Basi e coordinate in uno spazio vettoriale

Ogni vettore dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ è munito di coordinate. Le coordinate rendono gli oggetti più concreti e permettono di effettuare in modo esplicito alcuni conti su questi vettori, almeno per alcuni scopi sembrano quindi essere molto utili. Vogliamo introdurre delle coordinate su uno spazio vettoriale qualsiasi, ovvero identificare ogni vettore con una lista di numeri. Per introdurre le coordinate dovremo definire una generalizzazione dell'idea di sistema di riferimento, che chiameremo base, utilizzata per introdurre le coordinate nel piano o nello spazio. Questo permetterà di introdurre un altro concetto fondamentale per gli spazi vettoriali che è quello di dimensione.

Nella nostra esperienza l'introduzione di coordinate, per esempio nel piano o nello spazio tridimensionale, è legata alla nozione di ortogonalità e di distanza: si fissa un'origine, poi si fissano degli assi ortogonali tra loro, un verso su questi assi e si fissa un'unità di misura. In uno spazio vettoriale qualsiasi abbiamo un'origine ma in generale non abbiamo una nozione fissata di ortogonalità o di distanza. In realtà le coordinate che siamo abituati ad introdurre nel piano o nello spazio hanno delle ulteriori proprietà che, come abbiamo visto in precendenza, permettono di scrivere una formula semplice per la distanza o per il prodotto scalare. Se il nostro scopo è però, solo quello di introdurre delle coordinate, cioè di riuscire ad identificare un vettore con una lista di numeri, vedremo tra un attimo che il concetto di distanza o di ortogonalità non sono necessari.

1. Basi e coordinate rispetto ad una base: definizione ed esempi fondamentali

Prima di dare la definizione fondamentale, che è quella di base, facciamo un'osservazione su come si possono interpretare le coordinate di $\mathbb{R}^3$. Introduciamo i vettori

$$e_1 = (1, 0, 0), \qquad e_2 = (0, 1, 0), \qquad e_3 = (0, 0, 1)$$

e osserviamo che dati $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ la somma

$$a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 = (a_1, 0, 0) + (0, a_2, 0) + (0, 0, a_3) = (a_1, a_2, a_3).$$

Questo vuol dire che un vettore v ha coordinate (a_1, a_2, a_3) se e solo se $v = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$. In particolare possiamo interpretare le coordinate di un vettore v di $\mathbb{R}^3$ come quei numeri a_1, a_2, a_3 tali che $v = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$. Questa osservazione è alla base del concetto di base di uno spazio vettoriale e permette di introdurre delle coordinate in uno spazio vettoriale qualsiasi.

Definizione 1. [Base di uno spazio vettoriale e coordinate rispetto ad una base] Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$. Una lista di vettori

$v_1, \dots, v_n$ di V si dice una base di V sul campo $\mathbb{K}$ se per ogni $v \in V$ esistono univocamente determinati dei numeri $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ tali che

$$v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n.$$

Se $v_1, \dots, v_n$ è una base di V e $v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$ definiamo le coordinate del vettore v rispetto alla base $v_1, \dots, v_n$ come il vettore colonna le cui entrate sono i numeri $a_1, \dots, a_n$. Per indicare tale vettore colonna introduciamo la seguente notazione:

$$[v]_{v_1,\dots,v_n} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Nel seguito faremo alcuni esempi di basi di spazi vettoriali. Molti di questi sono esempi che verranno utilizzati spesso durante il corso e con i quali è bene essere familiari.

Esempio 2. I vettori $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$ sono una base di $\mathbb{R}^2$. Infatti dato un vettore $v = (x, y)$ di $\mathbb{R}^2$ abbiamo $v = x\, e_1 + y\, e_2$. Questa base si chiama la base canonica di $\mathbb{R}^2$.

Facciamo un esempio di una base diversa di $\mathbb{R}^2$ prendiamo $v_1 = (2, 1)$ e $v_2 = (1, 1)$ e controlliamo che siano una base. Cioè preso un qualsiasi vettore $v = (x_0, y_0)$ dobbiamo dimostrare che esistono univocamente determinati a, b tali che $v = av_1 + bv_2$ ovvero

$$(x_0, y_0) = a(2, 1) + b(1, 1) = (2a - b, a + b).$$

Equivalentemente dobbiamo far vedere che il sistema composto dalle equazioni

$$x_0 = 2a + b \qquad y_0 = a + b$$

ha un'unica soluzione comunque vengano fissati x_0 e y_0. Si noti che questo è un sistema nelle variabili a, b mentre x_0 e y_0 li pensiamo come numeri fissati. Se ricaviamo b dalla seconda equazione e lo sostituiamo nella prima, ricaviamo che il sistema ha un'unica soluzione data da

$$a = x_0 - y_0 \qquad b = 2y_0 - x_0.$$

Otteniamo che, per esempio, il vettore $v = (1, 3)$ ha coordinate rispetto a questa base uguali a 2 e -1 ovvero

$$[v]_{e_1,e_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

In $\mathbb{R}^2$ possiamo fare anche un disegno per capire geometricamente cosa stiamo facendo.

Esempio 3 (La base canonica di $\mathbb{K}^n$)**.** Introduciamo una base, detta base canonica, in uno spazio $\mathbb{K}^n$ con $\mathbb{K}$ un campo qualsiasi. Definiamo i seguenti vettori di $\mathbb{K}^n$:

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0) \qquad e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0) \qquad e_n = (0, \dots, 0, 1),$$

in particolare e_i è il vettore che ha tutte le coordinate uguali a zero tranne la i-esima che è uguale a 1. Osserviamo che

$$a_1e_1 + \cdots + a_ne_n = (a_1, 0, \ldots, 0) + \cdots + (0, \ldots, 0, a_n) = (a_1, \ldots, a_n)$$

Questo implica che $e_1, \ldots, e_n$ sono una base di $\mathbb{K}^n$. Le coordinate di un vettore rispetto a questa base sono quindi le coordinate originali, cioè se $v = (a_1, \ldots, a_n)$ allora

$$[v]_{e_1,\ldots,e_n} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Notiamo però che mentre siamo abituati a scrivere i vettori di $\mathbb{K}^n$ un po' indifferentemente come vettori riga o colonna, a seconda delle convenienze, le coordinate rispetto ad una base sono rigidamente un vettore colonna. Questa rigidità serve a rendere la notazione compatibile con alcune costruzioni che faremo in seguito.

Esempio 4 (La base canonica di $\mathbb{K}[t]_{\leqslant N}$)**.** I polinomi $1 = t^0, t, t^2, t^3, \ldots, t^N$ sono una base dello spazio vettoriale $\mathbb{K}[t]_{\leqslant N}$, infatti, per definizione, ogni polinomio in questo spazio si scrive in modo unico nella forma $a_0t^0 + a_1t^1 + \cdots + a_Nt^N$. Le coordinate rispetto a questa base non sono nient'altro che i coefficienti $a_0, \ldots, a_N$ e quindi sono di solito facili da calcolare. Per esempio se $N = 3$ e $f = t + t^2$ abbiamo

$$[f]_{t^0,t,t^2,t^3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

infatti $f = 0 \cdot t^0 + 1 \cdot t + 1 \cdot t^2 + 0 \cdot t^3$.

