L'AREA DI UN TRIANGOLO E IL PRODOTTO VETTORIALE

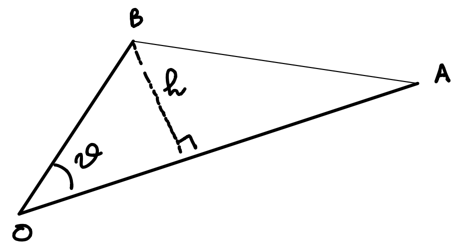
Vogliamo ora descrivere una formula per l'area del triangolo

OAB con $A = (a_1\ a_2\ a_3)$ e $B = (b_1\ b_2\ b_3)$

PROPOSIZIONE Il triangolo OAB ha area uguale a

$$\frac{1}{2}\sqrt{(a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2}$$

dim Sia S l'area cercata.



Abbiamo

$$S = \frac{1}{2}\,\mathrm{dist}(O,A)\cdot h$$

dove h è l'altezza del triangolo relativa alla base OA.
Abbiamo

$$\mathrm{dist}(O,A) = \|A\| \quad e \quad h = \mathrm{dist}(O,B)\sin\vartheta = \|B\|\sin\vartheta$$

dove ϑ è l'angolo AOB. ϑ è un angolo compreso tra $0°$ e $180°$ quindi $\sin\vartheta \geq 0$ da cui

$$\sin\vartheta = \sqrt{1 - (\cos\vartheta)^2}$$

Infine possiamo calcolare $\cos\vartheta$ usando il prodotto scalare e otteniamo

$$\cos\vartheta = \frac{A\cdot B}{\|A\|\ \|B\|} \quad \text{e quindi} \quad \sin\vartheta = \sqrt{1 - \left(\frac{A\cdot B}{\|A\|\ \|B\|}\right)^2}$$

Mettendo tutti i pezzi insieme otteniamo

$$S = \frac{1}{2}\|A\|\ \|B\|\sqrt{1 - \left(\frac{A\cdot B}{\|A\|\ \|B\|}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\|A\|^2\ \|B\|^2 - (A\cdot B)^2}$$

Sviluppiamo ora l'espressione all'interno

$$\|A\|^2\|B\|^2-(A\cdot B)^2$$

$$=(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2$$

$$=\cancel{a_1^2b_1^2}+a_1^2b_2^2+a_1^2b_3^2+a_2^2b_1^2+\cancel{a_2^2b_2^2}+a_2^2b_3^2+$$
$$a_3^2b_1^2+a_3^2b_2^2+\cancel{a_3^2b_3^2}-\cancel{a_1^2b_1^2}-\cancel{a_2^2b_2^2}-\cancel{a_3^2b_3^2}$$
$$-2a_1a_2b_1b_2-2a_1a_3b_1b_3-2a_2a_3b_2b_3$$

$$=a_2^2b_3^2-2a_2b_3a_3b_2+a_3^2b_2^2$$
$$+a_3^2b_1^2-2a_3b_1a_1b_3+a_1^2b_3^2$$
$$+a_1^2b_2^2-2a_1b_2a_2b_1+a_2^2b_1^2$$
$$=(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2$$

e quindi otteniamo la formula cercata #

DEFINIZIONE (PRODOTTO VETTORIALE)

Dati $A=(a_1\ a_2\ a_3)$ e $B=(b_1\ b_2\ b_3)$ definisco il prodotto vettoriale tra A e B come il vettore

$$A\wedge B=(a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1)$$

OSSERVAZIONE Se S è la superficie del triangolo OAB, e ϑ è l'angolo AOB nella dimostrazione della proposizione precedente abbiamo visto

$$2S=\|A\|\,\|B\|\sin\vartheta=\|A\wedge B\|$$

Esempio

Se $e_1=(1,0,0)$ $e_2=(0,1,0)$ $e_3=(0,0,1)$

abbiamo

$$e_1 \wedge e_2 = e_3 \qquad e_2 \wedge e_3 = e_1 \qquad e_3 \wedge e_1 = e_2$$

<u>OSSERVAZIONE</u> (PROPRIETÀ DEL PRODOTTO VETTORIALE)

Se $A, B, C \in \mathbb{R}^3$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ allora

