Determinare tutti i numeri complessi z tali che

$$\frac{|z - i|}{|z + i|} = 2.$$

Esercizio 3.15. Determinare tutti i numeri complessi z tali che $e^z = e$.

Esercizio 3.16. Risolvere le seguenti equazioni, dove $z \in \mathbb{C}$:

$$(z-\bar{z})^3 = i \qquad z^2 + (i-1)z - i = 0 \qquad z^3 = iz\bar{z}$$

Esercizio 3.17 (Daddi)**.** Si determini il valore del parametro reale k in modo che l'equazione $z^2 + (3 + k\,i)\,z = 8 - 9\,i$ abbia, tra le sue soluzioni, il numero complesso $2 - i$. Si determini poi l'altra soluzione dell'equazione.

Esercizio 3.18. Risolvere l'equazione $e^{3z} + 5e^{2z} + 7e^z = 0$.

Esercizio 3.19 (Daddi)**.** Si disegni nel piano complesso l'insieme rappresentato dal sistema

$$\begin{cases} |\mathrm{Im}(z - 2 + 4\,i)| \leqslant 1 \\ |z - 1 + 3\,i| > 3\,. \end{cases}$$

Esercizio 3.20. Sia $w = e^{\frac{2\pi\, i}{n}}$, allora $w^{n-1} + w^{n-2} + \cdots + w + 1 = 0$.

Esercizio 3.21. Si trovi una formula per l'ennessimo termine della successione x_n definita nel modo seguente:

$$x_0 = 0, \qquad x_1 = 1, \qquad x_{n+1} = 2x_n - 2x_{n-1}.$$

4. Geometria del piano e dello spazio

Esercizio 4.1. Siano dati i punti $p = (1, 2, 3)$, $q = (0, 1, -2)$, $r = (-2, 1, 1)$. Calcolare

$$p + 3q - r \qquad 3p - 2q + r$$

Esercizio 4.2. Siano dati i punti $p = (1, 2, 3)$, $q = (0, 1, -2)$, $r = (-2, 1, 1)$, $s = (1, 1, 1)$. Calcolare il baricentro dei quattro punti.

Esercizio 4.3. Siano dati i punti $p = (2, 3)$, $q = (0, 1)$, $r = (-2, 1)$, $s = (1, 1)$. Calcolare l'intersezione tra le rette pq e rs.

Esercizio 4.4 (Lombardo)**.** Sia dato un quadrilatero convesso $abcd$ nel piano. Si dimostri che esiste un punto comune ai segmenti congiungenti i punti medi dei lati opposti e al segmento congiungente i punti medi delle due diagonali. Di che punto si tratta?

Esercizio 4.5. Siano dati i punti $p = (1, 2, 3)$, $q = (0, 1, -2)$, $r = (-2, 1, 1)$. Calcolare lunghezza dei lati, perimetro e angoli del triangolo pqr. [per gli angoli usare la calcolatrice].

Esercizio 4.6. Siano dati i punti $p = (1, 2, 3)$, $q = (0, 1, -2)$. Descrivere la retta passante per p e q.

Esercizio 4.7. Sia dato il punto $p = (1, 2, 3)$ e il punto $q = (1, 1, 1)$.
a) Si descriva il piano passante per l'origine o ortogonale alla retta $0p$.
b) Si descriva il piano passante per q e ortogonale alla retta pq
c) Si descriva il piano passante per q e ortogonale a $0p$.

Esercizio 4.8. Sia abc un triangolo non degenere. Si dimostri che le tre altezze si incontrano in uno stesso punto.

Esercizio 4.9. Sia abc un triangolo non degenere. Sia p l'intersezione delle altezze (ortocentro), q l'intersezione delle mediane (baricentro) e r il centro del triangolo circoscritto (circocentro). Si dimostri che p, q, r giacciono su una stessa retta. [di questo esercizi trovate la soluzione sulle note]

Esercizio 4.10. Da un punto P esterno ad una circonferenza si tracci una retta che interseca il cerchio e siano A e B i due punti di intersezione (eventualmente coincidenti se la retta è tangente alla circonferenza). Si dimostri che

$$dist(A, P)\, dist(B, P) = d^2 - r^2$$

dove d è la distanza di P dal centro della circonferenza e r è il raggio della circonferenza.

Esercizio 4.11. Siano dati i punti $p = (1, 2, 3)$, $q = (0, 1, -2)$. Calcolare la proiezione di q sulla retta Op e la distanza di q da tale retta.

Esercizio 4.12. Siano dati i punti $p = (1, 2, 3)$, $q = (0, 1, -2)$, $r = (-2, 1, 1)$. Calcolare la proiezione di r sulla retta pq e la distanza di r da tale retta.

Esercizio 4.13. Sia π piano $x + y + z = 0$. Si calcoli la proiezione di $p = (1, 2, 3)$ su π e la distanza di p da π. Si calcoli inoltre il simmetrico di p rispetto a π.

Esercizio 4.14. Sia π piano $x + y + z = 1$. Si calcoli la proiezione di $p = (1, 2, 3)$ su π e la distanza di p da π. Si calcoli inoltre il simmetrico di p rispetto a tale piano.

Esercizio 4.15. Sia Π il piano di equazioni $ax + by + cz = d$. Si determini una formula per la distanza di un punto di coordinate (α, β, γ) da Π.

5. Spazi e sottospazi vettoriali

Esercizio 5.1. Si completi la dimostrazione che K^n è un K spazio vettoriale.

Esercizio 5.2. Si completi la dimostrazione che $\mathcal{F}(X, K)$ è un K spazio vettoriale.