Esempio 5. Sia W il piano di $\mathbb{R}^3$ definito dall'equazione $x + y + z = 0$. Consideriamo i vettori $v_1 = (1, 1, -2)$ e $v_2 = (1, 2, -3)$. I vettori v_1 e v_2 sono elementi di W. Dimostriamo che sono una base di W, ovvero che per ogni $w = (x, y, z) \in W$ esistono univocamente determinati a e b tali che $w = av_1 + bv_2 = a(1, 1, -2) + b(1, 2, -3) = (a + b, a + 2b, -2a - 3b,)$. Infatti, questa uguaglianza è equivalente al sistema delle tre equazioni seguenti:

$$x = a + b \qquad y = a + 2b \quad \text{e} \quad z = -2a - 3b.$$

Si noti che questo è un sistema nelle variabili a e b dove pensiamo x, y, z come parametri fissati. Dalla prima e dalla terza equazione ricaviamo $a = x - b$ e sostituendo nella seconda equazione ricaviamo $b = y - x$, le tre equazioni precedenti sono quindi equivalenti a

$$a = 2x - y \qquad b = y - x \quad \text{e} \quad z = -4x + 2y - 3y + 3x$$

Semplificando otteniamo che la terza equazione è $z = -x - y$. Per un (x, y, z) qualsiasi in $\mathbb{R}^3$ non è detto che questa equazione sia verificata ma per $(x, y, z) \in W$, da $x + y + z = 0$, ricaviamo $z = -x - y$ e quindi questa ultima equazione risulta automaticamente verificata. Abbiamo dimostrato che $w = (x, y, z) = av_1 + bv_2$ se e solo se $a = 2x - y$ e $b = y - x$. In particolare v_1, v_2 è una base di W. Le coordinate rispetto a questa base di un vettore di W sono le coordinate a e b appena calcolate. Per esempio per $w = (2, 3, -5)$ abbiamo

$$[w]_{v_1,v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Si noti, in particolare, che l'introduzione di una base di W ci permette di individuare ogni elemento di W mediante due coordinate (a e b) mentre per un vettore di $\mathbb{R}^3$ ne consideriamo di solito 3. Nel caso specifico si potevano considerare basi più semplici rispetto a quelle che abbiamo considerato, ma la possibilità di avere molta libertà nella scelta della base, anche se a volte può produrre basi e coordinate che sembrano complicate, ha i suoi vantaggi. In realtà a questa idea siamo già un po' abituati a vederla per alcuni problemi di geometria o nelle lezioni di fisica.

2. Basi e coordinate: precisazioni e prime osservazioni

In questa sezione introduciamo la terminologia "combinazione lineare" che useremo spesso. Metteremo inoltre i puntini sulle i su alcuni aspetti secondari, e per noi molto secondari, della definizione di base. Questi non saranno per noi importanti ma se siete molto precisi, può essere che queste puntualizzazioni rispondano a qualche dubbio. In generale, per la maggior parte degli studenti, a parte la prima sezione in cui vengono introdotte le combinazioni lineari potete lasciar perdere questa sezione in prima lettura.

Terminologia: combinazioni lineari. In questa nota e in tutta la rimanente parte del corso troveremo spesso somme della forma:

$$a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n \tag{1}$$

con $a_1, \ldots, a_n$ elementi di un campo $\mathbb{K}$ e $v_1, \ldots, v_n$ vettori di un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale V. Una scrittura di questo tipo si dice una *combinazione lineare* di $v_1, \ldots, v_n$. Per esempio

$$2u + 3v - w \quad \text{e} \quad u + 0v - 5w$$

sono combinazioni lineare dei vettori u, v, w. Quando ci riferiamo ad una combinazione lineare ci può essere un po' di ambiguità, possiamo intendere come combinazione proprio una scrittura come nella formula (1) sopra, oppure il risultato di questa combinazione. Noi utilizzeremo quasi sempre il primo significato. Per esempio se i tre vettori u, v, w sono uguali a zero, il risultato della somma $2u + 3v - w$ e della somma $u + 0v - 5w$ è in entrambi i casi uguale a zero, ma noi considereremo le combinazioni lineare $2u + 3v - w$ e $u + 0v - 5w$ come distinte perché sono modi diversi (hanno coefficienti diversi) di ottenere lo stesso vettore.

Utilizzando questa terminologia, per esempio, possiamo dire che $v_1, \ldots, v_n$ è una base di uno spazio vettoriale V se ogni vettore di V si può scrivere in modo unico come combinazione lineare dei vettori $v_1, \ldots, v_n$. Soprattutto all'inizio consiglio di fare riferimento sempre alla definizione di base che abbiamo dato nella sezione precedente perché è più esplicita e non si presta ad ambiguità, ma man mano che diventeremo più familiari con gli spazi vettoriali useremo l'espressione combinazione lineare sempre più spesso.

Basi finite e basi infinite. Nella nostra definizione di base, $v_1, \ldots, v_n$ sono una lista di vettori finita. Non tutti gli spazi vettoriali hanno una base secondo questa definizione; nell'esercizio 9.3 si chiede per esempio di dimostrare che lo spazio vettoriale dei polinomi in una variabile senza limitazioni sul grado non ha una base. Esiste, in realtà una definizione più generale di base, nella quale si considerano anche liste di vettori infinite e si può dimostrare che tutti gli spazi vettoriali hanno una base secondo questa definizione più generale. Nel nostro corso ci limiteremo, quasi esclusivamente, a studiare spazi vettoriali che ammettono una base finita, ovvero che ammettono una base secondo la nostra definizione.

Una base è una lista di vettori e non un insieme di vettori. Come forse avete notato, nella definizione di base e nei commenti che ne sono seguiti ho sempre usato l'espressione lista di vettori e non insieme di vettori. Quando uso la parola lista e dico per esempio che $v_1, \ldots, v_n$ è una lista di vettori, voglio sottolineare il fatto che $v_1, \ldots, v_n$ sono un insieme ordinato di vettori, esiste cioè un primo vettore della lista, un secondo vettore della lista e così via, mentre in un insieme di vettori $\{v_1, \ldots, v_n\}$ non c'è un ordine tra i suoi elementi, non esiste un primo elemento dell'insieme, un secondo o un terzo. Inoltre (anche se non è il caso degli elementi di una base) in una lista gli elementi si possono ripetere cambiando la lista mentre in un insieme le ripetizioni non contano: per esempio la lista dei vettori v, v è una lista di due vettori mentre l'insieme $\{v, v\}$ ha un solo elemento.

