

**Indicazioni per lo studio e per gli esercizi per casa.** Questo file di esercizi sarà aggiornato durante l'anno. In particolare in questa sezione comparirà a fine settimana una indicazione di quello che è stato fatto durante la settimana e la lista degli esercizi che si consiglia di svolgere per la successiva.

*sabato 1 ottobre.* Questa settimana abbiamo richiamato alcune proprietà degli insiemi e abbiamo dato la definizione di campo. Il materiale fatto questa settimana lo trovate nella prima nota del corso, la parte relativa ai richiami sugli insiemi e nella prima nota sui numeri complessi.

Per casa potete fare gli esercizi 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7, 1.8, 1.9 e gli esercizi 4.1 e 4.2, 4.3. Sono tanti e alcuni sono lunghi, quindi se non avete del tempo di farli tutti suggerisco di fare l'1.2 o l'1.3, l'1.4, l'1.6, l'1.7 o l'1.8 e i punti a e b del 4.2. Per esperienza, alcuni troveranno l'1.7, l'1.8 e l'1.9 non facili ma è utile averci provato almeno un po' prima di vedere la soluzione. Se trovate difficoltà a fare provate a soffermarvi sul primo di questi esempi, quello dell'esercizio 1.7 e chiedetevi, come abbiamo fatto a lezione se 1 appartiene all'insieme, se 0 appartiene all'insieme e così via. Quando vi siete fatti un'idea provate a motivare la risposta.

*sabato 8 ottobre.* Gli argomenti di questa settimana li potete trovare nella prima e nella seconda nota sui numeri complessi. Potete fare gli esercizi dal 4.4 al 4.10. Secondo me è importante acquisire un po' di manualità nei conti con i numeri complessi. Quindi per chi non ha tempo di fare tutti gli esercizi consiglio di fare almeno il 4.6 e il 4.9.

*sabato 15 ottobre.* Gli argomenti trattati questa settimana li trovate nella seconda nota sui numeri complessi e nella prima nota sulla geometria dello spazio. Invito inoltre chi non ha familiarità con i polinomi a guardarsi anche la nota sui polinomi che saranno un oggetto importante in tutto il corso.

Potete fare uno qualsiasi degli esercizi sui numeri complessi della sezione 4. In particolare consiglio di provare a fare il 4.11, il 4.12 e il 4.14. Potete inoltre fare gli esercizi 5.1, 5.2, 5.3, 5.4.

*sabato 22 ottobre.* Gli argomenti trattati questa settimana li trovate nella seconda nota sulla geometria dello spazio. E nella prima nota sugli spazi vettoriali.

Potete fare gli esercizi 4.21, 5.9, 5.10, 5.11, 5.12, 6.1, 6.2, 6.3, 6.4, 6.5, 6.6, 6.7, 6.10, 6.11. Sono tanti, anche se in alcuni casi, per la sezione 6, si tratta di completare delle verifiche fatte in parte in classe. Direi che è importante fare almeno un esercizio sulle proiezioni, tipo 5.10 e qualche esercizio sugli spazi vettoriali, tipo dal 6.1 al 6.4 e possibilmente qualcuno in più.

*sabato 29 ottobre.* Questa settimana abbiamo definito la somma di sottospazi vettoriali, il sottospazio generato da un insieme di vettori. Abbiamo inoltre definito il concetto di base e come conseguenza abbiamo introdotto le coordinate in uno spazio vettoriale qualsiasi. Abbiamo inoltre introdotto il concetto di generatori e di sottospazio vettoriale generato. Tutte queste cose le trovate nella seconda nota sugli spazi vettoriali.

Potete fare gli esercizi relativi alla consegna del 4 novembre, sezione 8. Le istruzioni relative le trovate in quella sezione: leggetele!

Potete inoltre tutti gli esercizi della sezione 6 e gli esercizi della sezione 7 nei quali non compare l'espressione vettori linearmente indipendenti. In particolare, oltre gli esercizi relativi alla consegna consiglio di fare gli esercizi 7.3 e 7.4.

*sabato 5 novembre.* Questa settimana abbiamo introdotto il concetto di vettori linearmente indipendenti. Queste cose le trovate nella seconda nota sugli spazi vettoriali.

Abbiamo inoltre introdotto lo spazio vettoriale delle matrici. L'applicazione associata ad una applicazione lineare e il prodotto tra matrici. Queste cose le trovate

Potete fare gli esercizi 7.5, 7.6, 7.8, 7.9, 7.10, 7.11, 9.2 e 9.3. Consiglio di fare almeno un paio tra gli esercizi un po' più teorici proposti della sezione 7 e l'esercizio 9.2.

*sabato 12 novembre.* Questa settimana non c'è stata lezione perché mi sono ammalato. Non ho quindi nulla da aggiungere a quello che ho già scritto per la settimana passata, tranne che vi consiglio di fare qualche esercizio di quelli che vi sono rimasti in sospeso dalla settimana scorsa.

È un momento delicato del corso, in cui abbiamo introdotto le basi essenziali del linguaggio che utilizzeremo in seguito.

*sabato 19 novembre.* Questa settimana abbiamo spiegato il teorema fondamentale dell'algebra lineare, la definizione di uno spazio vettoriale, come estrarre una base da un insieme di generatori e come completare un insieme di vettori linearmente indipendenti ad una base. Queste cose le trovate nella terza nota sugli spazi vettoriali.

Abbiamo introdotto le applicazioni lineari, il nucleo di una applicazioni lineare e l'immagine di una applicazione lineare. Queste cose le trovate nella prima nota sulle applicazioni lineari.

Consiglio molto calorosamente di fare i primi 6 esercizi della sezione 11 (magari del primo se vi sembra di aver capito abbastanza non c'è bisogno di rispondere a tutte le domande) e l'esercizio 10.10. Questi esercizi sono tutti sulle applicazioni lineari.

