Compitino di Geometria e algebra lineare dell'11 febbraio: prima parte

Istruzioni: Avete 35 minuti di tempo a disposizione. Come prima cosa scrivete nome, cognome e matricola su questo foglio. Prima di consegnare il foglio trascrivetevi su un foglietto le risposte. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari, pena l'annullamento del compito. Dovete scrivere la risposta senza nessuna spiegazione negli appositi spazi. Per essere ammessi alla seconda parte bisogna rispondere correttamente ad almeno 4 domande.

Domanda 1. Sia $z = 2 + i$ e $w = 1 + i$. Determinare la parte immaginaria di z/w.

Risposta: $\mathrm{Im}(z/w) =$

Domanda 2. Sia A e B le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Si calcoli $\det(A \cdot B)$.

Risposta: $\det(A \cdot B) =$

Domanda 3. Sia r la retta di $\mathbb{R}^3$ passante per l'origine e per il punto $(1, 1, 2)$. Sia Q la proiezione ortogonale del punto $(1, 1, -4)$ su r. Si determini Q

Risposta: $Q =$

Domanda 4. Si consideri l'applicazione lineare $L_A : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ dove A è la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Si scriva la matrice associata ad L_A rispetto alla base $v_1 = -e_1 - 2e_2 + 3e_3$, $v_2 = e_1 + e_2$ e $v_3 = e_2 + e_3$ in partenza e standard in arrivo.

Risposta: $[L_A]_{e_1,e_2}^{v_1,v_2,v_3} =$

Domanda 5. Sia $U = \mathrm{Mat}_{2\times 4}(\mathbb{C})$ e siano $F, G : U \longrightarrow U$ applicazioni lineare. Sia $\dim Im(F) = 3$ e $\dim N(G) = 4$. Sapendo che $Im(G) + N(F) = U$ calcolare $\dim \big(Im(G) \cap N(F)\big)$.

Risposta: $\dim \big(Im(G) \cap N(F)\big) =$

Compitino di Geometria e algebra lineare dell'11 febbraio: prima parte

Istruzioni: Avete 35 minuti di tempo a disposizione. Come prima cosa scrivete nome, cognome e matricola su questo foglio. Prima di consegnare il foglio trascrivetevi su un foglietto le risposte. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari, pena l'annullamento del compito. Dovete scrivere la risposta senza nessuna spiegazione negli appositi spazi. Per essere ammessi alla seconda parte bisogna rispondere correttamente ad almeno 4 domande.

Domanda 1. Sia $z = -2 + i$ e $w = 1 + i$. Determinare la parte immaginaria di z/w.

Risposta: $\mathrm{Im}(z/w) =$

Domanda 2. Sia A e B le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si calcoli $\det(A \cdot B)$.

Risposta: $\det(A \cdot B) =$

Domanda 3. Sia r la retta di $\mathbb{R}^3$ passante per l'origine e per il punto $(2, 1, 1)$. Sia Q la proiezione ortogonale del punto $(1, 1, 3)$ su r. Si determini Q

Risposta: $Q =$

Domanda 4. Si consideri l'applicazione lineare $L_A : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ dove A è la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Si scriva la matrice associata ad L_A rispetto alla base $v_1 = 2e_1 + e_2 - e_3$, $v_2 = e_1 + 2e_2 - 3e_3$ e $v_3 = e_1 + e_3$ in partenza e standard in arrivo.

Risposta: $[L_A]_{e_1,e_2}^{v_1,v_2,v_3} =$

Domanda 5. Sia $U = \mathrm{Mat}_{2\times 4}(\mathbb{C})$ e siano $F, G : U \longrightarrow U$ applicazioni lineare. Sia $\dim Im(F) = 3$ e $\dim N(G) = 3$. Sapendo che $Im(G) + N(F) = U$ calcolare $\dim \big(Im(G) \cap N(F)\big)$.

Risposta: $\dim \big(Im(G) \cap N(F)\big) =$

Compitino di Geometria e algebra lineare dell'11 febbraio: prima parte

Istruzioni: Avete 35 minuti di tempo a disposizione. Come prima cosa scrivete nome, cognome e matricola su questo foglio. Prima di consegnare il foglio trascrivetevi su un foglietto le risposte. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari, pena l'annullamento del compito. Dovete scrivere la risposta senza nessuna spiegazione negli appositi spazi. Per essere ammessi alla seconda parte bisogna rispondere correttamente ad almeno 4 domande.

Domanda 1. Sia $z = 2 - i$ e $w = 1 - i$. Determinare la parte immaginaria di z/w.

