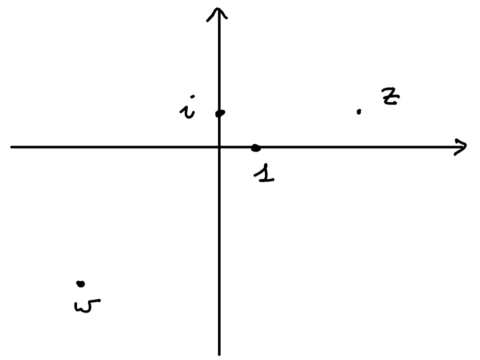
NUMERI COMPLESSI : II PARTE

I NUMERI REALI LI POSSIAMO RAPPRESENTARE GEOMETRICAMENTE COME I PUNTI DI UNA RETTA. ESSENDO COPPIE DI NUMERI REALI, POSSIAMO RAPPRESENTARE I NUMERI COMPLESSI COME PUNTI NEL PIANO CARTESIANO. IL NUMERO $a+bi$ CON $a, b \in \mathbb{R}$ CORRISPONDERÀ AL PUNTO (a, b).



MOLTE OPERAZIONI TRA I NUMERI COMPLESSI HANNO UNA CHIARA RAPPRESENTAZIONE GEOMETRICA

$z = 4 + i \qquad w = -4 - 4i$

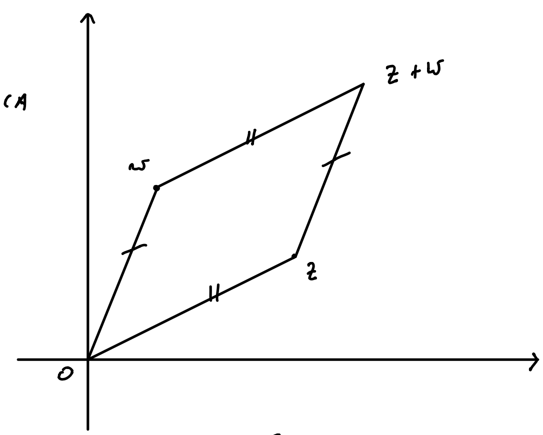
SOMMA E TRASLAZIONI

LA SOMMA HA UNA INTERPRETAZIONE GEOMETRICA SEMPLICE

SE $z, w \in \mathbb{C}$ ALLORA IL QUADRILATERO DI VERTICI

$$0,\ z,\ z+w,\ w$$

È UN PARALLELOGRAMMA.



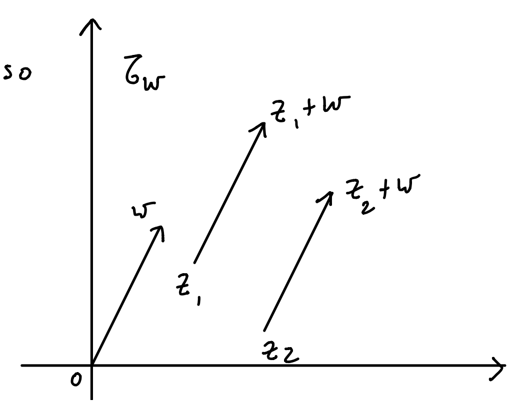
$z = 6 + 3i$
$w = 2 + 5i$

POSSIAMO UTILIZZARE LA SOMMA DI NUMERI COMPLESSI ANCHE PER DESCRIVERI LE TRASLAZIONI DEL PIANO.

FISSIAMO UN NUMERO COMPLESSO $w \in \mathbb{C}$.

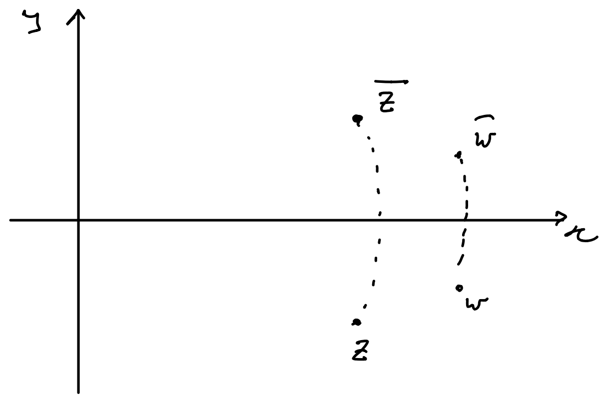
CONSIDERIAMO LA SEGUENTE TRASFORMAZIONE DEL PIANO

$$\tau_w : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto z + w$$



CIOÈ LA TRASFORMAZIONE CHE PRENDE UN NUMERO COMPLESSO z E LO MANDA IN $z+w$. QUESTA È UNA TRASLAZIONE E OGNI TRASLAZIONE PUÒ ESSERE DESCRITTA IN QUESTO MODO.