Consiglio anche di fare almeno un esercizio della sezione 9, sicuramente il primo. Magari qualcuno in più. Per chi si sente abbastanza sicuro può anche provare gli ultimi quattro esercizi presenti nella III nota sugli spazi vettoriali. In questi quattro esercizi si dimostra il teorema fondamentale.

*sabato 26 novembre.* Gli argomenti trattati questa settimana li trovate nelle due note sulle applicazioni lineari. La parte relativa al teorema della dimensione la trovate invece nella nota che si chiama dimensione II parte.

Potete fare tutti gli esercizi sulle applicazioni lineari anche se alcuni potrebbero risultare un po' difficili.

Consiglio di fare l'11.7, l'11.9, l'11.10, l'11.11 come esercizi di base sulla matrice associata e l'11.17 e l'11.18 come esercizi di base sul teorema della dimensione.

L'11.13, l'11.14, l'11.15, l'11.16, e l'11.19 sono molto istruttivi ma in questo momento dell'anno potrebbero risultare più difficili degli altri.

*sabato 3 dicembre.* Questa settimana abbiamo parlato di matrici invertibili, di sistemi lineari e di come trovare una base del nucleo di una applicazione  $L_A$ . Questi argomenti li trovate nella sezione sui sistemi lineari, fino alla parte sulle matrici di rango massimo. Da quello che trovate in quella sezione in poi, quest'anno lo abbiamo trattato diversamente.

Potete fare gli esercizi relativi alla consegna del 9 dicembre, sezione 12. Le istruzioni relative le trovate in quella sezione: leggetele!

Potete inoltre fare gli esercizi che non avete fatto della sezione 11, consiglio soprattutto l'11.15, l'11.16 l'11.19 (nessuno dei quali è facile ma che potete provare a fare), e gli esercizi 13.1 e 13.2.

*Sabato 10 dicembre.* Gli argomenti trattati questa settimana li trovate nella nota sul determinante.

Potete fare tutti gli esercizi della sezione 13 e della sezione 14. Consiglio in particolare di fare il 13.4 o il 13.5, il 14.1, il 14.2, il 14.3 e il 14.4.

*Mercoledì 21 dicembre.* Gli argomenti relativi alla diagonalizzazione: autovalori e autovettori li trovate sul libro di Martelli. Inoltre trovate le schermate delle ultime due lezioni tra le note.

Potete ormai fare tutti gli esercizi di queste. In particolare una buona selezione e' quella proposta per gli esercizi da consegnare il 16 gennaio. Inoltre per chi vuole, puo' attingere anche ai compiti degli anni passati che trovati tutti alla solita pagina web.

## 1. ESERCIZI SUI PREREQUISITI

Questi esercizi riguardano argomenti che nel corso sono stati solo velocemente richiamati durante la prima settimana e che il corso presuppone noti dalle superiori. Si tratta di qualche nozione di calcolo proposizionale, di insiemistica, di trigonometria e coordinate polari.

**Esercizio 1.1.** Scrivere il numero  $1,2\overline{345}$  come frazione. Scrivere la frazione  $11/7$  come numero con la virgola.

**Esercizio 1.2.** In una classe di Ingegneria meccanica di 200 studenti tutti hanno almeno dato un esame tra analisi, geometria e fisica al primo appello utile. 160 hanno dato analisi, 70 geometria, 60 fisica, 15 hanno dato analisi e geometria, ma non fisica e 25 analisi e fisica ma non geometria. Gli studenti che hanno dato sia geometria che fisica hanno dato anche analisi. Quanti sono gli studenti che hanno almeno due esami?

**Esercizio 1.3.** In una classe di Ingegneria meccanica di 250 studenti tutti hanno almeno dato un esame tra analisi, geometria e fisica al primo appello utile. 150 hanno dato analisi, 100 geometria, 75 fisica, e 15 tutti e tre gli esami. Gli studenti che hanno dato sia geometria che fisica hanno dato anche analisi. Quanti sono gli studenti che hanno almeno due esami?

**Esercizio 1.4.** Sia

$$A = \{1, 2, 3, 5\} \quad B = \{x \in \mathbb{N} : x^2 = 9 \text{ o } x^2 = 16\} \quad \text{e} \quad C = \{4, 6, 7\}$$

Si descrivano gli insiemi

$$A \setminus B \quad C \times (A \setminus B) \quad (A \times B) \cap (C \times B).$$

elencandone gli elementi.

**Esercizio 1.5.** Sia  $A = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$  e sia  $B = \{x^2 : x \in A\}$ . Si calcoli  $\text{card}(B)$ .

**Esercizio 1.6.** Siano  $A$  e  $B$  due sottoinsiemi dell'insieme  $C$ , ovvero contenuti in  $C$ . Sia

$$D = \{x \in C : \text{ se } x \in A \text{ allora } x \in B\}$$

Capire chi è l'insieme  $D$ . Si faccia un disegno di  $A$ ,  $B$  e  $C$  e si colori l'insieme  $D$ .

[provate a fissare  $x$  in  $C$  e cercate di capire se per quel dato  $x$  la frase " se  $x \in A$  allora  $x \in B$ " sia vera o meno. Sulla correzione di questo esercizio ci soffermeremo.]