Esercizio 5.3. Si considerino i seguenti sottoinsiemi dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$. Quali sono sottospazi vettoriali?

$$\begin{aligned}
T &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3x + 4y = 0\} \\
U &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3x + 4y = 1\} \\
V &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \\
W &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 0\} \\
X &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = -1\} \\
Y &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geqslant 0 \text{ e } y \geqslant 0\} \\
Z &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = e^x\}
\end{aligned}$$

Nei casi in cui è un sottospazio si devono verificare le tre proprietà che caratterizzano i sottospazi, nei casi in cui non è un sottospazio basta fare un esempio che mostra che almeno una di queste proprietà fallisce. [Si,No,No,Si,No,No,No]

Esercizio 5.4. Si considerino i seguenti sottoinsiemi dello spazio vettoriale $\mathcal{F}(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$. Quali sono sottospazi vettoriali?

$$\begin{aligned}
U &= \{f(x) \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}, \mathbb{R}) : f(1) = 0 \; e \; f(2) = 0\} \\
W &= \{f(x) \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}, \mathbb{R}) : f(1)f(2) = 0\} \\
X &= \{f(x) \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}, \mathbb{R}) : f(-x) = f(x) \text{ per ogni } x \in \mathbb{Z}\} \\
Y &= \{f(x) \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}, \mathbb{R}) : f(x + 1) = 2f(x) \text{ per ogni } x \in \mathbb{Z}\} \\
Z &= \{f(x) \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}, \mathbb{R}) : f(x + 1) = f(x) + 1 \text{ per ogni } x \in \mathbb{Z}\}
\end{aligned}$$

Nei casi in cui è un sottospazio si devono verificare le tre proprietà che caratterizzano i sottospazi, nei casi in cui non è un sottospazio basta fare un esempio che mostra che almeno una di queste proprietà fallisce. [Si,No,Si,Si,No]

Esercizio 5.5. Sia $V, +_V, \cdot_V, 0_V$ il seguente spazio vettoriale su $\mathbb{R}$: come insieme $V = \mathbb{R}^+$, $0_V = 1$ e somma e prodotto sono definite nel modo seguente

$$x +_V y = xy \qquad \lambda \cdot_V x = x^\lambda$$

per $x, y \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Verificare che è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

Esercizio 5.6. Siano U e W due spazi vettoriali e sia $V = U \times W$. Su V definisco O, somma e prodotto per scalare nel seguente modo:

$$(u, w) + (u', w') = (u + u', w + w') \qquad \lambda \cdot (u, w) = (\lambda u, \lambda w) \qquad 0 = (0, 0)$$

per ogni $u, u' \in U$, $w, w' \in W$ e $\lambda \in K$. Si verifiche che V è uno spazio vettoriale.

Esercizio 5.7. Si dimostri che se U e W sono due sottospazi vettoriali dello spazio vettoriale V allora $U \cap W$ è un sottospazio vettoriale di V.

Esercizio 5.8. Sia $\mathcal{R}$ una retta passante per l'origine di $\mathbb{R}^3$ e sia Π il piano ortogonale a $\mathcal{R}$ passante per l'origine. Si determini $\mathcal{R} \cap \Pi$ e $\mathcal{R} + \Pi$.

Esercizio 5.9. Dimostrare che gli unici sottospazi di $\mathbb{R}^2$ sono $\{0\}$ le rette per l'origine e tutto $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 5.10. Sia V uno spazio vettoriale su K. Allora $0 \cdot v = 0_V$ per ogni $v \in V$ e $\lambda \cdot 0_V = 0_V$ per ogni $\lambda \in K$.

Esercizio 5.11. Siano U e W due sottospazi dello spazio vettoriale V. Si dimostri che se $U \cup W$ è un sottospazio vettoriale di V allora $U \subset W$ o $W \subset U$.

Esercizio 5.12. Siano U, W e Z tre sottospazi vettoriali dello spazio vettoriale V. Dimostrare che se $Z \supset U \cup W$ allora $Z \supset U + W$.

6. Basi, generatori e vettori linearmente indipedenti

Esercizio 6.1. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ si considerino le seguenti liste di vettori:

$$u_1 = (1,1,1) \qquad u_2 = (1,0,0) \qquad u_3 = (0,1,0) \qquad u_4 = (0,0,1)$$
$$v_1 = (1,1,1) \qquad v_2 = (1,1,0)$$
$$w_1 = (1,1,1) \qquad w_2 = (1,1,0) \qquad w_3 = (1,-1,0)$$

Si dimostri u_1, u_2, u_3, u_4 sono generatori ma non sono linearmente indipendenti, che v_1, v_2 sono linearmente indipendenti ma non sono generatori e che w_1, w_2, w_3 è una base.

Esercizio 6.2. Trovare una base del sottospazio $x - y + 3z = 0$ di $\mathbb{C}^3$. Scrivere le coordinate di $(1,4,1)$ rispetto alla base scelta.

Esercizio 6.3. Si dimostri che i seguenti polinomi sono una base di $\mathbb{C}[t]_{\leqslant 2}$: $f_1(t) = \frac{1}{2}(t-1)(t-2)$, $f_2(t) = \frac{1}{2}t(t-1)$, $f_3(t) = -t(t-2)$. Sia $f = t^2$, scrivere le coordinate di f rispetto a f_1, f_2, f_3. Se f è un polinomio qualsiasi quali sono le coordinate di f rispetto alla base f_1, f_2, f_3. (C'è un modo molto sintetico ed efficace per farlo)

Esercizio 6.4. Sia X un insieme finito e K un campo e sia $V = \mathcal{F}_K(X)$ lo spazio vettoriale delle funzioni da X in K definito in classe. Per ogni $x \in X$ sia δ_x la funzione definita nel modo seguente:

$$\delta_x(y) = \begin{cases} 1 & \text{se } y = x; \\ 0 & \text{se } y \neq x. \end{cases}$$

Dimostrare che se $x_1, \dots, x_n$ sono gli elementi di X allora $\delta_{x_1}, \dots, \delta_{x_n}$ è una base di $\mathcal{F}_K(X)$.

Esercizio 6.5. Sia V uno spazio vettoriale V su K. Siano $u, v \in V$ e sia v diverso da zero. Dimostrare che u e v sono linearmente dipendenti se e solo se esiste $\lambda \in K$ tale che $u = \lambda v$.

Esercizio 6.6. Sia v_1, v_2, v_3, v_4 una base di uno spazio vettoriale V. Dimostrare che per ogni v in V i vettori v_1, v_2, v_3, v_4, v generano V ma non sono linearmente indipendenti.

Esercizio 6.7. Sia v_1, v_2, v_3, v_4 una base di uno spazio vettoriale V e sia $U = \mathrm{Span}(v_1, v_2)$ e $W = \mathrm{Span}(v_3, v_4)$. Determinare $U \cap W$ e $U + W$.

