Compito di geometria e algebra lineare dell'11 settembre 2023

Istruzioni: Avete 2 ore e 30' di tempo. Non è sufficiente dare la risposta giusta, dovete fornire delle giustificazioni. Durante lo svolgimento non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari né altri oggetti elettronici, pena l'annullamento del compito. Buon lavoro!

Esercizio 1. Siano v_1, v_2, v_3 vettori non nulli di $\mathbb{R}^3$. Per ciascuna delle seguenti affermazioni, se è vera scrivi una dimostrazione, se è falsa fornisci un controesempio.

(1) Se v_1, v_2 sono indipendenti, v_2, v_3 sono indipendenti e v_3, v_1 sono indipendenti, allora v_1, v_2, v_3 sono indipendenti.
(2) Se esiste un $w \in \mathbb{R}^3$ non nullo ortogonale a tutti e tre v_1, v_2, v_3, allora i 3 vettori v_1, v_2, v_3 sono dipendenti.
(3) I vettori v_1, v_2, v_3 sono indipendenti se e solo se esiste un endomorfismo $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f(v_1) = v_1, f(v_2) = 2v_2, f(v_3) = 3v_3$.

Esercizio 2. Considera i due sottospazi seguenti di $\mathbb{R}^4$:

$$U = \text{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\3\\1\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\4\\0\\3\end{pmatrix}\right), \qquad W = \{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}.$$

(1) Determina le dimensioni di $U \cap W$ e $U + W$.
(2) Determina un sottospazio $Z \subset W$ tale che $(U \cap W) \oplus Z = W$.

Esercizio 3. Sia $V = \mathbb{R}[x]_k$ lo spazio vettoriale formato da tutti i polinomi reali di grado $\leqslant k$. Considera l'endomorfismo $T\colon V \to V$ dato da

$$T(p) = (x^2 + 1)p''(x)$$

dove $p''(x)$ è la derivata seconda di $p(x)$.

(1) Scrivi la matrice associata a T rispetto alla base canonica $1, x, \ldots, x^k$.
(2) Determina gli autovalori di T.
(3) L'endomorfismo T è diagonalizzabile?

Esercizio 4. Considera la retta r passante per i punti

$$P = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix}1\\7\\6\end{pmatrix}$$

ed il piano $\pi = \{z = 1\}$. Costruisci una isometria $f(x) = Ax + b$ tale che $f(r)$ non intersechi il piano π.

Soluzioni

Esercizio 1.

(1) No, ad esempio $v_1 = e_1, v_2 = e_2, v_3 = e_1 + e_2$.
(2) Sì, perché v_1, v_2, v_3 sono contenuti nel piano $U = \text{Span}(w)^\perp$ e quindi non possono essere indipendenti.
(3) Sì. Se sono indipendenti, possiamo costruire un endomorfismo tale che $f(v_i) = w_i$ per qualsiasi scelta di w_1, w_2, w_3. D'altra parte, se esiste un endomorfismo tale che $f(v_i) = iv_i$, allora v_1, v_2, v_3 sono autovettori con autovalori distinti e quindi sono indipendenti.

Esercizio 2. Si nota intanto che $\dim U = 2$ perché il terzo vettore che genera U è la differenza dei primi due, e $\dim W = 3$.

(1) Si scrive il vettore generico di U e lo si sostituisce all'equazione che definisce W. In questo modo si vede che l'intersezione $U \cap W$ è la retta generata dal vettore $v = (-5, 6, -2, 1)$. Per Grassmann $\dim(U + W) = 3$.
(2) Per trovare Z basta aggiungere a v altri due vettori di W in modo che siano tutti indipendenti, ad esempio $v_2 = (1, -1, 0, 0)$ e $v_3 = (0, 0, 1, -1)$. Si verifica che v, v_2, v_3 sono indipendenti e quindi si prende $Z = \text{Span}(v_2, v_3)$.

Esercizio 3.

(1) Si verifica che $T(x^n) = (x^2+1)n(n-1)x^{n-2}$. Quindi $T(1) = 0, T(x) = 0$ e $T(x^n) = n(n-1)x^n + n(n-1)x^{n-2}$ per ogni $n \geqslant 2$. Quindi la matrice associata è

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & k(k-1) \end{pmatrix}$$

(2) La matrice associata è triangolare superiore, quindi gli autovalori sono i valori sulla diagonale: $0, 0, 2, 6, \ldots, k(k-1)$.

(3) Sì. Tutti gli autovalori sono in $\mathbb{R}$, e l'unico autovalore con molteplicità maggiore di uno è lo zero, che ha molteplicità algebrica 2: ha anche molteplicità geometrica 2 perché le prime due colonne sono nulle.

Esercizio 4. La retta r in forma parametrica è

$$r = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Ci sono molti modi di risolvere l'esercizio. Ad esempio si può prendere una rotazione (oraria o antioraria) di $\pi/2$ intorno all'asse y per spostare la giacitura di r dentro la giacitura di π, e poi eventualmente traslare in modo che la retta sia disgiunta da π. La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rappresenta una rotazione (oraria) di $\pi/2$ intorno all'asse y. La rotazione $f(x) = Ax$ sposta la retta r nella retta

$$f(r) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Questa è contenuta nel piano π. Aggiungeremo quindi una traslazione di vettore

$$b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

L'isometria $f(x) = Ax + b$ è quella cercata.