Compitino di geometria e algebra lineare del 1 giugno 2023

Istruzioni: Avete 2 ore di tempo. Non è sufficiente dare la risposta giusta, dovete fornire delle giustificazioni. Durante lo svolgimento non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari né altri oggetti elettronici, pena l'annullamento del compito. Buon lavoro!

Esercizio 1. [12 punti] Considera la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sia $M(2)$ lo spazio vettoriale formato dalle matrici reali 2×2. Considera l'endomorfismo $T\colon M(2) \to M(2)$ dato da

$$T(X) = AX - XA.$$

(1) Determina il nucleo di T.
(2) L'endomorfismo T è diagonalizzabile?

Esercizio 2. [12 punti] Considera la conica dipendente da un parametro reale $t \in \mathbb{R}$

$$C = \{tx^2 + 2xy + (t+2)y^2 - 2y = 0\}.$$

(1) Determina il tipo di conica al variare di $t \in \mathbb{R}$.
(2) Determina il centro della conica per quei valori di t in cui la conica ha un centro.

Esercizio 3. [12 punti] Considera i piani affini

$$\pi = \{z = 1\}, \qquad \pi' = \{x = y\}.$$

Costruisci una isometria affine $f(x) = Ax + b$ tale che $f(\pi) = \pi'$. Descrivi prima f geometricamente a parole e poi calcola A e b.

Soluzioni

Esercizio 1. Facendo i conti si scopre che

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d-a \\ 0 & -c \end{pmatrix}.$$

Quindi il nucleo di T è il sottospazio formato dalle matrici con $c = 0$ e $d = a$, cioè del tipo

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

Per studiare la diagonalizzabilità si può scrivere la matrice associata a T rispetto alla base canonica, che viene

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico è λ^4, ed ha una sola radice $\lambda = 0$ con molteplicità algebrica 4. Abbiamo però già visto che il nucleo ha dimensione 2, quindi la radice $\lambda = 0$ ha molteplicità geometrica 2. Le due molteplicità non coincidono e quindi T non è diagonalizzabile.

In alternativa, si può evitare di scrivere la matrice associata e verificare direttamente che

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

ha soluzioni solo per $\lambda = 0$ e quindi solo i vettori del nucleo sono autovettori, e non sono sufficienti a fornire una base per $M(2)$.

Esercizio 2. La matrice completa è

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} t & 1 & 0 \\ 1 & t+2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si ottiene $\det \bar{A} = -t$, quindi la conica è non degenere per $t \neq 0$. La segnatura di $\bar{A}$ è sempre indefinita perché c'è uno zero sulla diagonale e quindi c'è sempre un vettore isotropo. Quindi la conica non è mai vuota. Calcoliamo

$$\det A = t^2 + 2t - 1$$

e studiando il segno di $\det A$ si ottiene che la conica è una iperbole per $-1-\sqrt{2} < t < -1+\sqrt{2}, t \neq 0$, una parabola per $t = -1 \pm \sqrt{2}$ e una ellissi per $t < -1-\sqrt{2}$ oppure $t > -1+\sqrt{2}$. Infine per $t = 0$ l'equazione diventa $2xy + 2y^2 - 2y = 2y(x+y-1) = 0$ e quindi la conica è formata da due rette incidenti di equazione $y = 0$ e $x + y - 1 = 0$.

Il centro si trova risolvendo l'equazione $AP + b = 0$ e si ottiene

$$P = \frac{1}{1-t^2-2t}\begin{pmatrix} 1 \\ -t \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3. I due piani si intersecano lungo la retta

$$r = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Una isometria che manda π in π' è una rotazione antioraria di $\pi/2$ intorno ad r (funziona anche oraria). Cambiamo coordinate

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = z + 1$$

in modo che la nuova origine sia in r. Devo ora determinare la matrice A di rotazione intorno a r, che nelle nuove coordinate è una retta vettoriale. Prendiamo come base ortonormale positiva

$$v_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Rispetto a questa base la matrice di rotazione cercata è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Rispetto alla base canonica, la matrice A risulta quindi

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Adesso torniamo nelle coordinate originarie: la matrice A rimane la stessa, e per trovare b usiamo la formula

$$b = -AP + P = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Quindi l'isometria seguente funziona:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ci sono anche altre soluzioni possibili.