La differenza tra le due possibilità (insieme e lista) è piccola ma è per noi comodo considerare una base come una lista di vettori quando vogliamo associare ad un vettore le sue coordinate rispetto ad una base: abbiamo bisogno di parlare della prima coordinata, della seconda coordinata, senza ambiguità, e per fare questo abbiamo bisogno che gli elementi della base siano ordinati.

Base dello spazio vettoriale zero e combinazioni lineari della lista vuota. Uno spazio vettoriale poco interessante nelle applicazioni, ma che di fatto uno considera in molti ragionamenti, spesso senza neanche accorgersene, è lo spazio vettoriale composto dal solo zero: $V = \{0_V\}$. Non è chiarissimo dalla nostra definizione cosa debba considerarsi una base di un tale spazio vettoriale. Certo non la lista composta dal solo elemento 0_V perché potremmo scrivere $v = 0_V$ in tanti modi come combinazione lineare dell'elemento della lista: $v = 2 \cdot 0_V = 3 \cdot 0_V$, etc. Nell'esercizio 9.4 mostriamo che, più o meno per lo stesso motivo, lo zero non può mai far parte della lista di vettori che compongono una base. La definizione "giusta" di base per lo spazio $V = \{0_V\}$ è la lista vuota, ovvero la lista senza nessun elemento. Non è tanto chiaro cosa sia una combinazione lineare degli elementi in una lista vuota, per convenzione fissiamo che la lista vuota ha una unica combinazione lineare che è uguale a zero. Per come abbiamo impostato le cose noi, questa può sembrare una convenzione arbitraria e può non convincere tanto sul momento, ma vedremo presto, per esempio quando parleremo di sottospazio generato da un insieme di vettori o di dimensione, che con questa definizione molte considerazioni che faremo per spazi vettoriali "veri" valgono anche in questo caso. Non ci soffermeremo su questi aspetti, ma il lettore scrupoloso, potrà controllare che, con questa definizione tutte le argomentazioni che daremo rimangono valide anche in questo caso.

3. Generatori di uno spazio vettoriale e sottospazio vettoriale generato da un insieme di vettori

Il concetto di base è un concetto fondamentale nella teoria degli spazi vettoriali. Per trattarlo in modo più semplice, è comodo introdurre due ulteriori definizioni, quella di vettori linearmente indipendenti, che introdurremo nella prossima sezione e quella di generatori di uno spazio vettoriale.

Definizione 6 (Generatori di uno spazio vettoriale)**.** Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$. Siano $v_1, \dots, v_n$ elementi di V, diciamo che sono dei generatori di V sul campo $\mathbb{K}$ se per ogni $v \in V$ esistono $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ tali che

$$v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n.$$

In altre parole ogni vettore di V può essere espresso come una combinazione lineare di $v_1, \dots, v_n$.

La definizione di generatori è molto simile a quella di base, solo che in questa non si richiede che gli $a_1, \dots, a_n$ siano unici. Confrontando le due definizioni vediamo subito che ogni base di uno spazio vettoriale V è anche un insieme di generatori di V. Il viceversa però non è sempre vero. Per esempio i vettori $v_1 = (1, 0)$ $v_2 = (0, 1)$ e $v_3 = (1, 1)$ sono un insieme di generatori di $\mathbb{R}^2$ ma non una base di $\mathbb{R}^2$. Infatti, per esempio, $(2, 1)$ lo possiamo scrivere sia come $2v_1 + 2v_2 + 0v_3$ che come $1v_1 + 0v_2 + 1v_3$ (e in tanti altri modi) mentre se fosse una base potremmo farlo solo in un modo.

Se $v_1, \dots, v_n$ sono vettori qualsiasi di V, intendo non per forza una base o dei generatori di V possiamo considerare il minimo sottospazio di V generato da questi elementi.

Definizione 7 (Sottospazio vettoriale generato)**.** Siano $v_1, \dots, v_n \in V$ allora il sottospazio generato da $v_1, \dots, v_n$, che si indicherà con $\mathrm{Span}\{v_1, \dots, v_n\}$, è l'insieme di tutti i vettori che possono essere espressi come combinazione lineare di $v_1, \dots, v_n$. Più esplicitamente

$$\mathrm{Span}\{v_1, \dots, v_n\} = \{a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n : a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}\}.$$

Osserviamo in particolare che $v_1, \ldots, v_n$ sono generatori di V se $\operatorname{Span}\{v_1, \ldots, v_n\} = V$.

Questo concetto generalizza qualcosa che in $\mathbb{R}^3$ ci è familiare. Facciamo un esempio: sia $p = (1,1,1)$ e $q = (1,1,0)$ e calcoliamo $\operatorname{Span}\{p,q\}$. Per definizione abbiamo

$$\operatorname{Span}\{p,q\} = \{ap + bq : a, b \in \mathbb{R}\} = \{(a+b, a+b, a) : a, b \in \mathbb{R}\}$$

Se chiamiamo $t = a + b$ e $s = b$ vediamo che

$$\operatorname{Span}\{p,q\} = \{(t,t,s) : t, s \in \mathbb{R}\}.$$

$\operatorname{Span}\{p,q\}$ è quindi il piano di equazione $x = y$ infatti è composto di tutti i punti in cui le due prime coordinate sono uguali. $\operatorname{Span}\{p,q\}$ è quindi il piano passante per l'origine e contenente p e q.

Facciamo un secondo esempio in $\mathbb{R}^4$. Consideriamo $\operatorname{Span}\{e_1, e_2\}$. Per definizione vediamo che

$$\operatorname{Span}\{e_1, e_2\} = \{ae_1 + be_2 : a, b \in \mathbb{R}\} = \{(a, b, 0, 0) : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Quindi è il sottospazio di equazioni $x_3 = x_4 = 0$. Ci sono tanti altri sottospazi contenenti e_1 ed e_2, per esempio quello di equazione $x_3 = 2x_4$ o quello di equazione $x_3 = 5x_4$. $\operatorname{Span}\{e_1, e_2\}$ è però il più piccolo dei sottospazi contenti e_1 e e_2.

La prossima proposizione generalizza alcune caratteristiche di questi esempi, in particolare il punto c) esprime il fatto che $\operatorname{Span}\{v_1, \ldots, v_n\}$ è il più piccolo sottospazio contenente $v_1, \ldots, v_n$.

Proposizione 1. *Siano* $v_1, \ldots, v_n \in V$. *Allora*

a) $\operatorname{Span}\{v_1, \ldots, v_n\}$ *è un sottospazio vettoriale di* V*;*
b) $v_1, \ldots, v_n \in \operatorname{Span}\{v_1, \ldots, v_n\}$ *e inoltre* $v_1, \ldots, v_n$ *sono generatori di* $\operatorname{Span}\{v_1, \ldots, v_n\}$*;*
c) Se Z *è un sottospazio vettoriale di* V *e se* $v_1, \ldots, v_n \in Z$ *allora* $\operatorname{Span}\{v_1, \ldots, v_n\} \subset Z$.

