DESCRIZIONE DI SPAZI E SOTTOSPAZI

In questa sezione vogliamo presentare qualche esercizio sulla descrizione dei sottospazi di uno spazio vettoriale e in particolare di K^n.
Esistono essenzialmente due modi per descrivere un sottospazio, che sono del tutto paralleli ai modi per descrivere un insieme:

- parametrizzare un sottospazio che è un particolare modo di descrivere un insieme come liste
- dare le equazioni di un sottospazio che è un particolare modo di descrivere un insieme fornendo una proprietà che ne caratterizza gli elementi.

Due esempi che può essere utile avere in mente del primo e del secondo modo sono i seguenti: Sia $V = \mathbb{R}^3$ e sia $u = (1, 2, 3)$.

la retta $U = \mathbb{R}u = \{ tu : t \in \mathbb{R} \} = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 2t \\ 3t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$ è un sottospazio parametrizzato

il piano $W = \{ v \in \mathbb{R}^3 : v \cdot u = 0 \} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + 3z = 0 \right\}$ è un sottospazio descritto tramite una equazione.

Daremo le definizioni precise di cosa sia una parametrizzazione e di cosa voglia dire definire un sottospazio tramite equazioni e spiegheremo come passare da una descrizione all'altra. Introduciamo anche un minimo di terminologia per gli spazi e i sottospazi vettoriali.

ALCUNE DEFINIZIONI

DEFINIZIONE (retta, piano, iperpiano)

Se V è un K-spazio vettoriale di $\dim = 1$ V si dice una retta.
Se V è un K-spazio vettoriale di $\dim = 2$ V si dice un piano.
Queste due definizioni si applicano in particolare ai sottospazi di uno spazio dato.
Inoltre se W è un sottospazio dello spazio vettoriale di dim finita V si dice che W è un iperpiano se $\dim W = \dim V - 1$

Diamo ora le definizioni generali di parametrizzazione e di descrizione di un sottospazio mediante equazioni o forma cartesiana di un sottospazio.

DEFINIZIONE (parametrizzazione e forma cartesiana)

Sia V uno spazio vettoriale e sia W un sottospazio di V.

- Una parametrizzazione di V è una $F : K^a \longrightarrow V$ lineare e iniettiva tale che
$$\operatorname{Im} F = W$$
ovvero
$$W = \left\{ F \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_a \end{pmatrix} : x_1, \dots x_a \in K \right\}$$

- Una descrizione cartesiana di W è una $F: V \longrightarrow K^b$ lineare tale che
$$N(F) = W$$
ovvero se

$$F(v) = \begin{pmatrix} F_1(v) \\ \vdots \\ F_b(v) \end{pmatrix} \quad \text{allora} \quad W = \{v \in V : F(v) = 0\} = \{v \in V : F_1(v) = \dots = F_b(v) = 0\}$$

OSSERVAZIONE (ogni sottospazio ha una parametrizzazione)

Se $F: K^a \longrightarrow V$ è una parametrizzazione di W allora $w_1 = F(e_1); \dots; w_a = F(e_a)$ sono una base di W per quanto osservato nella sezione sulla dim.

Viceversa se $w_1; \dots; w_a$ è una base e pongo $F: K^a \longrightarrow W$ definita da

$$F\begin{pmatrix} x_1 \\ x_a \end{pmatrix} = x_1 w_1 + \dots + x_a w_a$$

allora F è una parametrizzazione.

In particolare ogni sottospazio di dim a ha una parametrizzazione $F: K^a \longrightarrow V$.

Esempio - esercizio

Trovare una parametrizzazione del piano di $\mathbb{R}^3$ $x + 2y + 3z = 0$: Abbiamo già visto che se individuiamo come variabili libere y, z allora possiamo dedurre che

$$v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e } v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ è una base di } W$$

Quindi $F: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ $\quad F\begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} = t v_1 + s v_2 = \begin{pmatrix} -2t - 3s \\ t \\ s \end{pmatrix}$ è una parametrizzazione di W.

OSSERVAZIONE

Nella definizione di parametrizzazione e forma cartesiana c'è una asimmetria. Per la parametrizzazione chiediamo non solo che $\mathrm{Im}\, F = W$ ma anche che F sia iniettiva. La richiesta simmetrica per le forme cartesiane è la seguente:

Una forma cartesiana minimale di W è una $G: V \longrightarrow K^b$ tale che
$$N(G) = W \quad \text{e} \quad G \text{ è surgettiva.}$$

Esempio

Sia $V = \mathbb{R}^2$ e sia W la retta $x + y = 0$. Allora

$$G: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \qquad G\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x + y$$

$$G_1: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad G_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ x + y \end{pmatrix}$$

sono due forme cartesiane, la prima minimale la seconda no.

La definizione di forma cartesiana minimale non è molto usata ma sarà comoda in questa discussione.