Esercizio 6.8. Siano $u_1, \dots, u_h, w_1, \dots, w_k$ e sia $U = \mathrm{Span}(u_1, \dots, u_h)$ e sia $W = \mathrm{Span}(w_1, \dots, w_k)$. Allora $U + W$ è generato da $u_1, \dots, u_h, w_1, \dots, w_k$. [Se aiuta sostituire h e k con 2 e 3]

Esercizio 6.9. Sia U e W due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V. Siano $u_1, u_2 \in U$ e $w_1, w_2 \in W$. Dimostrare che se $U \cap W = \{0\}$ e u_1, u_2 sono lineamente indipendenti e w_1, w_2 sono linearmente indipendenti allora u_1, u_2, w_1, w_2 sono linearmente indipendenti.

Esercizio 6.10. Siano $v_1, \dots, v_n \in V$ dei vettori linearmente indipendenti. Sia $v \in V$. Dimostrare che $v_1, \dots, v_n, v$ sono linearmente indipendenti se e solo se $v \notin \mathrm{Span}\{v_1, \dots, v_n\}$.

Esercizio 6.11. Si considerino i vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si verifichi che sono una base di $\mathbb{R}^4$ e si calcolino le cordinate dei seguenti vettori rispetto a questa base:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 6.12. Siano $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ due rette parallele non coincidenti nel piano e siano P e Q due punti distinti in $\mathcal{R}$. Sia V un punto non in $\mathcal{R}$ e siano A e B le intersezioni delle rette VP e VQ con $\mathcal{S}$. Sia C l'intersezione delle rette PB e QA a sia M l'intersezione di $\mathcal{R}$ con VC. Allora M è il punto medio di PQ.

7. Consegna del

Per chi vuole, ma siete consigliati di farlo, venerdi' 27 ottobre potete consegnare alcuni esercizi che vi saranno corretti in modo da ricevere un riscontro sia su quello che state capendo, sia su quello che ci si aspetta da voi, sia su come esporre la soluzione di un esercizio.

Potete consegnare **al massimo tre esercizi** tra quelli che trovate elencati qui sotto. Un esercizio deve essere scelto tra i primi due e due esercizi tra gli ultimi tre.

Vi consiglio di consegnare quelli sui quali pensate di poter dire qualcosa di sensato ma non vi sembrano ovvi.

Questi esercizi non avranno nessun peso sull'esame finale, se non vi fidate potete anche mettere un nome falso, serve solo per rintracciare il compito al momento della consegna. Potete collaborare, ma non ha nessun senso consegnare degli esercizi copiati integralmente da un'altra persona o di cui non abbiate capito la soluzione. Non saranno corretti esercizi scritti in modo illeggibile: questa e' una regola che vale anche per i compiti e i compitini. In questo caso, visto che avete tutto il tempo, ci aspettiamo consegniate una versione in bella degli esercizi e senza troppe cancellature.

Esercizio 7.1. Sia $\mathcal{S}$ la retta di $\mathbb{R}^3$ passante per i punti $P = (1, 0, 1)$ e $Q = (-1, -2, 3)$. Si determini la proiezione ortogonale di $R = (1, 1, 1)$ sulla retta $\mathcal{S}$.

Esercizio 7.2. Sia U una retta passante per l'origine in $\mathbb{R}^3$ e sia W il piano passante per l'origine ortogonale a U. Si determini $U \cap W$ e $U + W$.

Esercizio 7.3. Sia $V = \{(x, y, x) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - z = 0\}$. Sia $v_1 = (1, 0, 1)$ e $v_2 = (1, 1, 3)$. Si dimostri che v_1, v_2 è una base di V. Si calcolino le coordinate del vettore $v = (0, 1, 2)$ rispetto a questa base.

Esercizio 7.4. Sia v_1, v_2, v_3, v_4 una base dello spazio vettoriale V e sia $U = \mathrm{Span}\{v_1, v_2\}$ e $W = \mathrm{Span}\{v_3, v_4\}$. Si determini $U \cap W$ e $U + W$.

8. Teorema fondamentale, dimensione

Esercizio 8.1. Sia $u = (1, 2, 3)$ e sia $U = \mathbb{R}u$. Sia W il piano $3x - z = 0$. Trovare una base v_1, v_2, v_3 di $\mathbb{R}^3$ tale che

- v_1 è una base di U,
- v_1, v_2 è una base di W.

Esercizio 8.2. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e sia $W_1 \subset W_2 \subset \cdots W_n$ una successione di sottospazi di V tali che $\dim W_i = i$. Dimostrare che esiste una base $v_1, \ldots, v_n$ di V tale che per ogni i, i vettori $v_1, \ldots, v_i$ sono una base di W_i.

Esercizio 8.3. Siano U e W due spazi vettoriali di dimensione finita e sia $V = U \times W$ lo spazio vettoriale descritto nell'esercizio 5.6. Dimostrare che $\dim V = \dim U + \dim W$.

Esercizio 8.4. Si dimostri che lo spazio vettoriale dei polinomi $K[x]$ è uno spazio vettoriale di dimensione infinita, ovvero non ha una base.

9. Matrici

Esercizio 9.1. Descrivere una base delle spazio vettoriale delle matrici 2×2 a coefficienti reali.

Esercizio 9.2. Siano date le seguenti matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -8 & -5 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 7 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad H = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(1) Calcolare

$$L_A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \qquad L_D\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \qquad L_G\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

(2) Calcolare i prodotti $A \cdot A$, $B \cdot C$.
(3) Si può eseguire il prodotto $A \cdot D$? E il prodotto $D \cdot A$? calcolare quello dei due che si può eseguire.
(4) Calcolare $AB - BA$ e $BC - CB$.
(5) Calcolare $D \cdot G$ e $G^2 + G = G \cdot G + G$.
(6) Calcolare A^{101}.
(7) Calcolare $H \cdot G$ e $G \cdot H$.
(8) se M è una matrice $m \times 3$ e N è una matrice $3 \times n$ descrivere il prodotto $H \cdot N$ e $M \cdot H$.

Esercizio 9.3. È vero che se A e B sono matrici 2×2 e $A \cdot B = 0$ allora $A = 0$ o $B = 0$. Dimostrare che è vero o esibire un controesempio.