Dimostrazione. a) Dobbiamo verificare le tre proprietà che caratterizzano i sottospazi vettoriali. SV1: 0_V è un elemento di V, infatti 0_V lo possiamo scrivere come $0 \cdot v_1 + \cdots + 0 \cdot v_n$ e quindi è un elemento di $\operatorname{Span}\{v_1, \ldots, v_n\}$. SV2: Se due vettori u e w appartengono a $\operatorname{Span}\{v_1, \ldots, v_n\}$ allora anche $u + w$ appartiene a $\operatorname{Span}\{v_1, \ldots, v_n\}$. Infatti se u e w sono elementi di $\operatorname{Span}\{v_1, \ldots, v_n\}$ esistono $a_1, \ldots, a_n \in K$ e $b_1, \ldots, b_n \in K$ tali che

$$u = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n \quad \text{e} \quad w = b_1 v_1 + \cdots + b_n v_n$$

Quindi $u + w = (a_1 + b_1)v_1 + \cdots + (a_n + b_n)v_n$ è pure una combinazione lineare di $v_1, \ldots, v_n$ e quindi è un elemento di $\operatorname{Span}\{v_1, \ldots, v_n\}$. SV3: se $\lambda \in K$ e $v \in \operatorname{Span}\{v_1, \ldots, v_n\}$ allora $\lambda v \in \operatorname{Span}\{v_1, \ldots, v_n\}$. Questa la lasciamo per esercizio (vedi l'esercizio 9.6).

b) Possiamo scrivere v_i come $v_i = 0v_1 + \cdots + 1v_i + \cdots + 0v_n$ e quindi è un elemento di $\mathrm{Span}\{v_1, \ldots, v_n\}$. Che $\mathrm{Span}\{v_1, \ldots, v_n\}$ sia generato da $v_1, \ldots, v_n$ è inoltre evidente dalla definizione.

c) Se $v_1, \ldots, v_n$ appartengono a Z allora comunque io scelga $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$, per la terza proprietà che caratterizza i sottospazi vettoriali abbiamo che $a_1v_1, \ldots, a_nv_n$ appartengono a Z e per la seconda proprietà ne deduciamo che $a_1v_1 + \cdots + a_nv_n \in Z$. Quindi ogni combinazione lineare di $v_1, \ldots, v_n$ appartiene a Z ovvero $\mathrm{Span}\{v_1, \ldots, v_n\}$ è contenuto in Z. □

4. Vettori linearmente indipendenti

Introduciamo ora il concetto di vettori linearmente indipendenti che coglie un altro aspetto del concetto di base.

Definizione 8 (Vettori linearmente indipendenti)**.** Siano $v_1, \ldots, v_n$ dei vettori di V. I vettori $v_1, \ldots, v_n$ sono linearmente indipendenti se e solo se vale la seguente proprietà:

$$\text{se } \ a_1v_1 + \cdots + a_nv_n = 0 \ \text{ allora } \ a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0.$$

Dimostriamo subito che questa definizione coglie la parte relativa all'unicità nella definizione di base, dimostrando il seguente lemma.

Lemma 2. *Siano $v_1, \ldots, v_n \in V$. I vettori $v_1, \ldots, v_n$ sono lineramente indipendenti se e solo se due combinazioni lineari che esprimono lo stesso vettore sono uguali ovvero se dati $a_1 \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{K}$*

$$\textit{se } \ a_1v_1+\cdots+a_nv_n = b_1v_1+\cdots+b_nv_n \ \textit{ allora } \ a_1 = b_1, \ a_2 = b_2, \ldots, a_n = b_n.$$

Dimostrazione. Assumiamo prima che $v_1, \ldots, v_n$ siano linearmente indipendenti e supponiamo che $a_1v_1 + \cdots + a_nv_n = b_1v_1 + \cdots + b_nv_n$. Portando tutto da una parte troviamo che

$$(a_1 - b_1)v_1 + \cdots + (a_n - b_n)v_n = 0$$

e utillizzando che $v_1, \ldots, v_n$ sono linearmente indipendenti ricaviamo che $a_i - b_i = 0$ per ogni i ovvero che $a_i = b_i$ per ogni i.

Viceversa supponiamo che i vettori $v_1, \ldots, v_n$ abbiano la proprietà enunciata nel testo del lemma e dimostriamo che sono linearmente indipendenti. Supponiamo quindi che $a_1v_1 + \cdots + a_nv_n = 0_V$. Osserviamo che $0_V = 0v_1 + \cdots + 0v_n$ quindi abbiamo

$$a_1v_1 + \cdots + a_nv_n = 0v_1 + \cdots + 0v_n$$

e per la proprietà enunciata nel testo del lemma ricaviamo $a_i = 0$ per ogni i. □

Questo lemma implica in particolare che una base è anche un insieme di vettori linearmente indipendenti. L'implicazione inversa non è vera, per esempio $e_1, e_2 \in \mathbb{R}^3$ sono dei vettori linearmente indipendenti ma non sono una base di $\mathbb{R}^3$.

La definizione che abbiamo dato di vettori linearmente dipendenti è la più utile e quella che si presta meglio ad essere utilizzata non è però forse la più intuitiva. Diamo ora una definizione, che spero essere più intuitiva, di vettori linearmente dipendenti (non mi sono dimenticato "in"!).

Definizione 9 (Vettori linearmente dipendenti)**.** Siano $v_1, \dots, v_n$ dei vettori di V. I vettori $v_1, \dots, v_n$ si dicono linearmente dipendenti se uno di questi vettori può essere espresso come combinazione lineare degli altri ovvero se esiste i e esistono $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ tali che

$$v_i = a_1 v_1 + \cdots + a_{i-1} a_{i-1} + a_{i+1} v_{i+1} + \cdots + a_n v_n. \tag{2}$$

Equivalentemente $v_i \in \mathrm{Span}\{v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n\}$.

Notazione: lista privata di un elemento. Se $a_1, \dots, a_n$ è una lista indichiamo con

$$a_1, \dots, \breve{a}_i, \dots, a_n$$

la medesima lista privata dell'elemento i-esimo. La stessa notazione la possiamo usare per prodotti o somme. Per esempio la formula (2) la possiamo riscrivere come

$$v_i = a_1 v_1 + \cdots + \breve{a_i v_i} + \cdots + a_n v_n.$$

Le definizione di vettori linearmente indipendenti e vettori linearmente dipendenti sono compatibili, ovvero vale il seguente lemma.

Lemma 3. *Siano $v_1, \dots, v_n \in V$. I vettori $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente indipendenti se e solo se non sono linearmente dipendenti.*

Dimostrazione. L'affermazione che dobbiamo dimostrare è equivalente a dire che $v_1, \dots, v_n$ non sono linearmente indipendenti se e solo se sono linearmente dipendenti. Dimostriamo il lemma in questa versione equivalente.

