

# I NUMERI COMPLESSI

## A COSA SERVONO I NUMERI COMPLESSI

I NUMERI COMPLESSI HANNO UN'ORIGINE DIVERSA DA QUELLA DEI NUMERI INTERI O DEI NUMERI REALI, CHE, DA ALCUNI PUNTI DI VISTA LI RENDE MENO INTUITIVI E PIÙ ASTRATTI. MENTRE I NUMERI INTERI E I NUMERI REALI SONO LEGATI A DUE OPERAZIONI NATURALI COME QUELLE DI CONTARE E MISURARE, I NUMERI COMPLESSI NASCONO COME ARTIFICIO MATEMATICO, E PIÙ PRECISAMENTE COME STRUMENTO UTILE PER RISOLVERE ALCUNI PROBLEMI LEGATI ALLA RISOLUZIONE DELLE EQUAZIONI POLINOMIALI DI 3° GRADO. IN QUALCHE SENSO I NUMERI REALI E I NUMERI INTERI SONO LA DESCRIZIONE MATEMATICA DI QUALCOSA DI CUI ABBIAMO GIÀ ESPERIENZA MENTRE I NUMERI COMPLESSI SONO UNA INVENZIONE, COME DICEVANO QUESTO PÒ RENDERLI MENO INTUITIVI E QUINDI PIÙ OSTICI ALL'INIZIO. COME VEDREMO PERÒ I NUMERI COMPLESSI HANNO DA MOLTI PUNTI DI VISTA PROPRIETÀ MIGLIORI DEI NUMERI REALI, E SONO UTILI PER RISOLVERE MOLTI PROBLEMI. LE PROPRIETÀ DEI NUMERI COMPLESSI CHE LI RENDONO UTILI SONO ESSENZIALMENTE QUESTE DUE:

- I NUMERI COMPLESSI SI POSSONO SOMMARE E MOLTIPLICARE E VALGONO LE STESSA PROPRIETÀ DI SEMPLIFICAZIONE E RAGIONAZIONE DELLE ESPRESSIONI IMPARATE PER I NUMERI REALI
- OGNI EQUAZIONE POLINOMIALE DI GRADO  $\geq 1$  HA SOLUZIONE.

## LA DEFINIZIONE DI CORPO

I NUMERI REALI, CHE INDICHEREMO CON  $\mathbb{R}$ , HANNO LE SEGUENTI PROPRIETÀ ALGEBRICHE

- È DEFINITA UNA SOMMA, CIOÈ DATI  $a, b \in \mathbb{R}$  È POSSIBILE CALCOLARE UN NUOVO ELEMENTO  $a + b$
- È DEFINITA UN PRODOTTO, CIOÈ DATI  $a, b \in \mathbb{R}$  È POSSIBILE CALCOLARE UN NUOVO ELEMENTO  $a \cdot b$
- IN  $\mathbb{R}$  CI SONO DUE ELEMENTI  $0, 1$  DISTINTI

P1 • PROPRIETÀ COMMUTATIVA.  $\forall a, b \in \mathbb{R}$   
 $a + b = b + a$                        $a \cdot b = b \cdot a$

P2 • PROPRIETÀ ASSOCIATIVA.  $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$   
 $(a + b) + c = a + (b + c)$                        $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

P3 • PROPRIETÀ DI 0 e 1.  $\forall a \in \mathbb{R}$   
 $0 + a = a$                        $1 \cdot a = a$

P4 • ESISTENZA DELL'OPPOSTO.  $\forall a \in \mathbb{R}$  esiste un  
 unico  $b \in \mathbb{R}$  tale che  $a + b = 0$ .

P5 • ESISTENZA DEL RECIPROCO.  $\forall a \in \mathbb{R}$  diverso  
 da 0 esiste un unico  $b \in \mathbb{R}$  tale che  $a \cdot b = 1$ .

P6 • PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA.  $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$   
 $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

ANCHE I NUMERI RAZIONALI, CHE INDICHEREMO CON  $\mathbb{Q}$ ,  
 HANNO LE STESSA PROPRIETÀ. IN GENERALE UN INSIEME  
 $K$  SUL QUALE SONO DEFINITE DUE OPERAZIONI,  $+$  e  $\cdot$   
 E SONO FISSATI DUE ELEMENTI DISTINTI 0 E 1 E  
 PER IL QUALE VALGONO LE PROPRIETÀ ELENCAE  
 SOPRA SI DICE UN CAMPO.

