Compito di geometria e algebra lineare del 17 luglio 2023

Istruzioni: Avete 2 ore e 30' di tempo. Non è sufficiente dare la risposta giusta, dovete fornire delle giustificazioni. Durante lo svolgimento non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari né altri oggetti elettronici, pena l'annullamento del compito. Buon lavoro!

Esercizio 1.

(1) Sia $f\colon V \to W$ un'applicazione lineare fra spazi vettoriali. Mostra che f è iniettiva se e solo se $\ker f = \{0\}$.
(2) Siano $f\colon V \to W$ e $g\colon W \to Z$ due applicazioni lineari iniettive fra spazi vettoriali. È vero che $g \circ f$ è necessariamente iniettiva? Se l'affermazione è vera scrivi una dimostrazione, se è falsa fornisci un controesempio.
(3) Siano $f\colon V \to W$ e $g\colon W \to Z$ due applicazioni lineari. È vero che se $g \circ f$ è surgettiva allora lo sono anche f e g? Se l'affermazione è vera scrivi una dimostrazione, se è falsa fornisci un controesempio.

Esercizio 2. Considera il sottospazi di $\mathbb{R}^4$ seguenti:

$$U = \{x_1 + x_2 = x_3 - x_4 = 0\},$$

$$V = \mathrm{Span}(e_1),$$

$$W = \mathrm{Span}(e_2).$$

(1) Calcola la dimensione di $U + V + W$.
(2) Gli spazi U, V e W sono in somma diretta? Motiva la risposta.

Esercizio 3. Considera la conica di equazione

$$x^2 + 2txy + y^2 + 2x + 2ty - 1 = 0.$$

(1) Classifica il tipo di conica al variare di $t \in \mathbb{R}$.
(2) Determina il centro della conica per i valori in cui questa è non degenere e ha un centro.
(3) Determina i valori t per cui la conica è una circonferenza.

Esercizio 4. Consideriamo le rette

$$r = \{z = 1, y = 0\},$$

$$s = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

(1) Scrivi una isometria $f(x) = Ax + b$ senza punti fissi tale che $f(r) = s$.
(2) Scrivi una isometria $f(x) = Ax + b$ con punti fissi tale che $f(r) = s$.

Per entrambe le domande spiega a parole come costruisci l'isometria prima di calcolare A e b.

Soluzioni

Esercizio 1.

(1) Fatto a lezione.
(2) Vero. Se v e w sono vettori distinti di V, allora $f(v)$ e $f(w)$ sono vettori distinti di W perché f è iniettiva, e quindi $g(f(v))$ e $g(f(w))$ sono vettori distinti di Z perché g è iniettiva.

Esercizio 2.

(1) Una base di U è formata dai vettori $e_1 - e_2$ e $e_3 + e_4$. Se aggiungiamo a questi i vettori e_1 e e_2 troviamo 4 vettori non indipendenti, di cui i primi 3 sono indipendenti. Quindi $\dim(U+V+W) = 3$.
(2) Non sono in somma diretta perché $U \cap (V + W)$ non è banale: infatti consiste nella retta $\mathrm{Span}(e_1 - e_2)$.

Esercizio 3. La matrice completa associata alla conica è

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & t & 1 \\ t & 1 & t \\ 1 & t & -1 \end{pmatrix}.$$

(1) La matrice ha determinante $2t^2 - 2$. Quindi la conica è degenere solo per $t = \pm 1$. Per $t = 1$ l'equazione della conica diventa $(x+y)^2 + 2(x+y) - 1 = 0$ e quindi la conica è l'unione di due rette parallele $x + y = -1 \pm \sqrt{2}$. Per $t = -1$ otteniamo analogamente due rette parallele $x - y = -1 \pm \sqrt{2}$. Per $t \neq \pm 1$ la conica è non degenere. La matrice $\bar{A}$ è indefinita perché ha sulla diagonale sia elementi positivi che negativi. Quindi la conica è non vuota e calcolando $\det A = 1 - t^2$ si scopre che è un'ellisse per $-1 < t < 1$ e una iperbole per $t < -1$ o $t > 1$.

(2) Risolvendo $AP + b = 0$ si ottiene $P = (-1, 0)$ per ogni $t \neq \pm 1$.

(3) Gli autovalori di A sono $\lambda = 1 \pm t$ e coincidono solo per $t = 0$. Quindi si ottiene una circonferenza solo per $t = 0$.

Esercizio 4. Si verifica che le due rette sono sghembe, parallele agli assi x e y, e con perpendicolare comune l'asse z.

(1) Ad esempio si può fare una rototraslazione di asse z, angolo $\pi/2$ e passo 2:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(2) Ad esempio si può fare una rotazione di asse $\mathrm{Span}(e_1 + e_2)$ di angolo π:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$