LEZIONE 20 DICEMBRE

$V \qquad W_1 \dots W_k \qquad U$ e W SOTTOSPAZI

CAPIRE QUALCHE INFORMAZIONE SU COME SONO FATTE LE INT. ESEMPIO 2 PIANI PERÒ ✓ IN $\mathbb{R}^3$ SI INT IN UNA RETTA.

TEOREMA (FORMULA DI GRASSMANN) $(\dim V < +\infty)$

V SPAZIO VETTORIALE $\quad U$ e W SOTTOSPAZI DI V

$$\underbrace{\dim(U \cap W)}_{a} + \underbrace{\dim(U+W)}_{a+b+c} = \underbrace{\dim U}_{a+b} + \underbrace{\dim W}_{a+c}$$

dim

Sia $v_1 \dots v_a$ una base di $U \cap W$ $\qquad \dim U \cap W = a$

Sia $v_1 \dots v_a \; u_1 \dots u_b$ una base di U $\qquad \dim U = a+b$

Sia $v_1 \dots v_a \; w_1 \dots w_c$ una base di W $\qquad \dim W = a+c$

DIMOSTRO CHE $v_1 \dots v_a \; u_1 \dots u_b \; w_1 \dots w_c$ È QUESTA UNA BASE DI $U+W$. QUESTO IMPLICA CHE $\dim(U+W) = a+b+c$ E QUINDI IMPLICA LA FORMULA DI GRASSMANN.

1° $v_1 \dots \dots w_c$ generano $U+W \ni z$

z SI SCRIVE COME $u+w$ $\quad u \in U \quad w \in W$.

$$u = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_a v_a + \mu_1 u_1 + \dots + \mu_b u_b$$

$$w = \lambda_1' v_1 + \dots + \lambda_a' v_a + \nu_1 w_1 + \dots + \nu_c w_c$$

$$u+w = (\lambda_1 + \lambda_1')v_1 + \dots + (\lambda_a + \lambda_a')v_a + \mu_1 u_1 + \dots + \mu_b u_b + \nu_1 w_1 + \dots + \nu_c w_c$$

2° $v_1 \dots w_c$ SONO LIN INDIP.

$$\boxed{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_a v_a + \mu_1 u_1 + \dots + \mu_b u_b + \nu_1 w_1 + \dots + \nu_c w_c = 0}$$

$$x = \underbrace{\lambda_1 v_1 + \dots + \mu_b u_b}_{x \in U} = \boxed{\underbrace{-\nu_1 w_1 \dots - \nu_c w_c}_{x \in W}}$$

$x \in U \cap W$

QUINDI $\quad -\nu_1 w_1 - \dots - \nu_c w_c = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_e v_e \quad$ PERCHÉ v_i base di $U \cap W$.

$$\boxed{\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_e v_e + \nu_1 w_1 + \dots + \nu_c w_c = 0}$$

$v_1 \dots v_e, w_1 \dots w_c$ SONO UNA BASE DI W.

QUINDI $\quad \underline{\alpha_1 = \dots = \alpha_e = \nu_1 = \dots = \nu_c = 0}$

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_e v_e + \mu_1 u_1 + \dots + \mu_b u_b + \overline{0} = 0$$

$v_1 \dots v_e \; u_1 \dots u_b$ SONO UNA BASE DI U

QUINDI $\quad \lambda_1 = \dots = \lambda_e = \mu_1 = \dots = \mu_b = 0$

#

ESEMPIO

$V = \mathbb{R}^3 \quad \underline{U \text{ e } W}$ PIANI PER L'ORIGINE

$U \neq W$ ALLORA $U \cap W$ È UNA RETTA.