CONIUGIO



CONSIDERIAMO ADESSO L'OPERAZIONE DI CONIUGIO

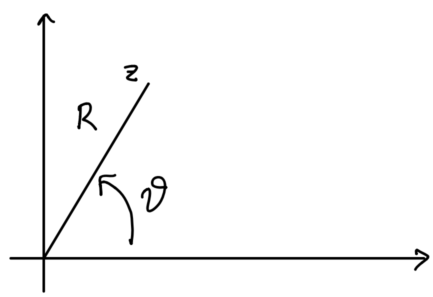
$$z \longmapsto \bar{z}$$

$$(a, b) \longrightarrow (a, -b)$$

ANCHE QUESTA HA UNA CHIARA INTERPRETAZIONE GEOMETRICA E CORRISPONDE ALLA SIMMETRIA RISPETTO ALL'ASSE DELLE x.

COORDINATE POLARI: MODULO E ARGOMENTO

Sie $z = a + bi \in \mathbb{C}$ con $a, b \in \mathbb{R}$. QUESTO CORRISPONDE AL PUNTO DEL PIANO (a, b). E SIANO R, ϑ LE COORDINATE POLARI DEL PUNTO (a, b). QUINDI



$$R = \text{distanza da } (a, b) \text{ da } (0,0)$$
$$= \sqrt{a^2 + b^2}$$

ϑ è l'angolo CHE IL SEGMENTO $(0,0)$ (a,b) FORMA CON IL SEMIASSE DELLE $x \geq 0$ MISURATO IN SENSO ANTIORARIO COME IN FIGURA.

QUANDO SI PARLA DI UN NUMERO COMPLESSO z

- R SI CHIAMA IL MODULO DI z

  E SI INDICA CON $|z|$

- ϑ SI CHIAMA L'ARGOMENTO DI z

  E SI INDICA CON $\arg(z)$. È UN ANGOLO

RICORDO CHE SE z CORRISPONDE AL PUNTO (a, b) ABBIAMO LE SEGUENTI RELAZIONI TRA COORDINATE CARTESIANE E COORDINATE POLARI

$$a = R\cos\vartheta \qquad b = R\sin\vartheta$$

QUINDI

$$z = R\cos\vartheta + R\sin\vartheta\, i$$
$$= R\left(\cos\vartheta + i\sin\vartheta\right)$$

COME VEDREMO QUESTO MODO DI SCRIVERE I NUMERI COMPLESSI È MOLTO UTILE IN VARIE SITUAZIONI.

È VERO ANCHE IL VICEVERSA, OVVERO SE

$$z = R\left(\cos\vartheta + i\sin\vartheta\right)$$

CON $R, \vartheta \in \mathbb{R}$ E $R > 0$ ALLORA $R = |z|$ E $\vartheta = \arg(z)$.

INFATTI:

$$|z| = \sqrt{R^2(\cos\vartheta)^2 + R^2(\sin\vartheta)^2} =$$
$$= \sqrt{R^2\left((\cos\vartheta)^2 + (\sin\vartheta)^2\right)} = \sqrt{R^2} = R$$

e se pongo $\alpha = \arg z$ abbiamo

$$\begin{cases} R\cos\vartheta = R\cos\alpha \\ R\sin\vartheta = R\sin\alpha \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} \cos\vartheta = \cos\alpha \\ \sin\vartheta = \sin\alpha \end{cases}$$

DA CUI $\alpha = \vartheta$ COME ANGOLO.