Esercizio 9.4. Siano $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tali che $ad - bc \neq 0$. Si considerino le matrici

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Si dimostri che $A \cdot B = B \cdot A = I_2$.

Esercizio 9.5. (1) Si dimostri che se A è una matrice 3×2 a coefficienti reali e non nulla, allora $Tr(A \cdot A^t) > 0$.
(2) Si dimostri che se A è una matrice $m \times n$ a coefficienti reali e non nulla allora $Tr(A \cdot A^t) > 0$.

Esercizio 9.6. Si consideri la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Si calcoli $Tr(A^{1001})$.

Definizione. Una matrice quadrata A si dice simmetrica se è simmetrica rispetto alla diagonale ovvero se $A^t = A$. Si dice invece antisimmetrica se $A^t = -A$. Indichiamo con Matsim_n l'insieme delle matrici simmetriche $n \times n$ e con Matant_n quello delle matrici antisimmetriche $n \times n$.

Esercizio 9.7. Si dimostri che Matsim_n è un sottospazio vettoriale di $\text{Mat}_{n\times n}$. Se ne determini una base nel caso di $n = 2$.

Esercizio 9.8. Si dimostri che Matant_n è un sottospazio vettoriale di $\text{Mat}_{n\times n}$. Se ne determini una base nel caso di $n = 3$.

Esercizio 9.9. Sia $K = \mathbb{R}$ o $K = \mathbb{C}$.
(1) Si determini $\text{Matsim}_n \cap \text{Matant}_n$.
(2) Si determini $\text{Matsim}_2 + \text{Matant}_2$.
(3) Si dimostri che $\text{Matsim}_n + \text{Matant}_n = \text{Mat}_{n\times n}$.

Esercizio 9.10. Sia A, B matrici $\ell \times m$ a coefficienti in K e $\lambda \in K$. Si dimostri che
(1) $(A + B)^t = A^t + B^t$ e $(\lambda A)^t = \lambda A^t$
(2) Se inoltre $\ell = m$ vale $\text{Tr}(A + B) = \text{Tr}(A) + \text{Tr}(B)$ e $\text{Tr}(\lambda A) = \lambda\,\text{Tr}(A)$.

[Se trovare questo esercizio ostico provate a farlo per matrici 2×2]

Esercizio 9.11. Sia A una matrice $m \times h$ e B una matrice $h \times n$. Si dimostri che
(1) $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$.
(2) Se inoltre $m = n$ vale $\text{Tr}(A \cdot B) = \text{Tr}(B \cdot A)$.

Esercizio 9.12. Sia data la matrice a coefficienti complessi:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

e supponiamo che esista una matrice 2×2, B tale che $A \cdot B = I_2$. Si dimostri che $ad - bc \neq 0$ e che B è uguale alla matrice scritta nell'esercizio 9.4

Esercizio 9.13. Sia A una matrice $m \times m$ invertibile. Dimostrare che A^t è invertibile e che $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

Esercizio 9.14. Siano A e B due matrici $m \times m$ invertibili. Dimostrare che AB è invertibile e che $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Esercizio 9.15. Sia
$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}$$
e sia B una matrice $3 \times m$ e C una matrice $m \times 3$. Calcolare $A \cdot B$ e $C \cdot A$. [Obiettivo dell'esercizio è capire che in questo caso il risultato è molto facile da descrivere. Se si hanno dei dubbi provare con $m = 2$ e B e C matrice concrete a vostra scelta per iniziare a farsi un'idea.]

Definizione. Una matrice quadrata $\ell \times \ell$, $A = (a_{ij})$ si dice diagonale se tutte le entrate fuori dalla diagonale sono zero. Un esempio tipico è la matrice A dell'esercizio precedente.

Una matrice quadrata $\ell \times \ell$, $A = (a_{ij})$ si dice triangolare superiore se tutte le entrate sotto la diagonale sono zero. Un esempio tipico è la matrice A dell'esercizio 8.2 o dell'esercizio 8.6

Esercizio 9.16. Dimostrare che il prodotto di due matrici triangolari è triangolare. [Se si ha poca dimestichezza con gli indici fare il caso di matrici 3×3.]

10. Applicazioni lineari

Esercizio 10.1. Quali delle seguenti applicazioni da $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^2$ è una applicazione lineare?

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3z + y \\ 5y \end{pmatrix} \qquad g\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + z \\ x \end{pmatrix} \qquad h\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y + z \\ 1 \end{pmatrix} \qquad k\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x - y \end{pmatrix}$$

$$a\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x \\ 0 \end{pmatrix} \qquad b\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x - e^y \\ z + x \end{pmatrix} \qquad c\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ x^2 \end{pmatrix} \qquad d\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |x| \\ |y| \end{pmatrix}$$

Esercizio 10.2. Sia $V = \mathbb{C}[t]$ e siano $G : V \longrightarrow V$, $G : V \longrightarrow \mathbb{C}^3$ e $H : \mathbb{C}^3 \longrightarrow V$ definite nel modo seguente:

$$F(p(t)) = (t^2 - 5t)p(t) \qquad G(p(t)) = \begin{pmatrix} p(1) \\ p(3) \\ p(7) \end{pmatrix} \qquad H\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x(t-1) + y(t-3) + z(t-7) + (t-8)$$

(1) dire quali tra F, G, H sono lineari.
(2) dire quali tra F, G, H sono iniettive?
(3) dire quali tra F, G, H sono surgettive?
(4) Determinare $G \circ H$ e $F \circ H$.

Esercizio 10.3. Sia $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + y + z \\ 2x + y \\ x + z \\ x + y - z \end{pmatrix}$$

(1) Si determini una matrice A tale che $F = L_A$;
(2) Si dica quali dei seguenti punti sono nel nucleo:
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
(3) Si dica quali dei seguenti punti sono nell'immagine:
$$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 10.4. Si consideri il piano W di equazione $x + y + 3z = 0$ in $\mathbb{R}^3$. Si descriva W come nucleo di una applicazione lineare $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ e come immagine di una applicazione lineare $G : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$. [La seconda parte dell'esercizio potrebbe risultare un po' più difficile della prima.]