Risposta: $\mathrm{Im}(z/w) =$

Domanda 2. Sia A e B le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Si calcoli $\det(A \cdot B)$.

Risposta: $\det(A \cdot B) =$

Domanda 3. Sia r la retta di $\mathbb{R}^3$ passante per l'origine e per il punto $(1, 2, 1)$. Sia Q la proiezione ortogonale del punto $(6, 1, 4)$ su r. Si determini Q

Risposta: $Q =$

Domanda 4. Si consideri l'applicazione lineare $L_A : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ dove A è la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Si scriva la matrice associata ad L_A rispetto alla base $v_1 = -e_1 + e_3$, $v_2 = -e_2 + 2e_3$, e $v_3 = -e_1 - 2e_2 + 3e_3$ in partenza e standard in arrivo.

Risposta: $[L_A]_{e_1,e_2}^{v_1,v_2,v_3} =$

Domanda 5. Sia $U = \mathrm{Mat}_{2\times 4}(\mathbb{C})$ e siano $F, G : U \longrightarrow U$ applicazioni lineare. Sia $\dim Im(F) = 3$ e $\dim N(G) = 2$. Sapendo che $Im(G) + N(F) = U$ calcolare $\dim\big(Im(G) \cap N(F)\big)$.

Risposta: $\dim\big(Im(G) \cap N(F)\big) =$

Compitino di Geometria e algebra lineare del 18 febbraio 2023: seconda parte

Istruzioni: Avete 2 ore e 30 minuti di tempo a disposizione. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari, pena l'annullamento del compito. Scrivere chiaramente e motivare le risposte. Non saranno corretti esercizi scritti in modo illeggibile.

Esercizio 1. Siano $F, G : V \longrightarrow V$ due applicazioni lineari

a) È vero che se $F \circ G = 0$ allora $F = 0$ o $G = 0$? Se è vero dimostrarlo, se non è vero fare un controesempio.
b) Dimostrare che se $F \circ G$ è iniettiva allora G è iniettiva.
c) Supponiamo che $F \circ G = G \circ F$ e sia $W = N(G)$. Dimostrare che $F(W) \subset W$.

Esercizio 2. Sia $V = \mathbb{C}[t]_{\leqslant 3}$ e $W = \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C})$. Sia U il sottospazio di V definito da

$$U = \left\{ f \in \mathbb{C}[t]_{\leqslant 3} \, : \, f(1) = f(0) \right\}$$

e sia S il sottospazio di W delle matrici simmetriche, cioè delle matrici A tali che $A^t = A$. Sia $F : U \longrightarrow W$ definita da

$$F(f) = \begin{pmatrix} f(0) & f(1) \\ f(2) & f(3) \end{pmatrix}.$$

a) Determinare una base di U e scrivere la matrice associata a F rispetto a questa base in partenza e alla base standard in arrivo.
b) Determinare una base di $S \cap \mathrm{Im}\, F$.

Esercizio 3. Sia M la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Si dica se M è diagonalizzabile.
b) Trovare una base v_1, v_2 di $\mathbb{R}^2$ tale che

$$[L_M]_{v_1,v_2}^{v_1,v_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) Si dimostri che

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

d) Calcolare M^{100}.

1. Soluzioni prima parte, versione $z = 2 + i$ e $w = 1 + i$

Domanda 1. $\mathrm{Im}(z/w) = -1/2$

Domanda 2. $\det(A \cdot B) = 8$

Domanda 3. $Q = (-1, -1, -2)$

Domanda 4. $[L_A]_{e_1,e_2}^{v_1,v_2,v_3} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

Domanda 5. $\dim \big(Im(G) \cap N(F)\big) = 1$.

2. Soluzioni prima parte, versione $z = -2 + i$ e $w = 1 + i$

Domanda 1. $\mathrm{Im}(z/w) = 3/2$

Domanda 2. $\det(A \cdot B) = -12$

Domanda 3. $Q = (2, 1, 1)$

Domanda 4. $[L_A]_{e_1,e_2}^{v_1,v_2,v_3} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Domanda 5. $\dim \big(Im(G) \cap N(F)\big) = 2$.

3. Soluzioni prima parte, versione $z = 2 - i$ e $w = 1 - i$

Domanda 1. $\mathrm{Im}(z/w) = 1/2$

Domanda 2. $\det(A \cdot B) = -15$

Domanda 3. $Q = (2, 4, 2)$

Domanda 4. $[L_A]_{e_1,e_2}^{v_1,v_2,v_3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Domanda 5. $\dim \big(Im(G) \cap N(F) \big) = 3$.