$\dim U = \dim W = 2$

$$\underline{\dim (U \cap W)} + \underline{\dim (U + W)} = 2 + 2 = 4$$

$$\boxed{U \subsetneq U + W \subseteq \mathbb{R}^3}$$

$U \neq U + W \quad$ perché contiene W e quindi elementi di W che non stanno in U

$U + W \subset \mathbb{R}^3 \quad$ IMPLICA $\quad \dim U + W \leq 3$

$U \subsetneq U + W \quad$ " $\quad \underline{2 <} \dim U + W$

QUINDI $\quad \dim (U + W) = 3.$

LA FORMULA DI GRASSMANN DIVENTA

$\dim U \cap W + 3 = 4 \qquad \dim U \cap W = 1$

#

ESEMPIO (ESERCIZIO)

$\dim V = 4 \quad \dim U = 2 \quad \dim W = 3$

VOGLIAMO CAPIRE AL VARIARE DI U E W QUALI

SONO I POSSIBILI VALORI DI $\dim(U \cap W)$

PARTIAMO DALLA FORMULA DI GRASSMANN

$$\dim(U \cap W) + \underline{\dim(U+W)} = 5 = 2 + 3$$

INOLTRE $W \subset U+W \subset V$

$$3 \leq \dim U+W \leq 4$$

DALLA FORMULA DI GRASSMANN RICAVIAMO

$W \not\supset U$ Se $\dim(U+W) = 4$ $\dim U \cap W = 1$

$W \supset U$ * Se $\dim(U+W) = 3$ $\dim \underline{U \cap W} = 2$. $\underline{U \cap W} \subset U$ $U \cap W = U$

PER CONCLUDERE L'ESERCIZIO ~~POSS~~ FACCIAMO VEDERE CHE ENTRAMBE QUESTE SITUAZIONI SI POSSONO VERIFICARE.

CIOÉ FACCIAMO UN ESEMPIO

- $U = \mathrm{Span}(e_1\ e_2) \subset W = \mathrm{Span}(e_1\ e_2\ e_3)$ $U \cap W = U$

$$\dim U \cap W = 2$$

- $U = \mathrm{Span}(\underline{\underline{e_1}}\ e_2)$ $W = \mathrm{Span}(e_2\ e_3\ e_4) \not\ni e_1$

$U \not\subset W$ QUINDI $\underset{\not\ni e_1}{U \cap W} \subsetneq U$]

qui $\dim U \cap W < 2 = \dim U$

QUINDI " " $= 1$.

#

LO STUDIO DELL'INTERSEZIONE DI MOLTI SOTTOSP. :

<u>PROPOSIZIONE</u> $W_1, \dots, W_k$ SOTTOSPAZI DI V

$$\dim(W_1 + \dots + W_k) \leq \dim W_1 + \dots + \dim W_k \qquad *$$

<u>dim</u> p.i. su k

$k = 1$ $\dim W_1 \leq \dim W_1$

- $k = 2$ $\dim(W_1 + W_2) \leq \underline{\dim W_1 + \dim W_2}$

GRASS. $\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$ π

$k-1 \Rightarrow k$

$$\dim(W_1 + \dots + W_k) \overset{\text{GRASS}}{=} \dim\big(\underbrace{(W_1 + \dots + W_{k-1})}_{U} + \underbrace{W_k}_{W}\big) \leq \dim U + \dim W$$

$$= \dim(W_1 + \dots + W_{k-1}) + \dim W_k$$

$$\leq \dim W_1 + \dots + \dim W_{k-1} + \dim W_k$$

#

SOTTOSPAZI IN SOMMA DIRETTA

$\boxed{\dim V < +\infty}$

PER 2 SOTTOSPAZI : U e W SOTTOSPAZI DI V

U e W SI DICONO IN SOMMA DIRETTA SE

$U \cap W = \{0\}$

OSS. U e W SONO IN SOMMA DIRETTA SE E SOLO SE $\dim(U+W) = \dim U + \dim W$

È LA FORMULA DI GRASS $- \dim U \cap W$

#

$\boxed{\text{OSS}}$

Se U e W sono in somma diretta $\boxed{U \cap W = 0}$

e $u_1 \dots u_b$ è una base di U.

$w_1 \dots w_c$ " " base di W.

ALLORA $u_1 \dots u_b \; w_1 \dots w_c$ è una base di $U+W$.

È ESATTAMENTE COME ABBIAMO COSTRUITO UNA BASE DI $U+W$ QUANDO ABBIAMO DIMOSTRATO LA FORMULA DI GRASSMANN.