Esercizio 10.5. Si consideri la retta W di $\mathbb{R}^3$ passante per l'origine e per il punto $(1, 2, 3)$. Si descriva W come immagine di una applicazione lineare $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ e come nucleo di una applicazione lineare $G : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$. [La seconda parte dell'esercizio potrebbe risultare un po' più difficile della prima.]

Esercizio 10.6. Sia $F : \mathbb{C}[t] \longrightarrow \mathbb{C}[t]$ l'applicazione lineare definita da $F(f) = f'$ la derivata rispetto a t di f. Si determini il nucleo e l'immagine.

Esercizio 10.7. Sia $V = \mathbb{C}[t]_{\leqslant 3}$ e sia $F : V \longrightarrow V$ definita da $F(p(t)) = p'(t) + p(t + 1)$. Si verifiche che è una applicazione lineare e si calcoli la matrice associata a F rispetto alla base standard di V in partenza e in arrivo.

Esercizio 10.8. Sia F la rotazione di $\mathbb{R}^2$ in senso antiorario di centro l'origine e angolo θ. Si scriva la matrice associata F rispetto alla base standard.

Esercizio 10.9. Sia $P : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la proiezione ortogonale di $\mathbb{R}^3$ sul piano di equazione $x + y + z = 0$. Si dimostri che P è lineare e si scriva la matrice associata a P rispetto alla base standard.

Esercizio 10.10. Sia $V = \mathrm{Mat}_{2\times 3}$ e $W = \mathrm{Mat}_{2\times 2}$. Sia inoltre

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Sia $R_A : V \longrightarrow W$ l'applicazione definita da $R_A(X) = X \cdot A$. Si dimostri che R_A è lineare e se ne calcoli la matrice associata rispetto alla basi standard in arrivo e in partenza.

Esercizio 10.11. Sia W il piano di $\mathbb{R}^3$ definito da $x + y - 2z = 0$ e sia $F : W \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'applicazione definita da

$$F \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 3z \\ x - y \end{pmatrix} \quad \text{per ogni} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in W$$

Si scelga una base di W e si scriva la matrice associata a F rispetto a questa base in partenza e alla base standard in arrivo.

Esercizio 10.12. Sia $F : V \longrightarrow W$ una applicazione lineare e siano $v_1, \dots, v_n \in V$. Si dimostri che

(1) se F è iniettiva e $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente indipendenti allora anche $F(v_1), \dots, F(v_n)$ sono linearmente indipendenti.
(2) se F è surgettiva e $v_1, \dots, v_n$ sono generatori allora $F(v_1), \dots, F(v_n)$ sono generatori.
(3) se F è bigettiva e $v_1, \dots, v_n$ è una base, allora $F(v_1), \dots, F(v_n)$ sono una base.

Esercizio 10.13 (Compito luglio 2017)**.** Sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ definito dall'equazione $2x + z = 0$, sia E lo spazio vettoriale delle matrici 2×2 e sia $T : W \longrightarrow E$ l'applicazione lineare definita da

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x + 2z \end{pmatrix} \qquad \text{per ogni} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in W.$$

Sia inoltre $S : \mathbb{R}^3 \longrightarrow E$ l'applicazione lineare definita da

$$S \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \text{per ogni} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in W \quad \text{e} \quad S \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) scegliere una base di W e una di E e scrivere la matrice associata a T rispetto a queste basi.
b) scrivere la matrice associata ad S rispetto alla basi standard di $\mathbb{R}^3$ ed E.

Esercizio 10.14 (Compitino febbraio 2017)**.** Sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ definito dall'equazione $x+y+z = 0$ e sia V il sottospazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 3 che si annullano in 1: $V = \{p(t) \in \mathbb{R}[t]_{\leqslant 3} \,:\, p(1) = 0\}$. Sia $F : W \longrightarrow V$ l'applicazione lineare definita da

$$F \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x + 2\,y\,t + z\,t^2 + (x + z)t^3$$

(per esempio $F(1, -1, 0)$ è il polinomio $1 - 2t + t^3$)

a) Si scelga una base di W e una di V e si scriva la matrice associata a F rispetto a queste basi.
b) Sia $G : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}[t]_{\leqslant 3}$ l'applicazione lineare tale che

$$G\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = 1+t \qquad \text{e} \qquad G\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = F\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \quad \text{se} \quad \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in W.$$

Scrivere la matrice associata a G rispetto alle basi standard di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}[t]_{\leqslant 3}$.

Esercizio 10.15. Sia data la seguente matrice 2×2:

$$M = \begin{pmatrix}4 & 1\\-2 & 1\end{pmatrix}$$

(1) si determini un vettore non nullo v_1 di $\mathbb{R}^2$ tale che $L_M(v_1) = 2v_1$;
(2) si determini un vettore non nullo v_2 di $\mathbb{R}^2$ tale che $L_M(v_2) = 3v_2$;
(3) si calcoli M^{100}.

Esercizio 10.16 (Compito 5 giugno 2017)**.** Sia $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare che ha come matrice associata rispetto alla base canonica la matrice

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & -1\\-1 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

a) Dire se esistono due basi u_1, u_2, u_3 e v_1, v_2, v_3 di $\mathbb{R}^3$ tale che $[F]^{u_1,u_2,u_3}_{v_1,v_2,v_3}$ è diagonale.
b) Dire se esiste una base v_1, v_2, v_3 di $\mathbb{R}^3$ tale che $[F]^{e_1,e_2,e_3}_{v_1,v_2,v_3}$ è diagonale.

Esercizio 10.17. Esiste una applicazione lineare da $\mathbb{R}^5$ a $\mathbb{R}^2$ iniettiva? e una surgettiva?

Esercizio 10.18 (Compitino febbraio 2017)**.** a) Si enunci il teorema della dimensione.
b) Esistono due applicazioni lineari

$$f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad g\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

tali che la loro composizione $g \circ f$ sia iniettiva? Motivare la risposta.

Esercizio 10.19. Siano $F : U \longrightarrow V$ e $G : V \longrightarrow W$ due applicazioni lineari. Si dimostri che $\mathit{rango}\, G \circ F \leqslant \mathit{rango}\, F$ e che $\mathit{rango}\, G \circ F \leqslant \mathit{rango}\, G$.