**Esercizio 1.7.** Si dia una descrizione più esplicita dei seguenti insiemi

$$\begin{aligned} &\{x \in \mathbb{R} : \forall y \in \mathbb{R}, x = xy\} \\ &\{x \in \mathbb{R} : \forall y \in \mathbb{R} \exists z \in \mathbb{R} \text{ tale che } x + y + z = 0\} \\ &\{x \in \mathbb{R} : \exists z \in \mathbb{R} \text{ tale che } \forall y \in \mathbb{R}, x + y + z = 0\} \end{aligned}$$

**Esercizio 1.8.** Si dia una descrizione più esplicita dei seguenti insiemi

$$\begin{aligned} &\{x \in \mathbb{R} : \forall y \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R}, y + xz = 0\} \\ &\{x \in \mathbb{R} : \forall y \in \mathbb{R}, \exists z \in \mathbb{R} \text{ tale che } y + xz = 0\} \\ &\{x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R}, \text{ tale che } \forall z \in \mathbb{R}, y + xz = 0\} \\ &\{x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R}, \exists z \in \mathbb{R} \text{ tale che } y + xz = 0\} \\ &\{x \in \mathbb{R} : \forall z \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} \text{ tale che } y + xz = 0\} \\ &\{x \in \mathbb{R} : \exists z \in \mathbb{R}, \text{ tale che } \forall y \in \mathbb{R} y + xz = 0\} \end{aligned}$$

**Esercizio 1.9.** Si dia una descrizione più esplicita dei seguenti insiemi

$$\begin{aligned} &\{x \in \mathbb{R} : \forall y \in \mathbb{R} \exists z \in \mathbb{R} \text{ tale che } xz = xzy^2\} \\ &\{x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} \text{ tale che } \forall z \in \mathbb{R}, xz = xzy^2\} \\ &\{x \in \mathbb{R} : \forall y \in \mathbb{R} \exists z \in \mathbb{R} \text{ tale che } xz = xy^2\} \\ &\{x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} \text{ tale che } \forall z \in \mathbb{R}, xz = xy^2\} \end{aligned}$$

**Esercizio 1.10.** Si proponga una formula simile sulla cardinalità dell'unione di tre insiemi simile a quella fatta in classe per l'unione di due insiemi.

**Esercizio 1.11.** Determinare le coordinate cartesiane dei punti che hanno le seguenti coordinate polari senza usare la calcolatrice

$$\rho = 5, \alpha = 3\pi/2 \quad \rho = 3, \alpha = 5\pi/4 \quad \rho = 2, \alpha = -\pi/3 \quad \rho = 4, \alpha = -\pi/6$$

**Esercizio 1.12.** Determinare le coordinate polari dei punti che hanno le seguenti coordinate cartesiane senza usare la calcolatrice

$$(-2, -2), \quad (3, -3\sqrt{3}), \quad (-1, 1)$$

**Esercizio 1.13.** Determinare le coordinate cartesiane dei punti che hanno le seguenti coordinate polari usando la calcolatrice

$$\rho = 5, \alpha = 1, 1 \quad \rho = 3, \alpha = \pi/7 \quad \rho = 2, \alpha = 2 \quad \rho = 4\sqrt{3}, \alpha = -\pi/9$$

**Esercizio 1.14.** Determinare le coordinate polari dei punti che hanno le seguenti coordinate cartesiane usando la calcolatrice

$$(-2, -3), \quad (3, 5), \quad (4, 1)$$

## 2. ESERCIZI SUI PREREQUISITI: CONCETTI DI BASE SULLE FUNZIONI

Queste esercizi riguardano alcuni concetti riguardanti le funzioni, che supponiamo noti dalle superiori, e che verranno richiamati più avanti nel corso. Altri esercizi simili, forse leggermente più semplici li trovate nella nota sui prerequisiti.

**Esercizio 2.1.** Sia  $\mathbb{R}_+$ , l'insieme dei numeri reali maggiori o uguali a 0. Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  definita da  $f(x) = x^2$  e sia  $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  definita dalla stessa formula  $g(x) = x^2$ . Dire se  $f$  e  $g$  sono iniettive o surgettive.

**Esercizio 2.2.** Sia  $A = \{-1, 1, 3, 4\}$ ,  $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ . Sia  $f : A \rightarrow \mathbb{Z}$  definita da  $f(n) = n^2 - 1$ . Determinare l'immagine di  $f$  e calcolare  $f^{-1}(B)$ .

**Esercizio 2.3.** Dire quali tra le seguenti funzioni da  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{R}$  sono iniettive e quali surgettive.

$$f(x) = x^3 - x; \quad g(x) = x^4 - x^2 + 1; \quad h(x) = x + 7.$$

Per le funzioni che sono sia iniettive che surgettive determinare l'inversa.

**Esercizio 2.4.** Siano  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definite da  $f(x) = x^2 + 4x$  e  $g(x) = x^2 - 1$ . Determinare l'immagine di  $f$ , di  $g$  e di  $f \circ g$ .

**Esercizio 2.5.** Siano  $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  le funzioni  $f(x) = x^2 - 2x - 3$ ,  $g(x) = x^2 - 3$  e  $h = f \circ g$ . Sia  $A = [-5, 5]$ . Determinare  $f^{-1}(A)$  e  $h^{-1}(A)$ .

**Esercizio 2.6.** Sia  $\mathbb{R}_+$ , l'insieme dei numeri reali maggiori o uguali a 0. Sia  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  definita da  $f(x) = x^2 + 2x$ . Si dimostri che  $f$  è bigettiva e se ne calcoli l'inversa.

**Esercizio 2.7.** Sia  $f : X \rightarrow Y$ .

- Si dimostri che se  $f$  è bigettiva allora  $f \circ f^{-1} = id_Y$  e  $f^{-1} \circ f = id_X$ .
- Viceversa si dimostri che se esistono  $g, h : Y \rightarrow X$  tali che  $f \circ g = id_Y$  e  $h \circ f = id_X$  allora  $f$  è bigettiva e  $g = h = f^{-1}$ .
- Si dia un esempio di una funzione  $f$  che non sia bigettiva, per la quale esiste  $g : Y \rightarrow X$  tale che  $f \circ g = id_Y$ .