NATURALMENTE PER  $\mathbb{R}$  O PER  $\mathbb{Q}$  VALGONO MOLTE ALTRE  
 PROPRIETÀ ALGEBRICHE. IN REALTÀ TUTTE LE PROPRIETÀ  
 CHE ABBIAMO IMPARATO AD UTILIZZARE PER MANIPOLARE  
 LE ESPRESSIONI, OVVERO LE PROPRIETÀ CHE PERMETTONO DI  
 FARE I CONTI, SI POSSONO DEDURRE DA QUELLE  
 ELENCAE SOPRA, E QUINDI VALGONO IN UN QUALSIASI  
 CAMPO. FACCIAMO ALCUNI ESEMPI PER CONVINCERCELE

ESEMPIO 1 SIA  $K$  UN CAMPO (PER ESEMPIO  $\mathbb{Q}$  O  $\mathbb{R}$ ) ALLORA  
 $\forall a \in K \quad 0 \cdot a = 0$

dimostrazione

SIA  $x = a \cdot 0$ . PER P3  $0 = 0 + 0$  quindi

$$x = a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) \stackrel{P6}{=} a \cdot 0 + a \cdot 0 = x + x$$

QUINDI  $x = x + x$ . PER P4  $\exists y$  TALE CHE  $y + x = 0$

$$\text{QUANDI} \quad 0 = y + x = y + (x + x) \stackrel{P2}{=} (y + x) + x \stackrel{P3}{=} 0 + x = x$$

OVVERO  $a \cdot 0 = x = 0$  #

ESEMPIO 2 LA PROPRIETÀ COMPUTATIVA ED ASSOCIATIVA  
 DELLA SOMMA CI DICONO CHE QUANDO ABBIAMO UNA  
 SOMMA DI PIÙ TERMINI NON CONTA L'ORDINE CON  
 CUI SI SOMMANO. PER ESEMPIO

$$((7 + 8) + 13) + 22 = (7 + 13) + (8 + 22) = 20 + 30 = 50$$

PER QUESTO MOTIVO LE PARENTESI IN QUESTO CASO  
 NON SI SCRIVONO PROPRIO.

UNA OSSERVAZIONE ANALOGA SI PUÒ FARE PER IL PRODOTTO

ESEMPIO 3 I NUMERI REALI HANNO, OLTRE SOMMA E PRODOTTO, ALTRE DUE OPERAZIONI, SOTTRAZIONE E DIVISIONE. ANCHE QUESTE POSSIAMO RICOSTRUIRE A PARTIRE DA  $+$  E  $\cdot$  E DALLE PROPRIETÀ DI CAMPO.

PER P4 DATO  $a \in K$  ESISTE UN UNICO  $b \in K$  TALE CHE  $b + a = 0$ . QUESTO ELEMENTO SI CHIAMA L'OPPOSTO DI  $a$  E SI INDICA CON  $-a$ .

DEFINIAMO LA SOTTRAZIONE COME

$$x - y = x + (-y)$$

SIMILMENTE PER P5 DATO  $a \in K$   $a \neq 0$  ESISTE UN UNICO  $b \in K$  TALE  $b \cdot a = 1$ . QUESTO ELEMENTO SI CHIAMA IL RECIPROCO O L'INVERSO E SI INDICA CON  $\frac{1}{a}$  O CON  $a^{-1}$ .

SE  $y \neq 0$  DEFINIAMO LA DIVISIONE COME

$$\frac{x}{y} = x \cdot \frac{1}{y}$$

ESEMPIO 4  $\forall a, b \in K$

$$(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$$

dim Osserviamo che

$$0 = 0 \cdot b = (a + (-a)) \cdot b = a \cdot b + (-a) \cdot b$$

$\uparrow$  Esempio 1       $\uparrow$  definizione:  $-a$        $\uparrow$  P6

quindi:

$$0 = a \cdot b + (-a) \cdot b$$

da cui:

$$(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$$

#

Esercizio Scegliere una proprietà algebrica a piacere dei numeri reali e dedurla da P1, ..., P6

## DEFINIZIONE DEI NUMERI COMPLESSI

DEFINIREMO ORA UN INSIEME  $\mathbb{C}$  MUNITO DI DUE OPERAZIONI CHE INDICHEREMO CON  $+_{\mathbb{C}}$  E  $\cdot_{\mathbb{C}}$ .