11. Consegna del 9 dicembre

Le avvertenze sono le stesse della consegna precedente. Per chi vuole, ma siete consigliati di farlo, venerdi' 9 dicembre potete consegnare alcuni esercizi che vi saranno corretti.

Potete consegnare **il primo esercizio e al massimo altri due esercizi** tra gli ultimi tre.

Ripeto: questi esercizi non avranno nessun peso sull'esame finale, se non vi fidate potete anche mettere un nome falso, serve solo per rintracciare il compito al momento della consegna. Potete collaborare, ma non ha nessun senso consegnare degli esercizi copiati integralmente da un'altra persona o di cui non abbiate capito la soluzione. Non saranno corretti esercizi scritti in modo illeggibile: questa e' una regola che vale anche per i compiti e i compitini. In questo caso, visto che avete tutto il tempo, ci aspettiamo consegniate una versione in bella degli esercizi e senza troppe cancellature.

Esercizio 11.1. a) Dare la definizione di vettori linearmente indipendenti.
b) Fare un esempio di tre vettori u, v, w in $\mathbb{R}^3$ tali che presi a coppie siano linearmente indipendenti (ovvero che u, v siano linearmente indipendenti. u, w siano linearmente indipendenti, e che v, w siano linearmente indipendenti) ma che u, v, w siano linearmente dipendenti
c) Siano u, v, w elementi di uno spazio vettoriale. Supponiamo che u e v siano linearmente indipendenti. Dimostrare che se u, v, w sono linearmente dipendenti allora $w \in \langle u, v\rangle$.

Esercizio 11.2. Sia A la matrice

$$A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 2\\1 & 7 & 3 & 4\\-1 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

Si determini una base di $N(L_A)$.

Esercizio 11.3. Sia E lo spazio vettoriale delle matrici 2×2 a coefficienti complessi nella variabile t. Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti complessi di grado minore o uguale a 2. Sia U il sottospazio di V dei polinomi di che si annullano in 1. Sia $F : U \longrightarrow E$ la seguente applicazione lineare:

$$F(p(t)) = \begin{pmatrix} p(0) & p(2) \\ p(-1) & p(-2) \end{pmatrix}.$$

Sia $G : V \longrightarrow E$ l'applicazione lineare tale che

$$G(p(t)) = F(p(t)) \qquad \text{per ogni } p \in U \qquad \text{e} \qquad G(1+t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Si determini una base di U e si scriva la matrice associata a F rispetto a questa base in partenza e alla base standard in arrivo.
b) Quanto fa $G(t)$?
c) Calcolare la matrice associata a G rispetto alle basi standard in partenza e in arrivo.

Esercizio 11.4. Si consideri il seguente sistema lineare al variare del parametro $c \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 6x_4 = 13 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 = c^2 + 4 \\ x_2 + 3x_3 + x_4 = c^2 \\ x_1 + 2x_3 + 3x_4 = 7 \end{cases}$$

(1) calcolare il rango della matrice associata al sistema
(2) per quali c il sistema ha soluzione? e quando ha soluzione, quante soluzioni ha?

12. Sistemi lineari

Esercizio 12.1. Si consideri il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} 2\,x_2 + 2\,x_3 + 6\,x_4 + x_5 = 7 \\ 2\,x_1 + x_2 + 7\,x_3 + 11\,x_4 = 4 \\ x_1 + 3\,x_3 + 4\,x_4 + x_5 = 4 \end{cases}$$

a) Ridurre il sistema a scalini.
b) Calcolare il rango della matrice
c) Descrivere le soluzioni del sistema

Esercizio 12.2. Sia A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Si determini una base di $N(L_A)$.

Esercizio 12.3. Si calcoli l'inversa, se esiste, delle seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -5 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 11 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Esercizio 12.4. Si considerino i seguenti vettori in $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Sia $W = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$. Si determini una base di W, e si calcoli la dimensione di W e si descriva W tramite equazioni. Dire tra i seguenti vettori quali stanno in W:

$$w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3/2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad w_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Per i vettori w_i che stanno in W si determinino le cordinate rispetto alla base scelta

Esercizio 12.5. Si considerino i seguenti vettori in $\mathbb{C}^5$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Sia $W = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$. Si determini una base di W, e si calcoli la dimensione di W e si descriva W tramite equazioni. Dire tra i seguenti vettori quali stanno in W:

$$w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad w_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad w_3 = \begin{pmatrix} -1+i \\ 2i+1 \\ -1 \\ 1+i \\ 2i \end{pmatrix}$$

Esercizio 12.6 (Compitino febbraio 2016)**.** Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a 2. Al variare del parametro reale k si consideri l'applicazione lineare $L_k : V \longrightarrow V$ definita da

$$L_k\big(p(t)\big) = p(t+1) - k\,p(t)$$

per ogni polinomio $p(t)$.

a) Si scelga una base di V e si determini la matrice associata ad L_k rispetto a tale base;
b) Si determini il rango di L_k al variare del parametro k;
c) Sia $f(t)$ il polinomio $f(t) = t^2 + 1$ si determini al variare di k se esistono polinomi $p(t)$ tali che $L_k\big(p(t)\big) = f(t)$.

13. Determinanti

Esercizio 13.1. Calcolare il determinante delle seguenti matrici, riducendole a scalini:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 3 & 5 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 7 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Esercizio 13.2. Calcolare il determinante delle seguenti matrici applicando la formula di Laplace

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Esercizio 13.3. Sia $V = \mathbb{C}[t]_{\leqslant n-1}$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o oguale a $n-1$ e siano $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$. Si consideri la seguente applicazione lineare $F : V \longrightarrow \mathbb{C}^n$

$$F(p(t)) = (p(\lambda_1), p(\lambda_2), \ldots p(\lambda_n))$$

Si dimostri che è iniettiva se e solo se i numeri λ_i sono distinti. Se ne deduca che

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \ldots & \lambda_1^{n-2} & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \ldots & \lambda_2^{n-2} & \lambda_2^{n-1} \\ & \ldots & & & & \\ 1 & \lambda_i & \lambda_i^2 & \ldots & \lambda_i^{n-2} & \lambda_i^{n-1} \\ & \ldots & & & & \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \ldots & \lambda_n^{n-2} & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} = 0$$

se e solo se due dei numeri λ_i sono uguali.

