Compito di geometria e algebra lineare del 6 giugno 2022

Istruzioni: Avete 2 ore e 30' di tempo. Non è sufficiente dare la risposta giusta, dovete fornire delle giiustificazioni. Durante lo svolgimento non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari né altri oggetti elettronici, pena l'annullamento del compito. Buon lavoro!

Esercizio 1. Siano $v_1, v_2, v_3 \in V$ tre vettori linearmente dipendenti in uno spazio vettoriale V. Per ciascuna delle seguenti affermazioni, determina se è vera o falsa fornendo una motivazione: se l'affermazione è vera scrivi una dimostrazione, se è falsa fornisci un controesempio (in cui scegli V, v_1, v_2, v_3 esplicitamente).

(1) Due dei tre vettori v_1, v_2, v_3 sono multipli fra loro.
(2) Almeno uno dei tre vettori è combinazione lineare degli altri due.
(3) Ciascuno dei tre vettori è combinazione lineare degli altri due.

Esercizio 2. Considera il sottospazio di $\mathbb{R}^3$:

$$U = \{x + y + z = 0\}.$$

Costruisci una matrice A di taglia 3×3 tale che l'endomorfismo $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, L_A(x) = Ax$ abbia queste proprietà:

- $\ker L_A = U^\perp$
- $\mathrm{Im} L_A = U$
- L_A non è diagonalizzabile

Esercizio 3. Considera la conica seguente, dipendente da un parametro $t \in \mathbb{R}$

$$C = \left\{x^2 + y^2 + 2txy + 2x - 1 = 0\right\}.$$

(1) Classifica il tipo di conica nei casi in cui non è degenere.
(2) Per quali t la conica è una circonferenza?
(3) Sia P il punto

$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Per i valori di t per cui $P \in C$, calcola la tangente di C in P.

Esercizio 4. Considera nello spazio le rette

$$r = \{x = y = 1\}, \qquad s = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ t \end{pmatrix} \middle| \ t \in \mathbb{R} \right\}.$$

(1) Calcola la distanza fra r e s.
(2) Determina una isometria $f(x) = Ax + b$ tale che $f(r) = s$. Descrivi prima a parole l'isometria e poi determina A e b.

Soluzioni

Esercizio 1.

(1) Falso. Prendiamo $V = \mathbb{R}^2$ e $v_1 = e_1$, $v_2 = e_2$, $v_3 = e_1 + e_2$.
(2) Vero. Se sono dipendenti, esistono $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ non tutti nulli per cui

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0.$$

Supponiamo che $\lambda_1 \neq 0$. Dividendo tutto per λ_1 otteniamo che v_1 si scrive come combinazione lineare degli altri due.
(3) Falso. Prendiamo $V = \mathbb{R}^2$ e $v_1 = e_1, v_2 = e_1, v_3 = e_2$.

Esercizio 2. Prendiamo come base

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

e notiamo che $U^\perp = \mathrm{Span}(v_1)$ e $U = \mathrm{Span}(v_2, v_3)$. Espresso in questa base $\mathcal{B}$, l'endomorfismo T con

$$[T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

rispetta tutti e tre i criteri. La matrice A richiesta si trova quindi cambiando base:

$$A = [T]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}} = [\mathrm{id}]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}[T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}[\mathrm{id}]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$$

Facendo i conti troviamo

$$A = \begin{pmatrix}1&1&0\\1&-1&1\\1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\2&-1&-1\\1&1&-2\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}3&0&-3\\-2&1&1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$$

Esercizio 3. La matrice completa è

$$\bar{A} = \begin{pmatrix}1&t&1\\t&1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}.$$

(1) Troviamo $\det \bar{A} = t^2-2$, quindi la conica è non degenere per $t \neq \pm\sqrt{2}$. Esaminando $\det A = 1-t^2$ troviamo che la conica è un'iperbole per $t < -1$ oppure $t > 1$, una parabola per $t = \pm 1$ e un'ellisse per $-1 < t < 1$.

(2) Gli autovalori di A sono $1 \pm t$, e coincidono solo per $t = 0$: quindi (per il teorema spettrale) la conica è una circonferenza solo per $t = 0$.

(3) La conica passa per P per $t = -3/2$. Calcolando la retta polare ${}^{t}\bar{P}\bar{A}\bar{X} = 0$ troviamo che la tangente in P è $y = x$.

Esercizio 4.

(1) Facendo un disegno si trova che le rette sono sghembe e hanno come perpendicolare comune la retta

$$\ell = \left\{\begin{pmatrix}t\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

che interseca r e s nei valori $t = 1$ e $t = 0$. Quindi le rette sono a distanza 1.

(2) Una possibile isometria è una rototraslazione lungo ℓ di passo 1. Per determinare A e b cambio coordinate con $x' = x, y' = y+1, z' = z+1$. In queste nuove coordinate la retta ℓ diventa l'asse x', quindi la rototraslazione cercata è la composizione di una rotazione oraria di angolo $\pi/4$ lungo x' e di una opportuna traslazione:

$$f\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&\sqrt{2}/2&\sqrt{2}/2\\0&-\sqrt{2}/2&\sqrt{2}/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Riportiamo nelle coordinate originali; il nuovo vettore b sarà

$$b = -\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\sqrt{2}/2&\sqrt{2}/2\\0&-\sqrt{2}/2&\sqrt{2}/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1-\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}$$

Quindi la f cercata ha questa forma

$$f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&\sqrt{2}/2&\sqrt{2}/2\\0&-\sqrt{2}/2&\sqrt{2}/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\1-\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}.$$

Esistono anche altre soluzioni possibili.