INTERPRETAZIONE GEOMETRICA DEL PRODOTTO

PROPOSIZIONE

SIANO $z, w \in \mathbb{C}$ ALLORA

$$|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$$

$$\arg(z \cdot w) = \arg z + \arg w$$

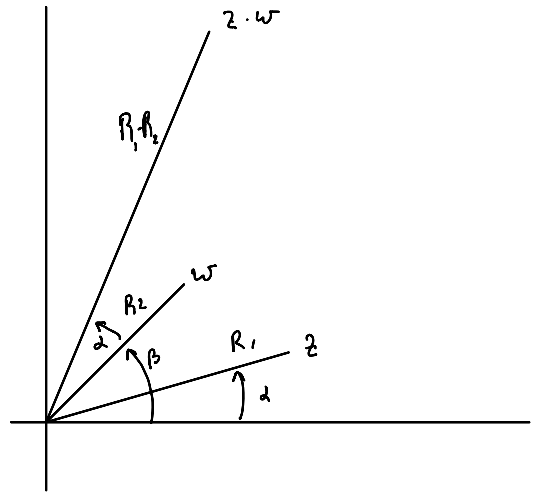
DIM

Sia $R_1 = |z|$ $\quad R_2 = |w|$

$\vartheta_1 = \arg(z)$ $\quad \vartheta_2 = \arg w$

QUINDI

$$z = R_1(\cos\vartheta_1 + i\sin\vartheta_1)$$
$$w = R_2(\cos\vartheta_2 + i\sin\vartheta_2)$$



FACCIAMO IL PRODOTTO

$$z\cdot w = R_1(\cos\vartheta_1 + i\sin\vartheta_1)R_2(\cos\vartheta_2 + i\sin\vartheta_2) =$$
$$= R_1R_2\big(\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2 + i\cos\vartheta_1\sin\vartheta_2 + i\sin\vartheta_1\cos\vartheta_2 + i^2\sin\vartheta_1\sin\vartheta_2\big) =$$
$$= R_1R_2\big((\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2 - \sin\vartheta_1\sin\vartheta_2) + i(\cos\vartheta_1\sin\vartheta_2 + \sin\vartheta_1\cos\vartheta_2)\big)$$
$$= R_1R_2\big(\cos(\vartheta_1+\vartheta_2) + i\sin(\vartheta_1+\vartheta_2)\big)$$

DA CUI $\quad |z\cdot w| = R_1\cdot R_2 = |z|\cdot|w|$

$$\arg(z\cdot w) = \vartheta_1 + \vartheta_2 = \arg z + \arg w$$

#

QUESTO MODO DI DESCRIVERE IL PRODOTTO È UTILE IN MOLTI CASI. VEDIAMO QUALCHE ESEMPIO.

ESERCIZIO $\quad$ SIA $z = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$.

CALCOLARE z^5.

CALCOLIAMO $|z|$ E $\arg(z)$.

ABBIAMO $|z| = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1$

INOLTRE SE $\vartheta = \arg(z)$ ABBIAMO

$$\begin{cases} 1 \cdot \cos\vartheta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 \cdot \sin\vartheta = \frac{1}{2} \end{cases}$$

OVVERO $\vartheta = \frac{\pi}{6}$

QUINDI PER LA PROPOSIZIONE $|z^5| = |z|^5 = 1^5 = 1$

E $\arg(z^5) = 5\arg(z) = \frac{5\pi}{6}$

QUINDI $z^5 = 1\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) =$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \qquad \#$$

<u>ESERCIZIO</u> RISOLVERE L'EQUAZIONE $z^3 = 1$ #

Sia $R = |z|$ E $\vartheta = \arg z$ E

INOLTRE POSSO ASSUMERE $\vartheta \in [0, 2\pi)$

PER LA PROPOSIZIONE APPENA DIMOSTRATA

$$|z|^3 = R^3$$

$$\arg(z^3) = 3\vartheta$$

L'EQUAZIONE $z^3 = 1$ È EQUIVALENTE

$$\begin{cases} |z|^3 = 1 \\ \arg z^3 = \arg 1 \end{cases} \quad \text{OVVERO} \quad \begin{cases} R^3 = 1 \\ 3\vartheta = 0 \end{cases} \text{ come angolo}$$

POICHE $R \in \mathbb{R}$ DALLA PRIMA EQUAZIONE

RICAVIAMO $R = 1$.