Esercizio 13.4 (I compitino 2016)**.** Sia B la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Sia $E = \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriali delle matrici 2×2 a coefficienti reali. Sia $T : E \longrightarrow E$ l'applicazione definita da $T(X) = B \cdot X$. Si calcoli il determinante di T.

Esercizio 13.5. Sia M la matrice a blocchi:

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

con A matrice $p \times p$, D matrice $q \times q$ e B matrice $p \times q$. Dimostrare che $\det M = \det A \cdot \det D$ seguendo i seguenti passi:

(1) Dimostrare che se A non è invetibile allora non lo è neppure M e quindi $\det M = 0$;
(2) Se A è invertibile dimostrare che

$$M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A^{-1}B \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

e applicare il teorema di Binet.
(3) Calcolare i determinanti delle tre matrici che compaiono nella formula precedente.

14. Descrizione di sottospazi, somma e intersezione di sottospazi

Esercizio 14.1. Sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ descritto dalle equazioni:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \qquad x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0.$$

Descrivere W in forma parametrica.

Esercizio 14.2. Sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^5$ generato dai vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

si descriva W in forma parametrica e in forma cartesiana.

Esercizio 14.3. Sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ il sottospazio descritto dalla parametrizzazione $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$

$$F \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3s + t \\ t - s \\ 2t + 3s \end{pmatrix}$$

(1) si verifichi che F è una parametrizzazione (cioè che F è iniettiva);
(2) si determini una base di W;
(3) si descriva W in forma cartesiana.

Esercizio 14.4. Sia A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 8 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

si descrivano $\operatorname{Im} L_A$ e $N(L_A)$ in forma parametrica e in forma cartesiana.

Esercizio 14.5 (I compitino 2015-2016)**.** Siano U e W due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^8$. Sia $\dim U = 3$ e $\dim W = 5$. Quale delle seguenti affermazioni è sicuramente vera?

A) $\dim(U + W) = 8$ qualsiasi siano U e W.
B) $\dim(U \cap W) = 2$ qualsiasi siano U e W.
C) Se $U \cap W$ è diverso da zero allora $\dim(U + W) = 8$.
D) Se $\dim(U \cap W) = 3$ allora $U \subset W$.
E) Se $\dim U + W = 8$ allora $\dim(U \cap W) = 3$.

Esercizio 14.6 (Compito luglio 2017)**.** Sia $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^5$ una applicazione lineare con $\dim N(T) = 1$ e sia W un sottospazio di $\mathbb{R}^5$ di dimensione 4

a) dimostrare che $W \cap \mathrm{Im}(T) \neq 0$;
b) quali sono le possibili dimensioni di $W \cap \mathrm{Im}(T) \neq 0$? motivare la risposta

Esercizio 14.7 (Compito 6 giugno 2016)**.** Siano V e W due sottospazi di dimensione 3 di $\mathbb{R}^4$. Quali sono le possibili dimensioni del sottospazio $V \cap W$? Motiva la risposta in modo completo.

Esercizio 14.8. Siano U e W due sottospazi di V. Si dimostri che se $U \cup W$ è un sottospazio allora $U \subset W$ o $W \subset U$.

Esercizio 14.9. Siano U, V, W dei sottospazi dello spazio vettoriale E in somma diretta. Sia $u_1, \dots, u_a$ una base di U, $v_1, \dots, v_b$ una base di V, $w_1, \dots, w_c$ una base di W. Dimostrare che $u_1, \dots, u_a, v_1, \dots, v_b, w_1, \dots, w_c$ è una base di $U + V + W$. [La dimostrazione è del tutto analoga a quella fatta in classe nel caso di due soli sotospazi]

Esercizio 14.10. Sia $W = \{x \in \mathbb{C}^5 : x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0\}$. Si trovino tre sottospazi X e Y e Z diversi da zero, di W tali che $W = X \oplus Y \oplus Z$.

Esercizio 14.11. Sia $V = \mathbb{R}^4$ e sia X, Y, Z dei sottospazi di dimensione 3 di V. Sia $a = \dim X \cap Y$, $b = \dim X \cap Z$, $c = \dim Y \cap Z$ e $d = \dim X \cap Y \cap Z$.

(1) si dimostri che $a = 2$ o 3;
(2) si dimostri che non può essere $d = 0$;
(3) di esibiscano X, Y, Z tali che $d = 2$;
(4) di esibiscano X, Y, Z tali che $d = 1$;
(5) si descrivano tutte le quadruple (a, b, c, d) che si possono ottenere al variare di X, Y, Z.

Esercizio 14.12 (Compitino di algebra lineare del 26 febbraio 2018)**.** Sia U il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sia V il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 4\,x_3 - x_4 = 0 \\ 3\,x_1 + 5\,x_2 + 11\,x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

a) Calcolare la dimensione di U e V.
b) Calcolare la dimensione di $U + V$ e $U \cap V$.

Esercizio 14.13. Si considerino i seguenti vettori di $\mathbb{R}^5$:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad w_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^5$ generato da u_1, u_2, u_3 e W il sottospazio generato da w_1, w_2, w_3.

(1) Si descriva una base di $U + W$;
(2) Si descriva una base di $U \cap W$;
(3) Si descriva $U + W$ in forma cartesiana;
(4) Si descriva $U \cap W$ in forma cartesiana.

15. Autovalori, autovettori e diagonalizzabilità

Esercizio 15.1. Sia V uno spazio vettoriale complesso. Sia $F : V \longrightarrow V$ una applicazione lineare tale che $F^4 = Id$. Si dimostri che se λ è un autovalore di F allora $\lambda^4 = 1$

Esercizio 15.2. Sia $F : V \longrightarrow V$ una applicazione lineare e sia $\sqrt{2}$ un autovalore di F. Si dimostri che 6 è un autovalore di $F^4 + F^2$.

Esercizio 15.3. Si calcolino gli autovalori delle applicazioni L_A associate alle seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 15.4. Sia $F : V \longrightarrow V$ una applicazione diagonalizzabile. Si dimostri che F^2 è diagonalizzabile e che $2F$ è diagonalizzabile.