PIÙ SOTTOSPAZI

$W_1 \dots W_k$ SOTTOSPAZI DI V

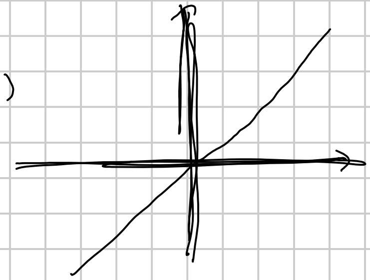
DICIAMO CHE $W_1 \dots W_k$ SONO IN SOMMA DIRETTA SE PER OGNI $i = 1 \dots k$

- $W_i \cap (W_1 + \dots + \check{W_i} + \dots + W_k) = \{0\}$

OSS $V = \mathbb{R}^2$

$W_1 = \mathbb{R}e_1$ $\quad W_2 = \mathbb{R}e_2$ $\quad W_3 = \mathbb{R}(e_1+e_2)$

$W_i \cap W_j = 0$ per $i \neq j$



MA NON SONO IN SOMMA DIRETTA.

$W_1 + W_2 = \mathbb{R}^2$

$W_3 \cap (W_1+W_2) = W_3$ NON SONO IN SOMMA DIRETTA.

PROPOSIZIONE $W_1 \dots W_k$ SOTTOSPAZI DI V

SONO EQUIVALENTI LE SEGUENTI AFFERMAZIONI

1) $W_1 \dots W_k$ SONO IN SOMMA DIRETTA

2) $W_i \cap (W_1 + \dots + W_{i-1}) = \{0\}$

3) $\boxed{\dim(W_1 + \dots + W_k) = \dim W_1 + \dots + \dim W_k}$

Dim 1) implica 2) $\quad$ 2) implica 3) $\quad$ 3) implica 1)

1) IMPLICA 2)

1: $W_i \cap (W_1 + \dots + \check{W_i} + \dots + W_k) = \{0\}$

$\cup$

2: $W_i \cap (W_1 + \dots + W_{i-1}) = \{0\}$

per ogni i $\quad$ ⊛ $W_i \cap A = 0$

$\cup$

$W_i \cap B = 0$

2) IMPLICA 3)

DIMOSTRIAMO CHE $\dim(W_1 + \dots + W_i) = \dim W_1 + \dots + \dim W_i$

per ogni i.

PER INDUZIONE $i = 1$ $\quad \dim W_1 = \dim W_1$

$\boxed{i-1 \Rightarrow i}$

$$\dim(\underbrace{W_1 + \dots}_{U} + \underbrace{W_i}_{W}) = \dim U + \dim W - \underbrace{\dim U \cap W}_{=0}$$

$$W_i \cap (W_1 + \dots + W_{i-1}) = \{0\}$$

$$= \dim(W_1 + \dots + W_{i-1}) + \dim W_i \overset{\text{INDUZIONE}}{=} \dim W_1 + \dots + \dim W_i$$

3) IMPLICA 1)

VOGLIAMO DIMOSTRARE CHE $W_i \cap \overbrace{(W_1 + \cdots + \check{W}_i + \cdots + W_h)}^{A} = 0$

SAPPIAMO $\dim \underline{(W_1 + \cdots + W_h)} = \dim W_1 + \cdots + \dim W_h$

$$\dim (A + W_i) = \dim A + \dim W_i - \overline{\dim (W_i \cap A)}$$

$$A = W_1 + \cdots + \check{W}_i + \cdots + W_h$$

$$\dim A \le \underline{\dim W_1 + \cdots + \dim \check{W}_i + \cdots + \dim W_h}$$

$$\underline{\dim W_1 + \cdots + \dim W_h} = \dim (V_1 + \cdots + W_h) \le \underline{\dim W_1 + \cdots + \dim W_h} - \dim (W_i \cap A)$$

QUINDI $\dim (W_i \cap A) = 0$

OVVERO $W_i \cap A = 0$ OVVERO

$$W_i \cap (W_1 + \cdots + \check{W}_i + \cdots + W_h) = 0$$

#

ESERCIZIO

$V = \mathbb{R}^4$ $\quad W_1 = \mathbb{R} e_1 \quad W_2 = \mathbb{R} e_2$

$W_3 = \mathrm{Span}(e_1 + e_2 + t e_3, e_4)$ $\quad t$ è un param.

Per quali t W_1 W_2 W_3 sono in somma diretta.