DALLA SECONDA EQUAZIONE RICAVIAMO INVECE

$$3\vartheta = 2k\pi \qquad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

OVVERO $\vartheta = \frac{2k\pi}{3}$

INOLTRE DA $\vartheta \in [0, 2\pi)$ RICAVO

$$0 \leq \frac{2\pi k}{3} < 2\pi$$

OVVERO $0 \leq k < 3$. QUINDI ABBIA 3 POSSIBILITÀ

$k = 0 \qquad \vartheta = 0 \qquad z_1 = \cos 0 + i \sin 0 = 1$

$k = 1 \qquad \vartheta = \frac{2\pi}{3} \qquad z_2 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$k = 2 \qquad \vartheta = \frac{4\pi}{3} \qquad z_3 = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

ESPONENZIALE COMPLESSO

DEFINIAMO ADESSO COSA VUOL DIRE e^z QUANDO Z È UN NUMERO COMPLESSO. A NOI INTERESSERÀ SOPRATTUTTO IL CASO IN CUI $z = yi$ CON $y \in \mathbb{R}$, LA DEFINIZIONE CHE DAREMO SEMBRERÀ ARBITRARIA, E IN EFFETTI NOI LO UTILIZZEREMO SOLO COME FORMALISMO CONVENIENTE PER USARE LE COORDINATE POLARI. CI SONO DEI MOTIVI PIÙ SOSTANZIALI PER DEFINIRE L'ESPONENZIALE COMPLESSO IN QUESTO MODO CHE VEDRETE PIÙ AVANTI NEL CORSO DI ANALISI.

DEFINIZIONE SIA $z = x + iy$ CON $x, y \in \mathbb{R}$ ALLORA DEFINISCO

$$e^z = e^x (\cos y + i \sin y)$$

QUESTO È L'USUALE ESPONENZIALE DI UN NUMERO REALE. IN PARTICOLARE SE $y = 0$ OTTENIAMO CHE IL SECONDO FATTORE È UGUALE A 1 E QUINDI IL NUOVO ESPONENZIALE COMPLESSO È UGUALE ALL'USUALE ESPONENZIALE DI UN NUMERO REALE

ESEMPIO

$$e^{1+\pi i} = e^1 (\cos \pi + i \sin \pi) = -e$$

PROPOSIZIONE

1) $e^0 = 1 \qquad e^1 = e$

2) Se $z = iy$ con $y \in \mathbb{R}$

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y$$

3) Se $z, w \in \mathbb{C}$ allora

$$e^{z+w} = e^z \cdot e^w$$

DIM 1) e 2) sono ovvie.

3) È un conto del tutto simile a quello della dimostrazione della proposizione in cui si è descritto il prodotto e lo lasciamo per esercizio. #

L'osservazione che utilizzeremo spesso è che dire che $|z| = R$ e $\arg(z) = \vartheta$ è equivalente a dire

$$z = R\, e^{i\vartheta}$$

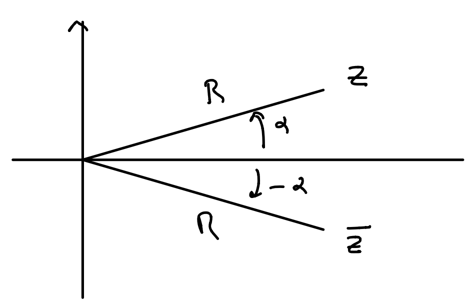
con $\vartheta, R \in \mathbb{R}$ e $R \geq 0$. Per noi l'esponenziale complesso sarà soprattutto questo un modo conveniente di scrivere le coordinate polari.

Esempio

Risolvere l'equazione $z^3 \bar{z} = 16$.

Sia $R = |z|$ e $\vartheta = \arg(z)$ con $\vartheta \in [0, 2\pi)$

quindi $z = R e^{i\vartheta}$.



Osserviamo che $|\bar{z}| = R$

e $\arg \bar{z} = -\arg z$

quindi $\bar{z} = R\, e^{-i\vartheta}$.

(questo è un fatto generale che è utile ricordare)

L'EQUAZIONE INIZIALE DIVENTA QUINDI

$$(Re^{i\vartheta})^3 (Re^{-i\vartheta}) = 16$$

OVVERO $$R^4 e^{3i\vartheta - i\vartheta} = 16$$

OVVERO $$R^4 e^{2i\vartheta} = 16.$$

quindi $R^4 = 16$ E $2\vartheta = 0$ COME ANGOLO

DA $R^4 = 16$ OTTENIAMO $R = 2$ PERCHÉ $R \in \mathbb{R}$ E $R \geq 0$.