Esercizio 15.5. Sia A una matrice 5×5 triangolare superiore che ha lungo la diagonale tutte le entrate uguali a 2. Si dimostri che A è diagonalizzabile se e solo se $A = 2\,I$.

Esercizio 15.6. Si calcoli A^{100} per

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Esercizio 15.7 (Compito 9 gennaio 2017)**.** Sia V uno spazio vettoriale sui numeri complessi di dimensione finita e sia $F : V \longrightarrow V$ una applicazione lineare.

a) Sia λ un autovalore di F. Si dia la definizione di molteplicità geometrica e molteplicità algebrica di λ rispetto a F.
b) Supponiamo che $\dim V = 4$. Si dimostri che se la molteplicità geometrica di 2 è uguale a 4 allora $F = 2\,Id$.

Esercizio 15.8. Sia V uno spazio vettoriale e sia $F : V \longrightarrow V$ tale che $F^2 = F$. Dimostrare che F è diagonalizzabile. [Dimostrare che $V_0 \oplus V_1 = V$ direttamente]

Esercizio 15.9 (I compitino 2017)**.** Sia A la matrice 13×13 con tutte le entrate uguali a 1.

a) Si determini una base del nucleo di L_A.
b) Si determini un autovettore con autovalore diverso da zero (si provi ad indovinare!).
c) Si determini una base di autovettori per L_A e si calcoli il polinomio caratteristico di L_A.

Esercizio 15.10. Sia $V = \mathbb{C}[x]_{\leqslant 2}$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 2 a coefficienti complessi. Si consideri l'applicazione lineare $F : V \longrightarrow V$ definita nel seguente modo:

$$F(p(t)) = p(0)x^2 + p'(x)$$

a) Si determinino gli autovalori di F.
b) Si determini una base di autovettori.
c) Si calcoli F^{15}

Esercizio 15.11. Costruisci una matrice A di taglia 3×3 tale che l'applicazione $L_A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ soddisfi entrambe le proprietà seguenti:

- l'immagine di L_A è il piano definito da $x + y = 0$;
- l'endomorfismo L_A non è diagonalizzabile.

Esercizio 15.12 (II compitino 2016)**.** Determinare per quali valori $t \in \mathbb{R}$ la matrice seguente è diagonalizzabile:

$$\begin{pmatrix} t-1 & 2t & t \\ 0 & t-1 & 0 \\ 2 & t+2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 15.13. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita, sia $F : V \longrightarrow V$ e sia λ un autovalore di F. Si dimostri che $ma_\lambda \geqslant mg_\lambda$. [Si utilizzi l'esercizio 13.5]

16. Consegna del 16 gennaio

Le avvertenze sono le stesse della consegna precedente. Per chi vuole lunedì 16 gennaio, in luogo e orario che saprete quando sarà possibile prenotare un'aula, potete consegnare al **massimo tre esercizi** che vi saranno corretti.

Ripeto: questi esercizi non avranno nessun peso sull'esame finale, se non vi fidate potete anche mettere un nome falso, serve solo per rintracciare il compito al momento della consegna. Potete collaborare, ma non ha nessun senso consegnare degli esercizi copiati integralmente da un'altra persona o di cui non abbiate capito la soluzione. Non saranno corretti esercizi scritti in modo illeggibile: questa e' una regola che vale anche per i compiti e i compitini. In questo caso, visto che avete tutto il tempo, ci aspettiamo consegniate una versione in bella degli esercizi e senza troppe cancellature.

Esercizio 16.1. Si calcoli A^{100} per
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Esercizio 16.2. Sia $E = \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C})$. Sia A la matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$
e sia $F : E \longrightarrow E$ l'applicazione lineare definita da $F(X) = AX - XA$. Si determini una base di $\mathrm{Im}(F) \cap N(F)$.

Esercizio 16.3 (Compitino di algebra lineare del 26 febbraio 2018)**.** Sia U il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$ generato dai vettori
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
Sia W il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$ delle soluzioni del sistema
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

a) Calcolare la dimensione di U e W.
b) Calcolare la dimensione di $U + W$ e $U \cap W$.
c) Trovare una base di $U + W$ e di $U \cap W$.

Esercizio 16.4. Sia $V = \mathbb{R}[t]_{\leqslant 4}$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 4. Sia
$$U = \mathrm{Span}\{e_3 - 2e_2, e_3 - e_2 - e_1, \}$$
e sia
$$W = \{f \in V : f(0) = f(1) = f(2) = 0\}$$
Calcolare le dimensioni di U, W, $U \cap W$ e $U + W$.

Esercizio 16.5. Sia $V = \mathbb{C}[t]_{\leqslant n-1}$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o oguale a $n - 1$ e siano $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$. Si consideri la seguente applicazione lineare $F : V \longrightarrow \mathbb{C}^n$
$$F(p(t)) = (p(\lambda_1), p(\lambda_2), \ldots p(\lambda_n))$$
Si dimostri che è iniettiva se e solo se i numeri λ_i sono distinti. Se ne deduca che
$$\det \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \ldots & \lambda_1^{n-2} & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \ldots & \lambda_2^{n-2} & \lambda_2^{n-1} \\ & \ldots & & & & \\ 1 & \lambda_i & \lambda_i^2 & \ldots & \lambda_i^{n-2} & \lambda_i^{n-1} \\ & \ldots & & & & \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \ldots & \lambda_n^{n-2} & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} = 0$$
se e solo se due dei numeri λ_i sono uguali.

Esercizio 16.6 (Compito 9 gennaio 2017)**.** Sia V uno spazio vettoriale sui numeri complessi di dimensione finita e sia $F : V \longrightarrow V$ una applicazione lineare.

a) Sia λ un autovalore di F. Si dia la definizione di molteplicità geometrica e molteplicità algebrica di λ rispetto a F.
b) Supponiamo che $\dim V = 4$. Si dimostri che se la molteplicità geometrica di 2 è uguale a 4 allora $F = 2\,Id$.

Esercizio 16.7. Sia V uno spazio vettoriale e sia $F : V \longrightarrow V$ tale che $F^2 = F$. Dimostrare che F è diagonalizzabile. [Dimostrare che $V_0 \oplus V_1 = V$ direttamente]