COME INSIEME  $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2 = \{ (a, b) : a, b \in \mathbb{R} \}$

DEFINIZIONE DI  $+_{\mathbb{C}}$  E  $\cdot_{\mathbb{C}}$ . SE  $(a, b), (c, d) \in \mathbb{C}$

$$(a, b) +_{\mathbb{C}} (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(a, b) \cdot_{\mathbb{C}} (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

DEFINIZIONE DI  $0_{\mathbb{C}}$  E  $1_{\mathbb{C}}$ .

$$0_{\mathbb{C}} = (0, 0)$$

$$1_{\mathbb{C}} = (1, 0)$$

UTILIZZIAMO PER ADDESSO I SIMBOLI  $+_{\mathbb{C}}, \cdot_{\mathbb{C}}, 1_{\mathbb{C}}, 0_{\mathbb{C}}$ , PER DISTINGUERLI DA  $+, \cdot, 0, 1$  TRA I NUMERI REALI. IN SEGUITO INDICHEREMO SOMMA, PRODOTTO, ZERO, UNO ANCHE DEI NUMERI COMPLESSI CON  $+, \cdot, 0, 1$ .

LA DEFINIZIONE DEL PRODOTTO PUÒ SEMBRARE AL MOMENTO UN POCO COMPLICATA E ASTRUSA MA COME VEDREMO PRESTO HA UNA SUA RAGIONE D'ESSERE.

### Esercizio Calcolate

$$(3, 1) +_{\mathbb{C}} (-1, 5) = (2, 5)$$

$$(3, 1) \cdot_{\mathbb{C}} (-1, 5) = (-8, 14)$$

$$(0, 1) \cdot_{\mathbb{C}} (0, 1) = (-1, 0)$$

$$(3, 4) \cdot_{\mathbb{C}} \left(\frac{3}{25}, -\frac{4}{25}\right) = (1, 0)$$



TEOREMA  $\mathbb{C}$  CON SOMMA, PRODOTTO,  $0_{\mathbb{C}}$ ,  $1_{\mathbb{C}}$  DEFINITI SOPRA È UN CAMPO, OVVERO SODDISFA LE PROPRIETÀ  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ .

dim LA DIMOSTRAZIONE DI QUESTO TEOREMA È UNA LUNGA VERIFICA DELLE PROPRIETÀ  $P_1 \dots P_6$ . NE VERIFICHIAMO SOLO ALCUNE

$P_3$   $\forall (a, b) \in \mathbb{C}$

$$0_{\mathbb{C}} +_{\mathbb{C}} (a, b) = (0, 0) +_{\mathbb{C}} (a, b) = (0+a, 0+b) = (a, b)$$

$$1_{\mathbb{C}} \cdot_{\mathbb{C}} (a, b) = (1, 0) \cdot_{\mathbb{C}} (a, b) = (1 \cdot a - 0 \cdot b, 1 \cdot b + 0 \cdot a) = (a, b)$$

$P_4$   $\forall (a, b) \in \mathbb{C}$

$$(x, y) +_{\mathbb{C}} (a, b) = 0_{\mathbb{C}} \quad x \quad a \quad y \quad b \quad x$$

$$x = -a \quad y = -b \quad \text{quindi} \quad \exists (x, y): (x, y) + (a, b) = 0_{\mathbb{C}}$$

$P_5$   $\forall (a, b) \in \mathbb{C} \quad e \quad (a, b) \neq (0, 0)$

esiste il reciproco infatti  $a^2 + b^2 > 0$  e

$$\left( \frac{a}{a^2 + b^2}; -\frac{b}{a^2 + b^2} \right) \cdot (a, b) = \left( \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2}; \frac{ab - ab}{a^2 + b^2} \right) = (1, 0) = 1_{\mathbb{C}}$$

unicità del reciproco. Se  $z \in \mathbb{C}$  e  $z \neq 0$  e

$u, v \in \mathbb{C}$  e  $uz = vz = 1_{\mathbb{C}}$  voglio mostrare  $u = v$ .

Infatti:

$$u = u \cdot 1_{\mathbb{C}} = u \cdot (z \cdot v) = (u \cdot z) \cdot v = 1_{\mathbb{C}} \cdot v = v$$

$P_6$   $\forall (a, b), (c, d), (e, f) \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} (a, b) \cdot_{\mathbb{C}} ((c, d) + (e, f)) &= (a, b) \cdot_{\mathbb{C}} (c+e, d+f) = \\ &= (a \cdot (c+e) - b(d+f), a(d+f) + b(c+e)) \\ &= (a \cdot c - b d + a e - b f, a d + b c + a f + b e) \end{aligned}$$

$$= (a \cdot c - b \cdot d, ad + bc) +_{\mathbb{C}} (ae - bf, af + be)$$

$$= (a, b) \dot{+}_{\mathbb{C}} (c, d) +_{\mathbb{C}} (a, b) \dot{+}_{\mathbb{C}} (e, f)$$

La scriveremo la verifica di P1 e P2 per esercizio.