DA $2\vartheta = 0$ COME ANGOLO OTTENIAMO $\vartheta = 0$ O $\vartheta = \pi$.

QUINDI ABBIAMO DUE SOLUZIONI

$\vartheta = 0$ $\quad z = 2$

$\vartheta = \pi$ $\quad z = -2$

RADICI n-ESIME DELL'UNITÀ.

VOGLIAMO STUDIARE L'EQUAZIONE $z^n = 1$.

PONIAMO $|z| = R$, $\arg(z) = \vartheta$, CON $\vartheta \in [0, 2\pi)$

QUINDI $z = Re^{i\vartheta}$ E $z^n = R^n e^{in\vartheta}$.

L'EQUAZIONE $z^n = 1$ È QUINDI EQUIVALENTE A

$$\begin{cases} R^n = |z^n| = 1 \\ n\vartheta = \arg(z^n) = 0 \quad \text{come angolo} \end{cases}$$

POICHÈ $R \in \mathbb{R}$ E $R \geq 0$ DALLA PRIMA EQUAZIONE RICAVIAMO $R = 1$. DALLA SECONDA

$$n\vartheta = 2k\pi \quad \text{CON} \quad k \in \mathbb{Z}$$

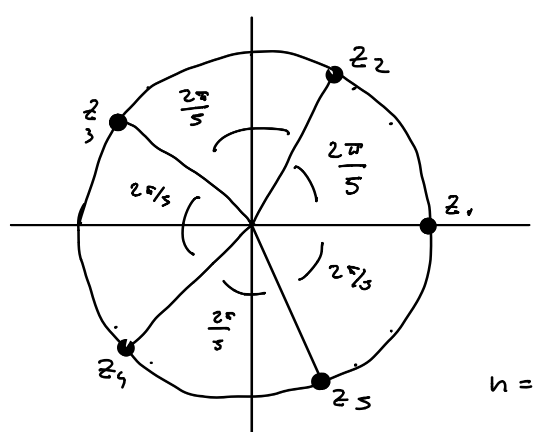
OVVERO $\vartheta = \dfrac{2\pi}{n} k$.

DALLA CONDIZIONE $0 \leq \vartheta < 2\pi$ RICAVIAMO INOLTRE $0 \leq k < n$. QUINDI ESISTONO n SOLUZIONI DELL'EQUAZIONE $z^n = 1$,

- $k = 0$ $\quad \vartheta = 0$ $\quad z_1 = e^{i \cdot 0} = 1$
- $k = 1$ $\quad \vartheta = 2\pi/n$ $\quad z_2 = e^{2\pi i/n}$
- $k = 2$ $\quad \vartheta = 4\pi/n$ $\quad z = e^{4\pi i/n}$

  ... $\quad$ ... $\quad$ ...
- $k = n-1$ $\quad \vartheta = 4\pi(n-1)/n$ $\quad z_n = e^{2\pi(n-1)i/n}$

GEOMETRICAMENTE QUESTI SONO I VERTICI DEL POLIGONO REGOLARE CON n LATI ISCRITTO NELLA CIRCONFERENZA UNITARIA COME IN FIGURA



$n = 5$

SIMILMENTE SI PUÒ RISOLVERE L'EQUAZIONE $z^n = w$ DOVE w È UN NUMERO COMPLESSO QUALSIASI.

Sia $w = A e^{i\alpha}$ con $A = |w|$ $\alpha = \arg(w)$

Sia $R = \sqrt[n]{A}$ E SIA $\vartheta = \frac{\alpha}{n}$ E SIA $z_0 = R e^{i\vartheta}$.

ALLORA $z_0^n = R^n e^{in\vartheta} = A e^{i\alpha} = w$.

z_0 È UNA SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE $z^n = w$.

CERCHIAMO ORA LE ALTRE SOLUZIONI.

PONIAMO $z = z_0 \cdot u$ ALLORA

$$z^n = z_0^n u^n = w u^n$$

QUINDI $z^n = w$ SE E SOLO SE $u^n = 1$.

QUINDI LE SOLUZIONI DI $z^n = w$ SONO TUTTE LE z DELLA FORMA

$$z = \sqrt[n]{A} \; e^{i\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)}$$

CON $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$

#