$\Rightarrow$ Assumiamo prima che i vettori non siano linearmente indipendenti. Quindi esistono $a_1, \dots, a_n$ non tutti nulli tali che

$$a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = 0$$

Poiché gli a_j non sono tutti nulli, deve esistere un i tale che $a_i \neq 0$. Lasciamo questo termine a sinistra dell'uguale e portiamo il resto dall'altra parte ottenendo $a_i v_i = -a_1 v_1 - \cdots - \breve{a_i v_i} - \cdots - a_n v_n$. Dividendo per a_i otteniamo infine

$$v_i = b_1 v_1 - \cdots + \breve{b_i v_i} + \cdots + b_n v_n$$

con $b_j = -a_j / a_i$. Abbiamo quindi espresso v_i come combinazione lineare degli altri vettori e quindi i vettori sono linearmente dipendenti.

$\Leftarrow$ Assumiamo che i vettori $v_1, \dots, v_n$ siano linearmente dipendenti. Quindi esistono $a_1, \dots, \breve{a}_i, \dots, a_n$ tali che

$$v_i = a_1 v_1 + \cdots + \breve{a_i v_i} + \cdots + a_n v_n.$$

Se poniamo $a_i = -1$ portando tutto da una parte nella formula precedente otteniamo:

$$0 = a_1 v_1 + \cdots + a_i v_i + \cdots + a_n v_n.$$

e quindi abbiamo scritto 0 come una combinazione lineare di $v_1, \dots, v_n$ che non ha tutti i coefficienti uguali a zero (infatti l'i-esimo è uguale a -1). $\square$

L'essere generatori di uno spazio vettoriale coglie una metà delle proprietà di essere una base e l'essere linearmente indipendenti coglie la seconda metà. Rendiamo questa affermazione precisa.

Proposizione 4. *Siano $v_1, \dots, v_n \in V$. I vettori $v_1, \dots, v_n$ sono una base di V se e solo se sono dei generatori di V e sono lineramente indipendenti.*

Dimostrazione. Se $v_1, \dots, v_n$ sono una base di V abbiamo già osservato che sono dei generatori di V e che sono linearmente indipendenti. Dimostriamo il viceversa. Dobbiamo dimostrare che dato un elemento v di V lo possiamo scrivere in modo unico come combinazione lineare dei $v_1, \dots, v_n$. Il fatto che possiamo farlo segue dal fatto che $v_1, \dots, v_n$ sono dei generatori di V mentre l'unicità segue dal lemma 2. $\square$

5. Il teorema fondamentale dell'algebra lineare, dimensione di uno spazio vettoriale

Nella trattazione di quest'anno prenderemo per buono il seguente teorema fondamentale.

Teorema 5 (Teorema fondamentale dell'algebra lineare)**.** *Sia $v_1, \dots, v_n$ una base di uno spazio vettoriale V.*

a) Se $u_1, \dots, u_\ell$ sono dei vettori linearmente indipendenti di V allora $\ell \leqslant n$ e se, inoltre, $\ell = n$ allora $u_1, \dots, u_\ell$ sono una base di V.
b) Se $u_1, \dots, u_\ell$ sono dei generatori di V allora $\ell \geqslant n$ e se, inoltre, $\ell = n$ allora $u_1, \dots, u_\ell$ sono una base di V.
c) Se $u_1, \dots, u_\ell$ sono una base di V allora $\ell = n$.

A differenza del teorema fondamentale dell'algebra la cui dimostrazione è un po' diversa dalle tecniche che incontreremo durante il corso, la dimostrazione del teorema fondamentale dell'algebra lineare è perfettamente in linea con le tecniche che incontreremo e del tutto alla nostra portata. Nelle note degli anni passati trovate dimostrazioni molto dirette e un po' più astratte o dimostrazioni che più o meno si basano su alcune considerazioni che faremo sui sistemi lineari. Il primo metodo ha lo svantaggio che a questo punto del corso, quando ancora abbiamo poca dimestichezza con gli spazi vettoriali la dimostrazione risulta un po' indigesta. Del secondo metodo di cui vedremo tutti gli ingredienti quando parleremo di sistemi lineari, sarebbe naturale farlo tra qualche settimana, ma avere l'enunciato a disposizione fin da subito semplifica molte considerazioni che dovremo fare. In realtà già in questa sezione faremo, anche se in modo sparso, molte delle considerazioni necessarie per dimostrare tale teorema. Negli esercizi viene data una dimostrazione guidata del teorema abbastanza concreta.

Una conseguenza immediata del teorema fondamentale dell'algebra è che possiamo dare la seguente importante definizione.

Definizione 10 (Dimensione di uno spazio vettoriale)**.** Se $v_1, \dots, v_n$ è una base di V diciamo che la dimensione di V è uguale a n e scriviamo $\dim V = n$. Il punto c) del teorema fondamentale dell'algebra lineare ci assicura che tale numero non dipende dalla base scelta.

Se V non ammette una base diciamo che la dimensione di V è infinita e scriviamo $\dim V = \infty$.

Osservazione 11. Grazie alle basi descritte nella sezione 1 ricaviamo le seguenti dimensioni di alcuni spazi vettoriali.

a) $\dim \mathbb{K}^n = n$

b) $\dim \mathbb{K}[t]_{\leqslant N} = N + 1$

Inoltre conformemente a quanto precisato sulla base dello spazio vettoriale nullo ricaviamo $\dim\{0\} = 0$. Se vi è sfuggita questa precisazione prendetela come definizione.

L'esercizio 9.3 mostra invece che $\dim \mathbb{K}[t] = \infty$.

I casi in cui gli spazi vettoriali hanno dimensione 1 o 2 prendono il nome di rette e piani.

Definizione 12. Se W è un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale di dimensione 1 diciamo che è una $\mathbb{K}$-retta.

Se W è un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale di dimensione 2 diciamo che è un $\mathbb{K}$-piano.

In particolare queste definizione si applicano ai casi in cui V è un sottospazio vettoriale di uno spazio V e in tal caso diremo che W è una $\mathbb{K}$-retta di V o un K-piano di V. Per i sottospazi c'è un altro caso particolare che ha meritato un nome per conto proprio. Se W è un sottospazio di V e $\dim W = \dim V - 1$ allora diciamo che W è un iperpiano di V.

Facciamo una ultima semplice osservazione sul concetto di dimensione. Se $v_1, \dots, v_n$ sono dei vettori lineramente indipendenti e $W = \mathrm{Span}\{v_1, \dots, v_n\}$ allora $\dim W = n$. Infatti $v_1, \dots, v_n$ sono sia dei vettori linearmente indipendenti che dei generatori di W e quindi sono una base di W.

6. Estrazione di una base da un insieme di generatori

Supponiamo di avere una lista di generatori $v_1, \dots, v_n$ di uno spazio vettoriale V e vogliamo scegliere un sottoinsieme di vettori di questa lista in modo da avere una base di V.