#

### NUMERI REALI, NUMERI COMPLESSI E $i$

I NUMERI COMPLESSI SONO QUINDI UN CAMPO. VOGLIAMO ORA MOSTRARE QUALE SIA LA RELAZIONE TRA  $\mathbb{R}$  E  $\mathbb{C}$ . SE  $a \in \mathbb{R}$  DEFINIAMO  $\underline{a} = (a, 0)$

OSSERVIAMO CHE  $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$

$$1) \underline{0} = 0_{\mathbb{C}} \quad \underline{1} = 1_{\mathbb{C}}$$

$$2) \underline{a+b} = \underline{a} +_{\mathbb{C}} \underline{b}$$

$$3) \underline{a \cdot b} = \underline{a} \cdot_{\mathbb{C}} \underline{b}$$

$$4) \underline{a} \cdot (b, c) = (ab, ac)$$

LE RELAZIONI 1) 2) 3) CI DICONO IN PARTICOLARE CHE SE IDENTIFICHIAMO  $\mathbb{R}$  CON IL SOTTOINSIEME DI  $\mathbb{C}$  FATTO DELLE COPPIE  $(a, 0)$  ALLORA LA NUOVA SOMMA  $+_{\mathbb{C}}$  E IL NUOVO PRODOTTO  $\cdot_{\mathbb{C}}$  COINCIDONO CON LA SOMMA E IL PRODOTTO USUALE SU  $\mathbb{R}$ .

PER QUESTO MOTIVO DA ORA IN POI

1) IDENTIFICHEREMO UN ELEMENTO  $a \in \mathbb{R}$  CON LA COPPIA  $(a, 0)$ . PENSEREMO QUINDI  $\mathbb{R}$  COME SOTTOINSIEME DI  $\mathbb{C}$ .

2) UTILizzeremo i vecchi simboli  $+$ ,  $\cdot$ ,  $0$ ,  $1$  ANCHE PER INDICARE  $+_{\mathbb{C}}$ ,  $\cdot_{\mathbb{C}}$ ,  $0_{\mathbb{C}}$ ,  $1_{\mathbb{C}}$

Esempio CON LE IDENTIFICAZIONI APPENA INTRODOTTE ABBIAMO

$$(5, 3) = (5, 0) + (0, 3) = 5 + 3 \cdot (0, 1)$$

E PIÙ IN GENERALE

$$(a, b) = a + b \cdot (0, 1)$$

DEFINIZIONE  $i = (0, 1)$

OSSERVAZIONE  $i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$

OSSERVIAMO INOLTRE CHE  $\forall a, b \in \mathbb{R}$

$$(a, b) = a + b \cdot (0, 1) = a + b \cdot i$$

DA ORA IN POI SCRIVEREMO I NUMERI COMPLESSI  
QUASI SEMPRE NELLA FORMA  $a + bi$ , INVECE CHE  
NELLA FORMA  $(a, b)$

UTILIZZANDO QUESTA NOTAZIONE SIA LA FORMULA  
DELLA SOMMA CHE DEL PRODOTTO DIVENTANO  
NATURALI

$$(3 + 5i) + (4 + 2i) = 7 + 5i + 2i = 7 + 7i$$

$$\begin{aligned}(3 + 5i) \cdot (4 + 2i) &= 3 \cdot 4 + 3 \cdot 2 \cdot i + 5 \cdot i \cdot 4 + 5i \cdot 2i = \\ &= 12 + 10i^2 + 6i + 20i \\ &= 12 - 10 + 26i \\ &= 2 + 26i\end{aligned}$$

DOVE NEI PASSAGGI CHE HO FATTO HO UTILIZZATO  
LE PROPRIETÀ P1...P6 E CHE  $i^2 = -1$ .