**Esercizio 2.8.** Sia  $f : X \rightarrow Y$  e sia  $g : Y \rightarrow Z$ . Si dimostri che se  $f$  e  $g$  sono bigettive, allora anche  $g \circ f$  lo è e  $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

**Esercizio 2.9.** Sia  $f : X \rightarrow Y$  e sia  $g : Y \rightarrow Z$ . Si dimostri che

- se  $g \circ f$  è iniettiva, allora  $f$  è iniettiva.
- se  $g \circ f$  è surgettiva, allora  $g$  è surgettiva.
- fare un esempio in cui  $g \circ f$  è bigettiva, ma  $f$  non è surgettiva e  $g$  non è iniettiva.

## 3. ESERCIZI VARI

Questi esercizi non sono su un argomento specifico trattato nel corso, né sono esercizi su argomenti che il corso presuppone noti dalle superiori. Sono esempi di piccoli ragionamenti matematici. Nessun esercizio richiede delle conoscenze specifiche, ma tutti gli esercizi richiedono un po' di pazienza e tenacia, in alcuni all'inizio non è chiaro come procedere ma non ci si deve lasciar scoraggiare.

**Esercizio 3.1.** Supponiamo di aver colorato ogni lato e ogni diagonale di un esagono di rosso o blu. Si dimostri che esiste un triangolo tutto colorato di rosso o un triangolo tutto colorato di blu.

**Esercizio 3.2.** Un cavallo si muove su una scacchiera 8x8 partendo da un angolo della scacchiera. Può passare per tutte le caselle della scacchiera una e una sola volta e terminare nell'angolo opposto da quello da cui è partito?

**Esercizio 3.3.** Due bambini giocano con delle monete e due buste. Partono con 100 monete in una busta e 99 in un'altra. Il primo giocatore butta le monete di una busta e divide le monete rimanenti nelle due buste facendo sì che ogni busta contenga almeno una moneta e passa le buste all'altro giocatore. Il gioco continua con i due giocatori che si alternano. Vince chi riesce a dare all'altro due sacchetti con una moneta. Uno dei due giocatori ha una strategia vincente?

**Esercizio 3.4.** Due bambini giocano sul tavolo di casa che è perfettamente rettangolare. Hanno a disposizione una pila di piatti circolari tutti uguali. I due giocatori dispongono, alternandosi, un piatto sul tavolo in una zona libera, ovvero senza che questo sia sovrapposto in nessun modo ai piatti precedenti. Perde il primo giocatore che non riesce a mettere il piatto o il cui piatto cade. All'inizio il tavolo è vuoto. Il primo giocatore ha una strategia vincente. Quale?

**Esercizio 3.5.** Si dimostri che esistono infiniti numeri primi procedendo nel seguente modo: si supponga per assurdo che siano in numero finito e che siano  $p_1, \dots, p_n$  si consideri il numero  $m = p_1 \cdots p_n + 1$  e si osservi che questo numero non è divisibile per nessuno dei numeri primi  $p_1, \dots, p_n$ .

#### 4. NUMERI COMPLESSI

**Esercizio 4.1.** Si definisca un campo che ha soli due elementi. [questo esercizio non ha nessuna importanza per il proseguo del corso, rimarrà come una curiosità]

**Esercizio 4.2.** Sia  $K$  un campo. Si dimostrino le seguenti affermazioni:

- Se  $a, b \in K$  e  $b \neq 0$  allora  $(\frac{a}{b}) \cdot_K b = a$ .
- Se  $a, b, c \in K$  e  $a +_K c = b +_K c$  allora  $a = b$ .
- Se  $a \in K$  allora  $0 \cdot_K a = 0_K$ .
- Se  $a, b \in K$  e  $a \cdot_K b = 0_K$  allora  $a = 0_K$  o  $b = 0_K$ .
- Se  $a, b \in K$  allora  $(-a) \cdot_K b = -(a \cdot_K b)$ .
- Se  $a, b \in K$  allora  $(-a) \cdot_K (-b) = a \cdot_K b$ .

**Esercizio 4.3.** Sia  $K = \mathbb{R}_+$  sia  $0_K = 1$  e  $1_K = 10$ . Definiamo somma e prodotto come segue

$$a +_K b = a \cdot b \quad a \cdot_K b = a^{\log_{10} b}.$$

Si dimostri che  $K$  con questa scelta del prodotto e della somma dell'elemento zero e dell'elemento uno è un campo.

**Esercizio 4.4.** Completate la dimostrazione che i numeri complessi sono un campo.

**Esercizio 4.5.** Dimostrate, seguendo il procedimento fatto in classe, che se  $w$  è un numero complesso allora l'equazione  $z^2 = w$  ha sempre soluzione.

**Esercizio 4.6.** Calcolare  $(1 + i)^2$ . Calcolare  $(3 + 4i) \cdot (3 - 2i)$ .

**Esercizio 4.7.** Sia  $z = 3 + 4i$  e  $w = 7 - 3i$ . Calcolare  $\bar{z}/w$  e  $z \cdot \bar{w}$ .

**Esercizio 4.8.** Verificare che per ogni  $z \in \mathbb{C}$  si ha  $\overline{\bar{z}} = z$ .

**Esercizio 4.9.** Calcolare le radici quadrate complesse dei seguenti numeri:

$$37, \quad -169, \quad 9i, \quad -\frac{3}{4} + i, \quad 3 + 7i.$$

(ogni tanto vi verranno dei numeracci)

**Esercizio 4.10.** Risolvere le seguenti equazioni dove  $z$  è un numero complesso

$$(1 + i)z + 14 = 0, \quad z^2 + 5z + 10 = 0, \quad (1 + i)z^2 + \sqrt{3}z - \frac{1}{2} - \frac{i}{2} = 0$$

(ogni tanto vi verranno dei numeracci)

**Esercizio 4.11.** Calcolare le radici quarte di  $-16$  (ovvero gli  $z$  tali che  $z^4 = -16$ ). Calcolare le radici ottave di  $1$  (ovvero gli  $z$  tali che  $z^8 = 1$ ). [utilizzare le coordinate polari].