L'osservazione sulla quale si basa questa procedimento è espressa nel seguente lemma che è una riformulazione del lemma 3

Lemma 6. *Se $v_1, \dots, v_n$ sono dei generatori di V e sono linearmente dipendenti allora esiste un elemento v_i della lista che è superfluo, nel senso che $v_1, \dots, \check{v}_i, \dots, v_n$ sono ancora dei generatori di V.*

Dimostrazione. Osserviamo di nuovo che $v_1, \dots, v_n$ sono generatori di V se e solo se $V = \mathrm{Span}\{v_1, \dots, v_n\}$. Supponiamo adesso che $v_1, \dots, v_n$ siano generatori di V linearmente dipendenti. Allora esiste i tale che $v_i \in$

$Z = \mathrm{Span}\{v_1, \ldots, \check{v}_i, \ldots, v_n\}$. Quindi $v_1, \ldots, v_n \in Z$ e per la minimalità dello spazio vettoriale generato (punto c della Proposizione 1) ne segue $Z \supset \mathrm{Span}\{v_1, \ldots, v_n\} = V$. Quindi Z che è un sottospazione di V è uguale a V ovvero $v_1, \ldots, \check{v}_i, \ldots, v_n$ sono generatori di V. □

Grazie al lemma possiamo descrivere un procedimento per estrarre una base da un insieme di generatori $v_1, \ldots, v_n$ di V.

- Se $v_1, \ldots, v_n$ sono linearmente indipendenti allora essi sono sia dei generatori di V che dei vettori linearmente indipendenti e quindi sono una base di V e abbiamo raggiunto il nostro scopo.
- Se $v_1, \ldots, v_n$ sono linearmente dipendenti allora per il lemma precendente esiste un elemento della lista che è superfluo, e quindi costruiamo un insieme più piccolo di generatori $v_1, \ldots, \check{v}_i, \ldots, v_n$ dello spazio vettoriale V.

Poiché la lista iniziale è finita applicando ripetutamente questo processo prima o poi la prima delle due condizioni è verificata. In particolare abbiamo dimostrato ls seguente proposizione.

Teorema 7. *Sia $v_1, \ldots, v_n$ una lista di generatori di V, allora esiste una sottolista (eventualmente anche tutta la lista iniziale) di $v_1, \ldots, v_n$ che è una bse di V, ovvero esistono $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n$ tali che $v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}$ è una base di V.*

Dimostrazione. Non c'è niente da aggiungere alle linee di spiegazione con le quali abbiamo introdotto l'enunciato (capacitarsene!). □

Malgrado il carattere astratto del linguaggio che stiamo utilizzando, tenendo conto anche della dimostrazione del lemma 3, il procedimento è piuttosto concreto e possiamo illustrarlo anche con un esempio.

Esempio 13. Si consideri in $V = \mathbb{R}^3$ i seguenti vettori:

$$v_1 = (1, 1, 1) \quad v_2 = (1, 1, 0) \quad v_3 = (0, 1, 1) \quad v_4 = (2, 1, 1)$$

Questi vettori sono dei generatori di $\mathbb{R}^3$, la verifica di questo fatto la potete fare per esercizio oppure potete fidarvi. Sicuramente non possono essere dei vettori linearmente indipendenti perché sono quattro vettori infatti troviamo la seguente relazione tra questi vettori

$$2v_1 + 0v_2 - v_3 - v_4 = 0$$

Allora il contenuto delle osservazioni appena fatte è il seguente: possiamo togliere uno qualsiasi dei vettori che compaiono con coefficiente diverso da zero in questa relazione e continuiamo ad avere un sistema di generatori. Per esempio possiamo togliere v_1 e otteniamo che v_2, v_3, v_4 sono ancora generatori ed essendo tre generatori in uno spazio di dimensione 3 sono quindi anche una base.

7. Costruzione di una base e completamento di una lista di vettori linearmente indipendenti ad una base

Affrontiamo ora un problema duale al precedente[1]. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita. In questa sezione vedremo come costruire una base di V. Più precisamente vedremo come data una lista di vettori linearmente indipendenti si possano aggiungere progressivamente altri vettori linearmente indipendenti fino a costruire una base di V. L'osservazione alla base della seguente costruzione è il contenuto del seguente lemma.

Lemma 8. *Siano $v_1 \ldots, v_n \in V$ dei vettori linearmente indipendenti. Sia $v \in V$. Allora i vettori $v_1, \ldots, v_n, v$ sono linearmente indipendenti se e solo se $v \notin \mathrm{Span}\{v_1, \ldots, v_n\}$.*

Dimostrazione. Supponiamo che $v \in \mathrm{Span}\{v_1, \ldots, v_n\}$. Allora $v = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n$. Per quanto già osservato nel lemma 3 i vettori $v_1, \ldots, v_n, v$ sono linermente dipendenti.

Viceversa supponiamo che $v \notin \mathrm{Span}\{v_1, \ldots, v_n\}$ e e dimostriamo che $v_1, \ldots, v_n, v$ sono linearmente indipendenti. Supponiamo di avere una relazione

$$a_1v_1 + \cdots + a_nv_n + bv = 0$$

e dimostriamo che $a_1 = \cdots = a_n = b = 0$. Se $b \neq 0$ possiamo dividere per b e ricavare il vettore v ottenendo

$$v = -\frac{a_1}{b}v_1 \cdots - \frac{a_n}{b}v_n$$

che è in contraddizione con l'ipotesi che $v \notin \mathrm{Span}\{v_1, \ldots, v_n\}$. Dobbiamo quindi avere $b = 0$. La relazione precedente diventa quindi

$$a_1v_1 + \cdots + a_nv_n = 0$$

ma essendo $v_1, \ldots, v_n$ linearmente indipendenti ne ricaviamo $a_1 = \cdots = a_n = 0$. □

Questo lemma ci permette di fornire una strategia per costruire una base di V.

- Primo passo: Scegliamo v_1 come un qualsiasi vettore non nullo di V. Questo costituisce una lista di vettori linearmente indipendenti.
- Secondo passo: Supponiamo di avere già costruito una lista $v_1, \ldots, v_\ell$ di vettori linearmente indipendenti. Se $V = \mathrm{Span}\{v_1, \ldots, v_n\}$ allora $v_1, \ldots, v_\ell$ sono anche una base di V e abbiamo finito. Se $\mathrm{Span}\{v_1, \ldots, v_n\} \neq V$ allora possiamo scegliere un qualsiasi vettore $v \in V \smallsetminus \mathrm{Span}\{v_1, \ldots, v_n\}$ e per il lemma precedente se poniamo $v_{\ell+1} = v$ abbiamo che $v_1, \ldots, v_{\ell+1}$ è una lista di vettori linearmente indipendenti.

[1]La parola duale è molto usata in matematica, in molti casi con un significato preciso, altre volte per indicare, in modo vago, una situazione che è in qualche senso speculare, e opposta alla precedente.

Questa procedura produce una lista crescente di vettori linearmente indipendenti e termina solo quando ha prodotto una base dello spazio vettoriale. Se lo spazio vettoriale ha dimensione finita, diciamo N, sappiamo che una volta che abbiamo prodotto N vettori linearmente indipendenti questi sono anche una base, mentre se lo spazio vettoriale non ha dimensione finita continua a produrre vettori linearmente indipendenti.