- USA LA CONDIZIONE 2 DELLA PROPOSIZIONE

$W_i \cap (W_1 + \cdots + W_{i-1}) = 0$ PER OGNI $i = 2 \ldots h = 3$

$$\boxed{\begin{array}{l} W_2 \cap W_1 = 0 \\ W_3 \cap (W_1 + W_2) = 0 \end{array}}$$

- $\mathbb{R}e_2 \cap \mathbb{R}e_1 = 0$ ✓

$$\boxed{W_3 \cap \mathrm{Span}(e_1 ; e_2) = 0}$$

$$\boxed{\underbrace{\mathrm{Span}(e_1 + e_2 + t e_3 ; e_4)}_{W_3} \cap \underbrace{\mathrm{Span}(e_1 ; e_2)}_{A} = 0}$$

A ~~è~~ ~~vettori~~ $= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ È DESCRITTO DALLE EQ. $\boxed{x_3 = 0 \quad x_4 = 0}$

Sia $v = \underline{a\ (e_1 + e_2 + te_3)} + b e_4 \in W_3$

VOGLIO VEDERE SE $v \in A$ OVVERO SE VERIFICA LE EQ. $x_3 = 0$ e $x_4 = 0$.

$$v = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ ta \\ b \end{pmatrix}$$

le equaz. $x_3 = 0$ e $x_4 = 0$

DIVENTANO $b = 0$ e $\boxed{ta = 0}$

SE $t \neq 0$ QUESTO IMPLICA $b = 0$ e $a = 0$ $(\Rightarrow v = 0)$

qui $W_3 \cap A = 0$

E I SOTTOSPAZI SONO IN SOMMA DIRETTA

SE $t = 0$ RIMANE SOLO L'EQUAZIONE $\boxed{b = 0}$

$v = a\,(e_1 + e_2 + te_3) + 0\, e_4$ È in $W_3 \cap A$ PER OGNI a

$= a\,(e_1 + e_2) \in W_3 \cap A$

QUINDI I SOTTOSPAZI NON SONO IN SOMMA DIRETTA.

Se $W_1 \dots W_k$ SONO IN SOMMA DIRETTA È "FACILE" COSTRUIRE UNA BASE DI $W_1 + \dots + W_k$.

RICORDO PER $k = 2$ U e W IN SOMMA DIRETTA

e $u_1 \dots u_b$ base di U

$w_1 \dots w_c$ " di W

allora $u_1 \dots u_b\ w_1\ w_c$ base di $U + W$.

PROPOSIZIONE $W_1 \dots W_k$ SOTTOSP. IN SOMMA DIRETTA

$\underline{w}^{(1)}$ $w_1^{(1)}$ $w_{m_1}^{(1)}$ come base di W_1

$\underline{w}^{(2)}$ " " W_2

$\underline{w}^{(k)}$ " " W_k

Allora $\underline{w}^{(1)} \dots \underline{w}^{(k)}$ è una base di $W_1 + \dots + W_k$

<u>dim</u> p.i. su k

$k=1$ ovvio

$k=2$ lo abbiamo ricordato

$\boxed{k-1 \Rightarrow k}$ $\quad \underbrace{\overbrace{W_1 + \dots + W_{k-1}}}_{U} + \underbrace{\overbrace{W_k}}_{W}$ $\quad \underline{U} \cap \underline{W} = 0$

U per ip. induttiva ha come base $\left(\underline{w}^{(1)} \dots \underline{w}^{(k-1)}\right)$

W_k ha come base $\underline{w}^{(k)}$

QUINDI $\underline{w}^{(1)} \dots \underline{w}^{(k-1)} \underline{w}^{(k)}$ è una base di $U + W =$

$= W_1 + \dots + W_k$ #

PROPOSIZIONE

$W_1 \dots W_k$ k sottospazi di V

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Supponiamo che se } w_1 \in W_1 \dots w_k \in W_k \text{ e } w_1 + \dots + w_k = 0 \\ \text{allora } w_1 = \dots = w_k = 0\end{array}}$$

Allora $W_1 \dots W_k$ sono in somma diretta.