**Esercizio 4.12.** Determinare tutti i numeri complessi  $z$  tali che  $z^4 = \bar{z}^3$ .

**Esercizio 4.13.** Determinare tutti i numeri complessi  $z$  tali che

$$\frac{z - i}{z + i}$$

è un numero reale.

**Esercizio 4.14.** Determinare tutti i numeri complessi  $z$  tali che

$$\frac{|z - i|}{|z + i|} = 2.$$

**Esercizio 4.15.** Determinare tutti i numeri complessi  $z$  tali che  $e^z = e$ .

**Esercizio 4.16.** Risolvere le seguenti equazioni, dove  $z \in \mathbb{C}$ :

$$(z - \bar{z})^3 = i \quad z^2 + (i - 1)z - i = 0 \quad z^3 = iz\bar{z}$$

**Esercizio 4.17** (Daddi). Si determini il valore del parametro reale  $k$  in modo che l'equazione  $z^2 + (3 + ki)z = 8 - 9i$  abbia, tra le sue soluzioni, il numero complesso  $2 - i$ . Si determini poi l'altra soluzione dell'equazione.

**Esercizio 4.18.** Risolvere l'equazione  $e^{3z} + 5e^{2z} + 7e^z = 0$ .

**Esercizio 4.19** (Daddi). Si disegni nel piano complesso l'insieme rappresentato dal sistema

$$\begin{cases} |\operatorname{Im}(z - 2 + 4i)| \leq 1 \\ |z - 1 + 3i| > 3. \end{cases}$$

**Esercizio 4.20.** Sia  $w = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ , allora  $w^{n-1} + w^{n-2} + \dots + w + 1 = 0$ .

**Esercizio 4.21.** Si trovi una formula per l' $n$ -esimo termine della successione  $x_n$  definita nel modo seguente:

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_{n+1} = 2x_n - 2x_{n-1}.$$

## 5. GEOMETRIA DEL PIANO E DELLO SPAZIO

**Esercizio 5.1.** Siano dati i punti  $p = (1, 2, 3)$ ,  $q = (0, 1, -2)$ ,  $r = (-2, 1, 1)$ . Calcolare

$$p + 3q - r \quad 3p - 2q + r$$

**Esercizio 5.2.** Siano dati i punti  $p = (1, 2, 3)$ ,  $q = (0, 1, -2)$ ,  $r = (-2, 1, 1)$ ,  $s = (1, 1, 1)$ . Calcolare il baricentro dei quattro punti.

**Esercizio 5.3.** Siano dati i punti  $p = (2, 3)$ ,  $q = (0, 1)$ ,  $r = (-2, 1)$ ,  $s = (1, 1)$ . Calcolare l'intersezione tra le rette  $pq$  e  $rs$ .

**Esercizio 5.4** (Lombardo). Sia dato un quadrilatero convesso  $abcd$  nel piano. Si dimostri che esiste un punto comune ai segmenti congiungenti i punti medi dei lati opposti e al segmento congiungente i punti medi delle due diagonali. Di che punto si tratta?

**Esercizio 5.5.** Siano dati i punti  $p = (1, 2, 3)$ ,  $q = (0, 1, -2)$ ,  $r = (-2, 1, 1)$ . Calcolare lunghezza dei lati, perimetro e angoli del triangolo  $pqr$ . [per gli angoli usare la calcolatrice].

**Esercizio 5.6.** Sia  $abc$  un triangolo non degenere. Si dimostri che le tre altezze si incontrano in uno stesso punto.

**Esercizio 5.7.** Sia  $abc$  un triangolo non degenere. Sia  $p$  l'intersezione delle altezze (ortocentro),  $q$  l'intersezione delle mediane (baricentro) e  $r$  il centro del triangolo circoscritto (circocentro). Si dimostri che  $p, q, r$  giacciono su una stessa retta. [di questo esercizi trovate la soluzione sulle note]

**Esercizio 5.8.** Da un punto  $P$  esterno ad una circonferenza si tracci una retta che interseca il cerchio e siano  $A$  e  $B$  i due punti di intersezione (eventualmente coincidenti se la retta è tangente alla circonferenza). Si dimostri che

$$\operatorname{dist}(A, P) \operatorname{dist}(B, P) = d^2 - r^2$$

dove  $d$  è la distanza di  $P$  dal centro della circonferenza e  $r$  è il raggio della circonferenza.

**Esercizio 5.9.** Siano dati i punti  $p = (1, 2, 3)$ ,  $q = (0, 1, -2)$ . Calcolare la proiezione di  $q$  sulla retta  $Op$  e la distanza di  $q$  da tale retta.

**Esercizio 5.10.** Siano dati i punti  $p = (1, 2, 3)$ ,  $q = (0, 1, -2)$ ,  $r = (-2, 1, 1)$ . Calcolare la proiezione di  $r$  sulla retta  $pq$  e la distanza di  $r$  da tale retta.

**Esercizio 5.11.** Sia  $\pi$  piano  $x + y + z = 0$ . Si calcoli la proiezione di  $p = (1, 2, 3)$  su  $\pi$  e la distanza di  $p$  da  $\pi$ . Si calcoli inoltre il simmetrico di  $p$  rispetto a  $\pi$ .