La costruzione ha due immediate conseguenze teoriche di cui faremo spesso uso. La prima si ottiene applicando la medesima strategia partendo da una lista preesistente di vettori linearmente indipendenti, in questo caso omettiamo il primo passo e procediamo solo con il secondo passo. Come conseguenza otteniamo il seguente enunciato che utilizzeremo spesso.

Teorema 9 (Completamento di una lista di vettori linearmente indipendenti ad una base)**.** *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e siano $v_1, \ldots, v_\ell$ dei di V linearmente indipendenti. Allora esistono dei vettori $v_{\ell+1}, \ldots, v_n$ di V tali che $v_1, \ldots, v_\ell, v_{\ell+1}, \ldots, v_n$ è una base di V.*

Dimostrazione. Non c'è niente da aggiungere alle linee di spiegazione con le quali abbiamo introdotto l'enunciato (capacitarsene!). □

La seconda conseguenza si ottiene applicando la medesima strategia in presenza di un sottospazio vettoriale U di V.

Teorema 10. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e sia $U \subset V$ un suo sottospazio vettoriale. Allora U ha dimensione finita e* $\dim U \leqslant \dim V$. *Inoltre* $\dim U = \dim V$ *se e solo se* $U = V$.

Dimostrazione. Applichiamo la strategia precedente allo spazio vettoriale U. Scegliamo quindi v_1 e successivamente $v_2, \ldots, v_\ell$ in U invece che in V. Questo produce una lista crescente di vettori linearmente indipendenti di U e quindi anche di V. In particolare per il punto a) del teorema fondamentale tale lista non può essere più lunga di $N = \dim V$. Il processo quindi termina producendo una base di U: $v_1, \ldots, v_\ell$. Abbiamo quindi $\ell = \dim U$.

Come già osservato i vettori $v_1, \ldots, v_\ell$ sono vettori linearmente indipendenti di V e quindi per il punto a) del teorema fondamentale abbiamo $\dim U = \ell \leqslant N = \dim V$. Inoltre se $\ell = N$, sempre per il punto a) abbiamo che $v_1, \ldots, v_\ell$ sono una base di V e in particolare sono dei generatori di V. Quindi poiché sono tutti elementi di U ricaviamo $V \subset U$, ovvero $V = U$. □

Esempio 14. Anche in questo caso, come nel caso dell'estrazione di una base da un insieme di generatori, malgrado il linguaggio astratto, la strategia che abbiamo illustrato per ottenere una base costruendo una successione sempre più lunga di vettori linearmente indipendenti è piuttosto concreta e la possiamo possiamo illustrare con un esempio. Si consideri in $\mathbb{R}^3$ il piano H dei vettori (x, y, z) tali che $x + y + z = 0$. Vogliamo costruire una base di H. Quindi la base avrà al massimo due elementi. Prendiamo un qualsiasi vettore non nullo di H, per esempio $v_1 = (1, -1, 0)$, il suo span sono i vettori della forma $(a, -a, 0)$. Questo non è tutto H per esempio $v_2 = (0, 1, -1)$ è un vettore di H ma non è nello span di v_1. Quindi v_1, v_2 sono due vettori linearmente indipendenti di H. Poiché, per l'ultimo teorema dimostrato, la dimensione di H è minore o uguale a 2, ne concludiamo che v_1, v_2 è una base di H.

8. La formula di Grassmann

In questa sezione. come applicazione delle tecniche sviluppate in questo capitolo, dimostriamo una formula che mette in relazione di la dimensione di due sottospazi con quella della somma e dell'intersezione.

Teorema 11 (Formula di Grassmann)**.** *Siano U e W due sottospazi di dimensione finita di uno spazio vettoriale. Allora*

$$\dim U + \dim W = \dim(U \cap W) + \dim(U + W).$$

Dimostrazione. Sia $v_1, \ldots, v_\ell$ una base di $U \cap W$. Questi vettori, in particolare sono dei vettori linearmente indipendenti sia di U che di W. Per il teorema 9 esistono dei vettori $u_1, \ldots, u_p \in U$ e $w_1, \ldots, w_q \in W$ tali che

$$\begin{aligned} &v_1, \ldots, v_\ell, u_1, \ldots, u_p \text{ è una base di } U, \\ &v_1, \ldots, v_\ell, w_1, \ldots, w_q \text{ è una base di } W. \end{aligned}$$

Quindi $\dim(U \cap W) = \ell$, $\dim U = \ell + p$ e $\dim W = \ell + q$. Se dimostriamo che $v_1, \ldots, v_\ell, u_1, \ldots, u_p, w_1, \ldots, w_q$ è una base di $U + W$ avremmo concluso la dimostrazione, infatti avremmo $\dim(U + W) = \ell + p + q$ e la relazione enunciate nel teorema sarebbe soddisfatta. Dobbiamo quindi dimostrare che $v_1, \ldots, v_\ell, u_1, \ldots, u_p, w_1, \ldots, w_q$ sono sia generatori di $U+W$ che linearmente indipendenti.

Dimostriamo prima che sono generatori di $U + W$. Ogni vettore di $U + W$ si scrive come $u + w$ con $u \in U$ e $w \in W$. Esistono quindi scalari a_i, a'_i, b_i e c_i tali che

$$\begin{aligned} u &= a_1 v_1 + \cdots + a_\ell v_\ell + b_1 u_1 + \cdots + b_p u_p, \\ w &= a'_1 v_1 + \cdots + a'_\ell v_\ell + c_1 w_1 + \cdots + c_q w_q, \end{aligned}$$

da cui

$$u + w = (a_1 + a'_1)v_1 + \cdots + (a_\ell + a'_\ell)v_\ell + b_1 u_1 + \cdots + b_p u_p + c_1 w_1 + \cdots + c_q w_q,$$

dimostrando che i vettori generano $U + W$.