<u>dim.</u> Devo verificare $W_i \cap (W_1 + \dots + \check{W}_i + \dots + W_k) = 0$

$\rotatebox{90}{$\in$}$
x

$\underline{x = w_i \in W_i}$ $\quad x = \underline{w_1 + \dots + \check{w}_i + \dots + w_k}$

$w_j \in W_j$

$$w_i = w_1 + \dots + w_{i-1} + w_{i+1} + \dots + w_k$$

$$0 = \underset{W_1}{\underset{\Uparrow}{w_1}} + \dots + \underset{W_{i-1}}{\underset{\Uparrow}{w_{i-1}}} + \underbrace{(-w_i)}_{W_i} + w_{i+1} + \dots + \underset{W_k}{\underset{\Uparrow}{w_k}}$$

DALL'IPOTESI RICAVO $w_j = 0$ PER OGNI j E QUINDI $x = 0$ #

TEOREMA $\dim V < +\infty$ $F: V \to V$ V sp. vett. su K

F è diagonalizzabile se e solo se

1) Tutte le radici del p_F sono in K.

2) $\forall \lambda$ autovalore $m.g._\lambda = m.a._\lambda$

dim

$\boxed{\Rightarrow}$ GIÀ DIMOSTRATA

$\boxed{\Leftarrow}$ $p_F(t) = \overbrace{(t-\lambda_1)^{e_1} \cdot \ldots \cdot (t-\lambda_k)^{e_k}}$ $\lambda_1 \ldots \lambda_k \in K$ distinti

$e_1 + \ldots + e_k = \dim V = n$ = grado pol. caratt.

Consideriamo $W_i = N(F - \lambda_i I)$

$\dim W_i = mg_{\lambda_i} = ma_{\lambda_i} = e_i$

$\dim W_1 + \ldots + \dim W_k = n$

I sottospazi W_i sono in somma diretta.

Dimostro che se $w_1 + \cdots + w_k = 0$ con $w_i \in W_i$

allora ~~sono~~ $w_i = 0$ per ogni i.

p.a. Sia $\overbrace{w_1 + \cdots}^{h} \overbrace{+ w_k}= 0$ con $w_i \in W_i$

ma non $w_i = 0$ per ogni i.

suppongo $\boxed{w_1 \cdots w_h \neq 0}$ e $w_{h+1} \cdots w_k = 0$.

$\boxed{w_1 + \cdots + w_h = 0.}$ $w_i \in W_i = N(F - \lambda_i I)$

$(F - \lambda_i I)(w_i) = 0$ $F(w_i) = \lambda_i w_i$

w_i è un autovettore di autovalore λ_i

$\neq 0$

QUINDI $w_1 \ldots w_h$ SONO LIN. INDIPENDENTI

(AUTOVETTORI RELATIVI AD AUTOVALORI DISTINTI)

MA ALLORA $1 \cdot w_1 + \dots + 1 \cdot w_k = 0$ È UN ASSURDO #

$$\dim \underbrace{(W_1 + \dots + W_k)}_{\subseteq V} = \dim W_1 + \dots + \dim W_k = \dim V.$$

QUINDI $W_1 + \dots + W_k = V$ E $W_1, \dots, W_k$ SONO IN SOMMA DIRETTA.

SIA $\underline{w}^{(1)}$ UNA BASE DI W_1

$\underline{w}^{(2)}$ " " W_2

...

$\underline{w}^{(k)}$ .... W_k

E $\underline{w}^{(1)} \dots \underline{w}^{(k)}$ È UNA BASE DI V.

INFINE OSSERVO CHE SONO TUTTI AUTOVETTORI DI F.

SIA $w_j^{(i)}$ un elemento della base di $W_i = N(F - \lambda_i I)$

$$w_j^{(i)} \in N(F - \lambda_i I)$$

$$F(w_j^{(i)}) = \lambda_i w_j^{(i)}$$

e quindi è un autovettore #

QUINDI F È DIAGONALIZZABILE

#

DEFINIZIONE

$F : V \to V$ λ un autovalore di F

$N(F - \lambda I)$ SI CHIAMA L'AUTOSPAZIO DI AUTOVALORE λ

SPESSO SI INDICA CON $V_\lambda(F)$

OSS Nella dimostrazione del teorema

Abbiamo che autospazi relativi ad autovalori distinti sono in somma diretta.