1) $A \wedge B = - B \wedge A$

2) $(A \wedge B) \cdot A = 0 \qquad (A \wedge B) \cdot B$

ovvero $A \wedge B$ è ortogonale ad A e a B

3) $A \wedge (B + C) = A \wedge B + A \wedge C$

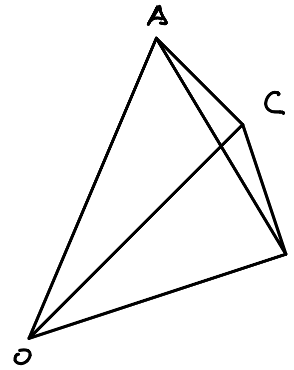
$(A + B) \wedge C = A \wedge C + B \wedge C$

4) $\lambda A \wedge B = A \wedge \lambda B = \lambda (A \wedge B)$

<u>Esercizio</u> Dimostrare tutte queste proprietà

VOLUME DI UN TETRAEDRO

Sia $A = (a_1\ a_2\ a_3)$ $B = (b_1\ b_2\ b_3)$ e $C = (c_1\ c_2\ c_3)$ vogliamo trovare una formula semplice per il volume V del tetraedro $OABC$.



PROPOSIZIONE

Il volume del tetraedro $OABC$ è dato da

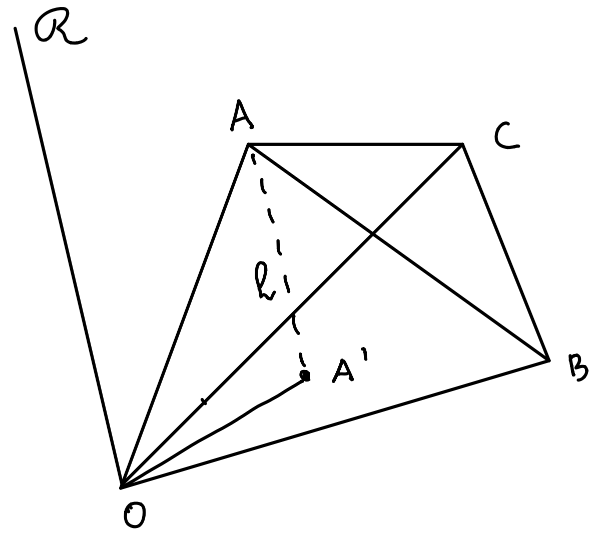
$$\frac{1}{6}\left|A \cdot (B \wedge C)\right| =$$

$$= \frac{1}{6}\left|a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_2 b_1 c_3 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1\right|$$

dimostrazione Sia Π il piano OBC e R la retta per l'origine ortogonale a Π.

Sia A' la proiezione di A sul piano Π

Sia S la superficie del triangolo OBC e sia $h = dist(A, A')$ l'altezza relativa a questo piano.



Allora se V è il volume

$$V = \frac{1}{3} S \cdot h$$

Inoltre $S = \frac{1}{2} \| B \wedge C \|$ quindi

$$V = \frac{1}{6} \| B \wedge C \| \cdot h$$

Osserviamo inoltre che $B \wedge C$ è ortogonale a Π quindi

$$\mathcal{R} = \mathbb{R}\, B \wedge C$$

Per calcolare A' possiamo quindi applicare la formula determinata in precedenza per la proiezione su un piano

$$A' = A - \frac{A \cdot (B \wedge C)}{\| B \wedge C \|^2} B \wedge C = A - \alpha\, B \wedge C$$

con $\alpha = \dfrac{A \cdot (B \wedge C)}{\| B \wedge C \|^2}$. Quindi

$$h = dist\left(A, A'\right) = \| A - A' \| = \| \alpha\, B \wedge C \| = |\alpha| \, \| B \wedge C \|$$

$$= \frac{| A \cdot (B \wedge C) |}{\| B \wedge C \|^2} \| B \wedge C \| = \frac{| A \cdot (B \wedge C) |}{\| B \wedge C \|}$$

e infine

$$V = \frac{1}{6} \| B \wedge C \| \frac{| A \cdot (B \wedge C) |}{\| B \wedge C \|} = \frac{1}{6} \left| A \cdot (B \wedge C) \right|$$

Espandendo il prodotto vettoriale e il prodotto scalare si trova la 2ª formula.

#