Dimostriamo ora che sono linearmente indipendenti. Supponiamo che

$$a_1 v_1 + \cdots + a_\ell v_\ell + b_1 u_1 + \cdots + b_p u_p + c_1 w_1 + \cdots + c_q w_q = 0_V \tag{3}$$

e dimostriamo che tutti i coefficienti sono nulli. Riscriviamo l'uguaglianza nella forma

$$a_1 v_1 + \cdots + a_\ell v_\ell + b_1 u_1 + \cdots + b_p u_p = -(c_1 w_1 + \cdots + c_q w_q).$$

Il vettore a sinistra dell'uguale è un elemento di U e quello a destra dell'uguale è un elemento di W, poiché sono uguali devono essere entrambi elementi di $U \cap W$ e quindi si possono scrivere come combinazione lineare di $v_1, \dots, v_\ell$. In particolare dobbiamo avere

$$-(c_1 w_1 + \cdots + c_q w_q) = d_1 v_1 + \cdots + d_\ell v_\ell$$

ovvero

$$d_1 v_1 + \cdots + d_\ell v_\ell + c_1 w_1 + \cdots + c_q w_q = 0_V$$

Ma i vettori $v_1, \dots, v_\ell, w_1, \dots, w_q$ sono linearmente indipendenti e quindi tutti i coefficienti debbono essere nulli. In particolare $c_1 = \cdots = c_q = 0$. Sostituendo nell'equazione (3) otteniamo

$$a_1 v_1 + \cdots + a_\ell v_\ell + b_1 u_1 + \cdots + b_p u_p = 0_V.$$

Infine ricordando che i vettori $v_1, \dots, v_\ell, u_1, \dots, u_p$ sono linearmente indipendenti ricaviamo che anche i coefficienti a_i e b_i sono nulli. □

9. Esercizi

Esercizio 9.1. Sia $V = \{(x, y, x) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - z = 0\}$. Sia $v_1 = (1, 0, 1)$ e $v_2 = (1, 1, 3)$. Si dimostri che v_1, v_2 è una base di V. Si calcolino le coordinate del vettore $v = (0, 1, 2)$ rispetto a questa base.

Esercizio 9.2. Si considerino i vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si verifichi che sono una base di $\mathbb{R}^4$ e si calcolino le cordinate dei seguenti vettori rispetto a questa base:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 9.3. Dimostrare che lo spazio vettoriale $\mathbb{R}[t]$ non ha una base.

Esercizio 9.4. Sia $v_1, \dots, v_n$ una base dello spazio vettoriale V. Dimostrare che nessuno dei vettori può essere uguale a zero e che non ci possono essere due vettori uguali nella lista.

Esercizio 9.5. Sia $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ un insieme con n elementi. Per $x \in X$ sia $\delta_x : X \longrightarrow \mathbb{K}$ la seguente funzione:

$$\delta_x(y) = \begin{cases} 1 & \text{se } y = x \\ 0 & \text{se } y \neq x \end{cases}$$

Dimostrare che $\delta_{x_1}, \dots, \delta_{x_n}$ è una base dello spazio vettoriale $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$.

Esercizio 9.6. Completare la dimostrazione che il sottospazio generato da dei vettori $v_1 \dots, v_n$ è un sottospazio dimostrando che è chiuso per moltiplicazione per scalare.

Esercizio 9.7. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ si considerino le seguenti liste di vettori:

$$u_1 = (1,1,1) \qquad u_2 = (1,0,0) \qquad u_3 = (0,1,0) \qquad u_4 = (0,0,1)$$
$$v_1 = (1,1,1) \qquad v_2 = (1,1,0)$$
$$w_1 = (1,1,1) \qquad w_2 = (1,1,0) \qquad w_3 = (1,-1,0)$$

Si dimostri u_1, u_2, u_3, u_4 sono generatori ma non sono linearmente indipendenti, che v_1, v_2 sono linearmente indipendenti ma non sono generatori e che w_1, w_2, w_3 è una base.

Esercizio 9.8. Trovare una base del sottospazio $x - y + 3z = 0$ di $\mathbb{C}^3$. Scrivere le coordinate di $(1,4,1)$ rispetto alla base scelta.

Esercizio 9.9. Si dimostri che i seguenti polinomi sono una base di $\mathbb{C}[t]_{\leqslant 2}$: $f_1(t) = \frac{1}{2}(t-1)(t-2)$, $f_2(t) = \frac{1}{2}t(t-1)$, $f_3(t) = -t(t-2)$. Sia $f = t^2$, scrivere le coordinate di f rispetto a f_1, f_2, f_3. Se f è un polinomio qualsiasi quali sono le coordinate di f rispetto alla base f_1, f_2, f_3. (C'è un modo molto sintetico ed efficace per farlo)

Esercizio 9.10. Sia V uno spazio vettoriale V su K. Siano $u, v \in V$ e sia v diverso da zero. Dimostrare che u e v sono linearmente dipendenti se e solo se esiste $\lambda \in \mathbb{K}$ tale che $u = \lambda v$.

Esercizio 9.11. Sia v_1, v_2, v_3, v_4 una base di uno spazio vettoriale V. Dimostrare che per ogni v in V i vettori v_1, v_2, v_3, v_4, v generano V ma non sono linearmente indipendenti.

Esercizio 9.12. Sia v_1, v_2, v_3, v_4 una base di uno spazio vettoriale V e sia $U = \mathrm{Span}(v_1, v_2)$ e $W = \mathrm{Span}(v_3, v_4)$. Determinare $U \cap W$ e $U + W$.

Esercizio 9.13. Siano $u_1, \dots, u_h, w_1, \dots, w_k$ e sia $U = \mathrm{Span}(u_1, \dots, u_h)$ e sia $W = \mathrm{Span}(w_1, \dots, w_k)$. Allora $U+W$ è generato da $u_1, \dots, u_h, w_1, \dots, w_k$. [Se aiuta sostituire h e k con 2 e 3]

Esercizio 9.14. Sia U e W due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V. Siano $u_1, u_2 \in U$ e $w_1, w_2 \in W$. Dimostrare che se $U \cap W = \{0\}$ e u_1, u_2 sono linearmente indipendenti e w_1, w_2 sono linearmente indipendenti allora u_1, u_2, w_1, w_2 sono linearmente indipendenti.

Esercizio 9.15. Siano $v_1, \dots, v_n \in V$ dei vettori linearmente indipendenti. Sia $v \in V$. Dimostrare che $v_1, \dots, v_n, v$ sono linearmente indipendenti se e solo se $v \notin \mathrm{Span}\{v_1, \dots, v_n\}$.

Dimostrazione del teorema fondamentale.

Esercizio 9.16. Sia n un numero naturale maggiore o uguale a 1 e si consideri un sistema della forma

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n+1}x_{n+1} = 0 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n+1}x_{n+1} = 0 \\ \dots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,n+1}x_{n+1} = 0 \end{cases}$$

Sono n equazioni nelle variabili $x_1, \dots, x_{n+1}$. Si dimostri, per induzione su n che questo sistema ha almeno una soluzione $(x_1, \dots, x_{n+1})$ in cui non tutti gli x_i sono nulli.

Esercizio 9.17. Sia $v_1, \dots, v_n$ una base di V e siano $u_1, \dots, u_{n+1} \in V$. Utilizzando il risultato dell'esercizio precedente dimostrare che $u_1, \dots, u_{n+1}$ non sono linearmente indipendenti.

Esercizio 9.18. Utilizzano il risultato dell'esercizio precedente dimostrare il punto b) del teorema fondamentale dell'algebra lineare, esclusa la parte che riguarda il caso in cui $\ell = n$, e il punto c) del teorema fondamentale dell'algebra lineare.

Esercizio 9.19. Utilizzando il risultato dell'esercizio precedente e alcune considerazioni fatte nelle sezioni 6 e 7 dimostrare il teorema fondamentale dell'algebra lineare.