ANCHE IL CALCOLO DEL RECIPROCO DIVENTA MOLTO  
SIMILE ALLA RAZIONALIZZAZIONE DELLE FRAZIONI.  
FACCIAMO UN ESEMPIO:

SUPPONIAMO DI VOLER CALCOLARE  $\frac{1}{1+2i}$

MOLTIPLICHIAMO SOPRA E SOTTO PER  $1-2i$

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+2i} &= \frac{1}{1+2i} \cdot \frac{1-2i}{1-2i} = \frac{1-2i}{1^2 - (2i)^2} = \\ &= \frac{1-2i}{1+4} = \frac{1-2i}{5} = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i.\end{aligned}$$

## ESERCIZI

1) DIMOSTRARE CHE PER  $\mathbb{C}$  VALGONO LE PROPRIETÀ P1 e P2

2) CALCOLARE

$$\frac{1+2i}{1-2i} \quad ; \quad \frac{1+4i}{6+7i}$$

## PARTE REALE, PARTE IMMAGINARIA, CONIUGATO

INTRODUCIAMO UN PÒ DI NOTAZIONE CHE SARÀ UTILE IN SEGUITO. SE  $z = a + bi$  CON  $a, b \in \mathbb{R}$  DEFINIAMO

$$\text{PARTE REALE DI } z = \operatorname{Re}(z) = a$$

$$\text{PARTE IMMAGINARIA DI } z = \operatorname{Im}(z) = b$$

$$\text{CONIUGATO DI } z = \bar{z} = a - bi$$

PER ESEMPIO SE  $z = 3 + 4i$

$$\operatorname{Re}(z) = 3$$

$$\operatorname{Im}(z) = 4 \quad (\text{E NON } 4i!!)$$

$$\bar{z} = 3 - 4i$$

IL CONIUGATO HA ALCUNE BUONE PROPRIETÀ CHE ELENCIAMO NELLA SEGUENTE PROPOSIZIONE E CHE SARANNO UTILI IN SEGUITO.

### PROPOSIZIONE

$\forall z, w \in \mathbb{C}$  VALE 0)  $\overline{\bar{z}} = z$

$$1) \overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$$

$$2) \overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$$

$$3) z \in \mathbb{R} \text{ SE E SOLO SE } z = \bar{z}$$

dim

Sia  $z = a + bi$  e  $w = c + di$  con  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$   
verifichiamo la 1) e la 3).

$$\begin{aligned}
 1) \quad \overline{z+w} &= \overline{a+bi + c+di} = \\
 &= \overline{a+c + (b+d)i} = \\
 &= a+c - (b+d)i = \\
 &= a-bi + c-di = \\
 &= \overline{z} + \overline{w}
 \end{aligned}$$

3) Se  $z = a+bi$  allora  $z \in \mathbb{R}$  se e solo se  $b=0$ .

Osserviamo inoltre che  $z = \overline{z}$  se e solo se

$$\begin{aligned}
 a+bi &= a-bi \quad \text{ovvero} \quad bi = -bi \\
 \text{ovvero} \quad 2bi &= 0 \quad \text{ovvero} \quad b=0.
 \end{aligned}$$

Quindi entrambe le condizioni  $z \in \mathbb{R}$  e  $z = \overline{z}$  sono equivalenti a  $b=0$ .

#

### IL TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA

Ricordiamo il nostro obiettivo iniziale, costruire un campo nel quale ogni equazione polinomiale abbia soluzione. Abbiamo infatti il seguente teorema che si chiama Teorema Fondamentale dell'Algebra

#### TEOREMA (Gauß)

Se  $f(z) = A_n z^n + A_{n-1} z^{n-1} + \dots + A_0$ , con  $A_n \neq 0$  e  $n \geq 1$  è un polinomio a coefficienti complessi, cioè  $A_n, \dots, A_0 \in \mathbb{C}$  allora esiste  $\alpha \in \mathbb{C}$  e  $f(\alpha) = 0$

Di questo teorema dimostreremo solo alcuni casi molto particolari

#### EQUAZIONI DI PRIMO GRADO

$$Az + B = 0 \quad \text{con } A \neq 0$$

Si possono risolvere esattamente come nel caso di  $\mathbb{R}$ . Racciamo un esempio.

$$(3+i)z + (-2+i) = 0$$

SONNO  $2-i$  E DIVO PER  $3+i$  E OTTENGO

$$z = \frac{2-i}{3+i} = \frac{(2-i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} = \frac{5-5i}{10} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

### EQUAZIONI DI SECONDO GRADO

$$A z^2 + B z + C = 0 \quad \text{CON } A \neq 0$$

INIZIAMO DA ALCUNI ESEMPLI.

1).  $z^2 = 13$

2).  $z^2 = -9$

3).  $z^2 + 6z + 25 = 0$

L'EQUAZIONE 1) LA SAPPIAMO RISOLVERE ANCHE USANDO I NUMERI REALI E OTTENIAMO  $z = \pm \sqrt{13}$

L'EQUAZIONE 2) NON HA SOLUZIONI REALI MA HA SOLUZIONI COMPLESSE. INFATTI SE  $z = \pm 3i$  OTTENIAMO  $z^2 = 9i^2 = -9$ .