**Esercizio 5.12.** Sia  $\pi$  piano  $x + y + z = 1$ . Si calcoli la proiezione di  $p = (1, 2, 3)$  su  $\pi$  e la distanza di  $p$  da  $\pi$ . Si calcoli inoltre il simmetrico di  $p$  rispetto a tale piano.

**Esercizio 5.13.** Sia  $\Pi$  il piano di equazioni  $ax + by + cz = d$ . Si determini una formula per la distanza di un punto di coordinate  $(\alpha, \beta, \gamma)$  da  $\Pi$ .

6. SPAZI E SOTTOSPAZI VETTORIALI

**Esercizio 6.1.** Si completi la dimostrazione che  $K^n$  è un  $K$  spazio vettoriale.

**Esercizio 6.2.** Si completi la dimostrazione che  $\mathcal{F}(X, K)$  è un  $K$  spazio vettoriale.

**Esercizio 6.3.** Si considerino i seguenti sottoinsiemi dello spazio vettoriale  $\mathbb{R}^2$ . Quali sono sottospazi vettoriali?

$$\begin{aligned} T &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3x + 4y = 0\} \\ U &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3x + 4y = 1\} \\ V &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \\ W &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 0\} \\ X &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = -1\} \\ Y &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \text{ e } y \geq 0\} \\ Z &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4xy + 4y^2 = 0\} \end{aligned}$$

Nei casi in cui è un sottospazio si devono verificare le tre proprietà che caratterizzano i sottospazi, nei casi in cui non è un sottospazio basta fare un esempio che mostra che almeno una di queste proprietà fallisce. [Si, No, No, Si, No, No, Si]

**Esercizio 6.4.** Si considerino i seguenti sottoinsiemi dello spazio vettoriale  $\mathcal{F}(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$ . Quali sono sottospazi vettoriali?

$$\begin{aligned} U &= \{f(x) \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}, \mathbb{R}) : f(1) = 0 \text{ e } f(2) = 0\} \\ W &= \{f(x) \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}, \mathbb{R}) : f(1)f(2) = 0\} \\ X &= \{f(x) \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}, \mathbb{R}) : f(-x) = f(x) \text{ per ogni } x \in \mathbb{Z}\} \\ Y &= \{f(x) \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}, \mathbb{R}) : f(x+1) = 2f(x) \text{ per ogni } x \in \mathbb{Z}\} \\ Z &= \{f(x) \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}, \mathbb{R}) : f(x+1) = f(x) + 1 \text{ per ogni } x \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

Nei casi in cui è un sottospazio si devono verificare le tre proprietà che caratterizzano i sottospazi, nei casi in cui non è un sottospazio basta fare un esempio che mostra che almeno una di queste proprietà fallisce. [Si, No, Si, Si, No]

**Esercizio 6.5.** Sia  $V, +_V, \cdot_V, 0_V$  il seguente spazio vettoriale su  $\mathbb{R}$ : come insieme  $V = \mathbb{R}^+$ ,  $0_V = 1$  e somma e prodotto sono definite nel modo seguente

$$x +_V y = xy \quad \lambda \cdot_V x = x^\lambda$$

per  $x, y \in V$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Verificare che è uno spazio vettoriale su  $\mathbb{R}$ .

**Esercizio 6.6.** Siano  $U$  e  $W$  due spazi vettoriali e sia  $V = U \times W$ . Su  $V$  definisco  $O$ , somma e prodotto per scalare nel seguente modo:

$$(u, w) + (u', w') = (u + u', w + w') \quad \lambda \cdot (u, w) = (\lambda u, \lambda w) \quad 0 = (0, 0)$$

per ogni  $u, u' \in U$ ,  $w, w' \in W$  e  $\lambda \in K$ . Si verifichi che  $V$  è uno spazio vettoriale.

**Esercizio 6.7.** Si dimostri che se  $U$  e  $W$  sono due sottospazi vettoriali dello spazio vettoriale  $V$  allora  $U \cap W$  è un sottospazio vettoriale di  $V$ .

**Esercizio 6.8.** Sia  $\mathcal{R}$  una retta passante per l'origine di  $\mathbb{R}^3$  e sia  $\Pi$  il piano ortogonale a  $\mathcal{R}$  passante per l'origine. Si determini  $\mathcal{R} \cap \Pi$  e  $\mathcal{R} + \Pi$ .

**Esercizio 6.9.** Dimostrare che gli unici sottospazi di  $\mathbb{R}^2$  sono  $\{0\}$  le rette per l'origine e tutto  $\mathbb{R}^2$ .

**Esercizio 6.10.** Sia  $V$  uno spazio vettoriale su  $K$ . Allora  $0 \cdot v = 0_V$  per ogni  $v \in V$  e  $\lambda \cdot 0_V = 0_V$  per ogni  $\lambda \in K$ .

**Esercizio 6.11.** Siano  $U$  e  $W$  due sottospazi dello spazio vettoriale  $V$ . Si dimostri che se  $U \cup W$  è un sottospazio vettoriale di  $V$  allora  $U \subset W$  o  $W \subset U$ .

7. BASI, GENERATORI E VETTORI LINEARMENTE INDIPENDENTI

**Esercizio 7.1.** Nello spazio vettoriale  $\mathbb{R}^3$  si considerino le seguenti liste di vettori:

$$\begin{aligned} u_1 &= (1, 1, 1) & u_2 &= (1, 0, 0) & u_3 &= (0, 1, 0) & u_4 &= (0, 0, 1) \\ v_1 &= (1, 1, 1) & v_2 &= (1, 1, 0) \\ w_1 &= (1, 1, 1) & w_2 &= (1, 1, 0) & w_3 &= (1, -1, 0) \end{aligned}$$

Si dimostri  $u_1, u_2, u_3, u_4$  sono generatori ma non sono linearmente indipendenti, che  $v_1, v_2$  sono linearmente indipendenti ma non sono generatori e che  $w_1, w_2, w_3$  è una base.