OSSERVAZIONE (Ogni sottospazio ha una forma cartesiana minimale)

Sia $W \subset V$ sia $\dim W = a$ e $\dim V = a+b$.
Sia $w_1 \dots w_a$ una base di W e $w_1 \dots w_a\ w_{a+1} \dots w_{a+b}$ una base di V.
Sia $G : V \longrightarrow K^b$ definita da

$$G(v) = \begin{pmatrix} x_{a+1} \\ \vdots \\ x_{a+b} \end{pmatrix} \quad \text{se} \quad v = x_1 v_1 + \dots + x_{a+b} v_{a+b}$$

Allora $N(G) = \{ v = x_1 v_1 + \dots + x_a v_a \} = \langle v_1 \ \ v_a \rangle = W$

e $G(v_{a+1}) = e_1 \ \dots \ G(v_{a+b}) = e_b$ quindi $\operatorname{Im} G = K^b$ cioè G è surgettiva.

Esempio - Esercizio

Sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato da $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ $v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

1) Descrivere W in forma cartesiana.
2) Descrivere una parametrizzazione di W.

Svolgimento

1) W è l'insieme di tutti i vettori di $\mathbb{R}^4$ della forma $x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3$ con $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$. Più esplicitamente

$$W = \{ v \in \mathbb{R}^4 : \exists\, x_1, x_2, x_3 \ \text{e} \ v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 \}$$

Se A è la matrice le cui colonne sono v_1, v_2, v_3 abbiamo che

$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3$, quindi

$$W = \{ v \in \mathbb{R}^4 : \exists\, x_1\ x_2\ x_3 : v = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \}$$
$$= \{ v \in \mathbb{R}^4 : \text{il sistema } A\underline{x} = v \text{ ha soluzioni} \} = \operatorname{Im} L_A$$

Se poniamo $v = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$ e $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ siamo quindi interessati a capire quando il sistema $A\underline{x} = v$ ha soluzioni.
La matrice completa di questo sistema è:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & y_1 \\ 1 & 2 & 0 & y_2 \\ 1 & 3 & 1 & y_3 \\ 0 & 4 & 4 & y_4 \end{array}\right)$$

Riducendo A a scalini ottengo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & y_1 \\ 0 & 1 & 1 & y_2 - y_1 \\ 0 & 2 & 2 & y_3 - y_1 \\ 0 & 4 & 4 & y_4 \end{array}\right) \quad \text{e poi} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & y_1 \\ 0 & 1 & 1 & y_2 - y_1 \\ 0 & 0 & 0 & y_3 - y_2 + y_1 \\ 0 & 0 & 0 & y_4 - 4y_2 + 4y_1 \end{array}\right)$$

quindi il sistema ha soluzione esattamente quando

$$y_1 - y_2 + y_3 = 0 \quad \text{e} \quad 4y_1 - 4y_2 + y_4 = 0.$$

Quindi queste equazioni forniscono una descrizione cartesiana di W. In altre parole se

$$G : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad G\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 - y_2 + y_3 \\ 4y_1 - 4y_2 + y_4 \end{pmatrix}$$

Osserviamo inoltre che $W = \operatorname{Im} L_A$ e che rango $A = 2$ quindi $\dim W = 2$. La descrizione trovata G è quindi minimale.

2) Come abbiamo già osservato nel punto 1 abbiamo

$$W = \operatorname{Im} L_A \quad \text{con} \quad L_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4.$$

Abbiamo osservato che rango $A = 2$, quindi L_A non è iniettiva, quindi questa non è una parametrizzazione. La non iniettività della applicazione L_A è equivalente al fatto che v_1, v_2, v_3 sono lin. dip.

Abbiamo già visto nella seconda sezione sulla dimensione come estrarre da v_1, v_2, v_3 una base. I conti necessari li abbiamo già fatti prima: si riduce A a scalini e si prendono i vettori v_i con ai pivot. Quindi v_1 v_2 è una base di W. Quindi l'applicazione

$$F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4 \qquad F\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = s v_1 + t v_2 = \begin{pmatrix} s+t \\ s+2t \\ s+3t \\ 4t \end{pmatrix}$$

è una parametrizzazione di W.

#

Ricapitoliamo vari modi che abbiamo visto di descrivere un sottospazio e i legami tra di loro.

1 • Dare una parametrizzazione è come dare una base di W: l'osservazione "ogni sottospazio ha una parametrizzazione" sopra

2 • Se W è descritto come sottospazio generato da $v_1 \dots v_k$ abbiamo visto come estrarre una base da dei generatori nella sezione dimensione 2ª parte, la parte nella descrizione di $\operatorname{Im} L_A$

3 • Se W è descritto come sottospazio generato da $v_1, \dots, v_k$ abbiamo visto come calcolare le equazioni nell'esercizio sopra e la descrizione che si ottiene è minimale

4 • I punti 1 e 3 in particolare ci mostrano come passare da una parametrizzazione alla forma cartesiana

5 • Se W è descritto come nucleo di una applicazione lineare abbiamo visto come calcolare una base, e quindi una parametrizzazione di W

6 • I punti 1 e 5 in particolare mostrano come passare da una descrizione cartesiana ad una parametrica.