Soluzioni del compitino del 18 febbraio: seconda parte

Soluzione esercizio 1. a) Non è vero. Come esempio possiamo prendere $F = G = L_A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ con

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Supponiamo che $G(u) = G(v)$ e dimostriamo che $u = v$. Se $G(u) = G(v)$ allora $F(G(u)) = F(G(v))$. Ma essendo $F \circ G$ iniettiva questo implica che $u = v$.

c) Sia $w \in N(G)$ voglio dimostrare che $F(w) \in N(G)$. Infatti $G(F(w)) = F(G(w))$ perché $F \circ G = G \circ F$, e poiché $w \in N(G)$ abbiamo $G(w) = 0$. Quindi $G(F(w)) = F(G(w)) = 0$, ovvero $F(w) \in N(G)$.

Soluzione esercizio 2. a) Un polinomio $f(t) = a + bt + ct^2 + dt^3$ appartiene a U se e solo se $f(0) = f(1)$, ovvero

$$a = a + b + c + d$$

o equivalentemente $b + c + d = 0$. Quindi U ha dimensione 3 e una sua base è data dai polinomi

$$f_1 = 1 = t^0 \qquad f_2 = t^2 - t \qquad f_3 = t^3 - t.$$

Applicando F troviamo

$$A = F(f_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = F(f_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \qquad C = F(f_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 6 & 24 \end{pmatrix}$$

da cui deduciamo

$$[F]_{E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}}^{f_1,f_2,f_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 6 \\ 1 & 6 & 24 \end{pmatrix}$$

b) $\operatorname{Im} F$ è generato dalle matrici A, B, C e quindi $\operatorname{Im} F$ è fatta di tutte le matrici della forma

$$aA + bB + cC = A = F(f_1) = \begin{pmatrix} a & a \\ a + 2b + 6c & a + 6b + 24c \end{pmatrix}$$

e questa matrice è simmetrica se e solo se $a = a + 2b + 6c$ ovvero se e solo se $b + 3c = 0$. Quindi dei generatori dell'intersezione li possiamo ottenere prendendo $a = 1$ e $b = c = 0$ o $a = 0$, $b = -3$, $c = 1$. Quindi le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad e \qquad -3B + C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

generano l'intersezione. Essendo linearmente indipendenti sono una base dell'intersezione.

Soluzione esercizio 3. a) Il polinomio caratteristico di M è $(\lambda - 1)^2$, quindi M ha come unico autovalore $\lambda = 1$ con molteplicità algebrica 2. Calcoliamo la molteplicità geometrica dell'autovalore 1, ovvero la dimensione del nucleo di

$$M - I = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

che non è una matrice nulla e quindi la molteplicità geometrica di 1 è uguale a 1. Pertanto M non è diagonalizzabile.

b) Osserviamo che il vettore v_1 verifica $M \cdot v_1 = v_1$ ed è quindi nel nucleo della matrice $M - I$. Abbiamo già calcolato questa matrice e il suo nucleo è definito dall'unica equazione $x = 2y$. Quindi possiamo scegliere $v_1 = 2e_1 + e_2$. Il vettore v_2 verifica $M \cdot v_2 = v_2 + v_1$ ovvero $(M - I) \cdot v_2 = v_1$. Se $v_2 = xe_1 + ye_2$ otteniamo il sistema

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

che si traduce nelle due equazioni equivalenti $2x - 4y = 2$ e $x - 2y = 1$. Possiamo quindi scegliere $y = 1$ e $x = 3$. Quindi se poniamo

$$v_1 = 2e_1 + e_2 \qquad v_2 = 3e_1 + e_2$$

otteniamo la base desiderata.

c) Procediamo per induzione su n. Se $n = 1$ è ovvio. Supponiamo la tesi sia vera per l'intero n e dimostriamola per $n + 1$. Abbiamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{n} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

dove nella seconda uguaglianza abbiamo applicato l'ipotesi induttiva.

d) Ricordiamo che

$$M = [L_M]_{e_1,e_2}^{e_1,e_2} = [Id]_{e_1,e_2}^{v_1,v_2} \cdot [L_M]_{v_1,v_2}^{v_1,v_2} \cdot [Id]_{v_1,v_2}^{e_1,e_2} = A \cdot N \cdot A^{-1}$$

dove

$$A = [Id]_{e_1,e_2}^{v_1,v_2} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e di conseguenza

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$M^{100} = \left(ANA^{-1}\right)^{100} = AN^{100}A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 100 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 201 & -400 \\ 100 & -199 \end{pmatrix}$$