**Esercizio 7.2.** Trovare una base del sottospazio  $x - y + 3z = 0$  di  $\mathbb{C}^3$ . Scrivere le coordinate di  $(1, 4, 1)$  rispetto alla base scelta.

**Esercizio 7.3.** Si dimostri che i seguenti polinomi sono una base di  $\mathbb{C}[t]_{\leq 2}$ :  $f_1(t) = \frac{1}{2}(t-1)(t-2)$ ,  $f_2(t) = \frac{1}{2}t(t-1)$ ,  $f_3(t) = -t(t-2)$ . Sia  $f = t^2$ , scrivere le coordinate di  $f$  rispetto a  $f_1, f_2, f_3$ . Se  $f$  è un polinomio qualsiasi quali sono le coordinate di  $f$  rispetto alla base  $f_1, f_2, f_3$ . (C'è un modo molto sintetico ed efficace per farlo)

**Esercizio 7.4.** Sia  $X$  un insieme finito e  $K$  un campo e sia  $V = \mathcal{F}_K(X)$  lo spazio vettoriale delle funzioni da  $X$  in  $K$  definito in classe. Per ogni  $x \in X$  sia  $\delta_x$  la funzione definita nel modo seguente:

$$\delta_x(y) = \begin{cases} 1 & \text{se } y = x; \\ 0 & \text{se } y \neq x. \end{cases}$$

Dimostrare che se  $x_1, \dots, x_n$  sono gli elementi di  $X$  allora  $\delta_{x_1}, \dots, \delta_{x_n}$  è una base di  $\mathcal{F}_K(X)$ .

**Esercizio 7.5.** Sia  $V$  uno spazio vettoriale  $V$  su  $K$ . Siano  $u, v \in V$  e sia  $v$  diverso da zero. Dimostrare che  $u$  e  $v$  sono linearmente dipendenti se e solo se esiste  $\lambda \in K$  tale che  $u = \lambda v$ .

**Esercizio 7.6.** Sia  $v_1, v_2, v_3, v_4$  una base di uno spazio vettoriale  $V$ . Dimostrare che per ogni  $v$  in  $V$  i vettori  $v_1, v_2, v_3, v_4, v$  generano  $V$  ma non sono linearmente indipendenti.

**Esercizio 7.7.** Sia  $v_1, v_2, v_3, v_4$  una base di uno spazio vettoriale  $V$  e sia  $U = \text{Span}(v_1, v_2)$  e  $W = \text{Span}(v_3, v_4)$ . Determinare  $U \cap W$  e  $U + W$ .

**Esercizio 7.8.** Siano  $u_1, \dots, u_h, w_1, \dots, w_k$  e sia  $U = \text{Span}(u_1, \dots, u_h)$  e sia  $W = \text{Span}(w_1, \dots, w_k)$ . Allora  $U + W$  è generato da  $u_1, \dots, u_h, w_1, \dots, w_k$ . [Se aiuta sostituire  $h$  e  $k$  con 2 e 3]

**Esercizio 7.9.** Sia  $U$  e  $W$  due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale  $V$ . Siano  $u_1, u_2 \in U$  e  $w_1, w_2 \in W$ . Dimostrare che se  $U \cap W = \{0\}$  e  $u_1, u_2$  sono linearmente indipendenti e  $w_1, w_2$  sono linearmente indipendenti allora  $u_1, u_2, w_1, w_2$  sono linearmente indipendenti.

**Esercizio 7.10.** Siano  $v_1, \dots, v_n \in V$  dei vettori linearmente indipendenti. Sia  $v \in V$ . Dimostrare che  $v_1, \dots, v_n, v$  sono linearmente indipendenti se e solo se  $v \notin \text{Span}\{v_1, \dots, v_n\}$ .

**Esercizio 7.11.** Si considerino i vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si verifichi che sono una base di  $\mathbb{R}^4$  e si calcolino le coordinate dei seguenti vettori rispetto a questa base:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Esercizio 7.12.** Siano  $\mathcal{R}$  e  $\mathcal{S}$  due rette parallele non coincidenti nel piano e siano  $P$  e  $Q$  due punti distinti in  $\mathcal{R}$ . Sia  $V$  un punto non in  $\mathcal{R}$  e siano  $A$  e  $B$  le intersezioni delle rette  $VP$  e  $VQ$  con  $\mathcal{S}$ . Sia  $C$  l'intersezione delle rette  $PB$  e  $QA$  e sia  $M$  l'intersezione di  $\mathcal{R}$  con  $VC$ . Allora  $M$  è il punto medio di  $PQ$ .



## 8. CONSEGNA DEL 4 NOVEMBRE

Per chi vuole, ma siete consigliati di farlo, venerdì 4 novembre potete consegnare alcuni esercizi che vi saranno corretti, in modo da ricevere un riscontro sia su quello che state capendo, sia su quello che ci si aspetta da voi, sia su come esporre la soluzione di un esercizio.

Potete consegnare **al massimo tre esercizi** tra quelli che trovate elencati qui sotto. Un esercizio deve essere scelto tra i primi due e due esercizi tra gli ultimi tre.

Vi consiglio di consegnare quelli sui quali pensate di poter dire qualcosa di sensato ma non vi sembrano ovvi.

Questi esercizi non avranno nessun peso sull'esame finale, se non vi fidate potete anche mettere un nome falso, serve solo per rintracciare il compito al momento della consegna. Potete collaborare, ma non ha nessun senso consegnare degli esercizi copiati integralmente da un'altra persona o di cui non abbiate capito la soluzione. Non saranno corretti esercizi scritti in modo illeggibile: questa è una regola che vale anche per i compiti e i compitiini. In questo caso, visto che avete tutto il tempo, ci aspettiamo consegnate una versione in bella degli esercizi e senza troppe cancellature.