SIMILMENTE OGNI EQUAZIONE DELLA FORMA  $z^2 = a$  CON  $a \in \mathbb{R}$  HA SOLUZIONI COMPLESSE

PER L'EQUAZIONE 3) PROCEDIAMO COME AL SOLITO CALCOLIAMO IL  $\Delta$

$$\Delta = 36 - 4 \cdot 25 = -64$$

NEL CASO REALE  $\Delta$  NON SAREBBE UN QUADRATO, NEL CASO COMPLESSO INVECE

$$(\pm 8i)^2 = -64 = \Delta$$

E CONCLUDIAMO USANDO LA FORMULA USUALE

$$z_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-6 \pm 8i}{2} = \begin{cases} -3+4i \\ -3-4i \end{cases}$$

VEDIAMO ADESSO DEGLI ESEMPI IN CUI ANCHE I COEFFICIENTI SONO COMPLESSI.

$$4) \quad z^2 = -5 + 12i$$

$$5) \quad 3z^2 + 2iz + \frac{1}{12} - i = 0$$

RISOLVIAMO L'EQUAZIONE 4). SIA  $z = x + iy$  CON  $x, y \in \mathbb{R}$ . ABBIAMO QUINDI

$$z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$

QUINDI OTTENIAMO IL SISTEMA

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -5 \\ 2xy = 12 \end{cases} \quad \text{DA CUI} \quad \begin{cases} y = \frac{6}{x} \\ x^2 - \left(\frac{6}{x}\right)^2 = -5 \end{cases}$$

SVILUPPANDO LA SECONDA EQUAZIONE OTTENIAMO

$$x^4 + 5x^2 - 36 = 0$$

$$\text{DA CUI} \quad x^2 = \frac{-5 \pm 13}{2} \quad \begin{matrix} 4 \\ < -9 \end{matrix}$$

ESSENDO  $x \in \mathbb{R}$  ABBIAMO  $x^2 > 0$  E QUINDI  $x^2 = 4$

$$\text{QUINDI} \quad x = +2 \quad \text{E} \quad y = \frac{6}{x} = 3 \quad \text{E} \quad z = 2 + 3i$$

$$\text{O} \quad x = -2 \quad \text{E} \quad y = \frac{6}{x} = -3 \quad \text{E} \quad z = -2 - 3i$$

PROCEDENDO ALLO STESSO MODO SI RISOLVE  $z^2 = w$  PER OGNI  $w \in \mathbb{C}$ .

OSSERVAZIONE. SE  $q \in \mathbb{R}$   $q \geq 0$   $\sqrt{q}$  INDICA L'UNICO NUMERO REALE  $b \geq 0$  TALE CHE  $b^2 = q$ .

SE  $w$  È UN NUMERO COMPLESSO NON C'È UNA RADICE PRIVILEGIATA E INDICHEREMO CON  $\sqrt{w}$  UNA QUALSIASI RADICE O ANCHE L'INSIEME DELLE RADICI.

RISOLVIAMO ORA L'EQUAZIONE 5). PER UNA QUALSIASI EQUAZIONE DELLA FORMA

$$A z^2 + B z + C = 0 \quad \text{CON } A \neq 0$$

POSSIAMO APPLICARE LA FORMULA USUALE

$$z_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

IN FATTI ANCHE LA VALIDITÀ DI QUESTA FORMULA DIPENDE SOLO DALLE PROPRIETÀ DI CAMPO. LA DIFFERENZA CON IL CASO REALE È CHE UNA RADICE QUADRATA ESISTE SEMPRE.

NEL CASO IN QUESTIONE ABBIAMO

$$\begin{aligned} \Delta &= B^2 - 4AC = -4 - 4 \cdot 3 \cdot \left(\frac{1}{12} - i\right) \\ &= -4 - 1 + 12i = -5 + 12i \end{aligned}$$

LE RADICI DI  $\Delta$  LE ABBIAMO APPENA CALCOLATE RISOLVENDO L'EQUAZIONE 4) E SONO  $\pm (2 + 3i)$ , QUINDI

$$z = \frac{-2i \pm (2 + 3i)}{2 \cdot 3} = \begin{cases} \frac{2 + i}{6} \\ \frac{-2 - 5i}{6} \end{cases}$$