**Esercizio 8.1.** Risolvere l'equazione

$$z^2 + z(2i - 1) - 3 - i = 0.$$

**Esercizio 8.2.** Sia  $\mathcal{S}$  la retta di  $\mathbb{R}^3$  passante per i punti  $P = (1, 0, 1)$  e  $Q = (-1, -2, 3)$ . Si determini la proiezione ortogonale di  $R = (1, 1, 1)$  sulla retta  $\mathcal{S}$ .

**Esercizio 8.3.** Sia  $U$  una retta passante per l'origine in  $\mathbb{R}^3$  e sia  $W$  il piano passante per l'origine ortogonale a  $U$ . Si determini  $U \cap W$  e  $U + W$ .

**Esercizio 8.4.** Sia  $V = \{(x, y, x) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - z = 0\}$ . Sia  $v_1 = (1, 0, 1)$  e  $v_2 = (1, 1, 3)$ . Si dimostri che  $v_1, v_2$  è una base di  $V$ . Si calcolino le coordinate del vettore  $v = (0, 1, 2)$  rispetto a questa base.

**Esercizio 8.5.** Sia  $v_1, v_2, v_3, v_4$  una base dello spazio vettoriale  $V$  e sia  $U = \text{Span}\{v_1, v_2\}$  e  $W = \text{Span}\{v_3, v_4\}$ . Si determini  $U \cap W$  e  $U + W$ .

## 9. TEOREMA FONDAMENTALE, DIMENSIONE

**Esercizio 9.1.** Sia  $u = (1, 2, 3)$  e sia  $U = \mathbb{R}u$ . Sia  $W$  il piano  $3x - z = 0$ . Trovare una base  $v_1, v_2, v_3$  di  $\mathbb{R}^3$  tale che

- $v_1$  è una base di  $U$ ,
- $v_1, v_2$  è una base di  $W$ .

**Esercizio 9.2.** Sia  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione  $n$  e sia  $W_1 \subset W_2 \subset \dots \subset W_n$  una successione di sottospazi di  $V$  tali che  $\dim W_i = i$ . Dimostrare che esiste una base  $v_1, \dots, v_n$  di  $V$  tale che per ogni  $i$ , i vettori  $v_1, \dots, v_i$  sono una base di  $W_i$ .

**Esercizio 9.3.** Siano  $U$  e  $W$  due spazi vettoriali di dimensione finita e sia  $V = U \times W$  lo spazio vettoriale descritto nell'esercizio 6.6. Dimostrare che  $\dim V = \dim U + \dim W$ .

**Esercizio 9.4.** Si dimostri che lo spazio vettoriale dei polinomi  $K[x]$  è uno spazio vettoriale di dimensione infinita, ovvero non ha una base.

## 10. MATRICI

**Esercizio 10.1.** Descrivere una base dello spazio vettoriale delle matrici  $2 \times 2$  a coefficienti reali.

**Esercizio 10.2.** Siano date le seguenti matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -8 & -5 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 7 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(1) Calcolare

$$L_A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad L_D \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad L_G \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- (2) Calcolare i prodotti  $A \cdot A$ ,  $B \cdot C$ .
- (3) Si può eseguire il prodotto  $A \cdot D$ ? E il prodotto  $D \cdot A$ ? calcolare quello dei due che si può eseguire.
- (4) Calcolare  $AB - BA$  e  $BC - CB$ .
- (5) Calcolare  $D \cdot G$  e  $G^2 + G = G \cdot G + G$ .
- (6) Calcolare  $A^{101}$ .
- (7) Calcolare  $H \cdot G$  e  $G \cdot H$ .
- (8) se  $M$  è una matrice  $m \times 3$  e  $N$  è una matrice  $3 \times n$  descrivere il prodotto  $H \cdot N$  e  $M \cdot H$ .

**Esercizio 10.3.** È vero che se  $A$  e  $B$  sono matrici  $2 \times 2$  e  $A \cdot B = 0$  allora  $A = 0$  o  $B = 0$ . Dimostrare che è vero o esibire un controesempio.

**Esercizio 10.4.** Siano  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  tali che  $ad - bc \neq 0$ . Si considerino le matrici

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Si dimostri che  $A \cdot B = B \cdot A = I_2$ .

**Esercizio 10.5.** (1) Si dimostri che se  $A$  è una matrice  $3 \times 2$  a coefficienti reali e non nulla, allora  $\text{Tr}(A \cdot A^t) > 0$ .

(2) Si dimostri che se  $A$  è una matrice  $m \times n$  a coefficienti reali e non nulla allora  $\text{Tr}(A \cdot A^t) > 0$ .

**Esercizio 10.6.** Si consideri la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Si calcoli  $\text{Tr}(A^{1001})$ .

**Definizione.** Una matrice quadrata  $A$  si dice simmetrica se è simmetrica rispetto alla diagonale ovvero se  $A^t = A$ . Si dice invece antisimmetrica se  $A^t = -A$ . Indichiamo con  $\text{Matsim}_n$  l'insieme delle matrici simmetriche  $n \times n$  e con  $\text{Matant}_n$  quello delle matrici antisimmetriche  $n \times n$ .

**Esercizio 10.7.** Si dimostri che  $\text{Matsim}_n$  è un sottospazio vettoriale di  $\text{Mat}_{n \times n}$ . Se ne determini una base nel caso di  $n = 2$ .

**Esercizio 10.8.** Si dimostri che  $\text{Matant}_n$  è un sottospazio vettoriale di  $\text{Mat}_{n \times n}$ . Se ne determini una base nel caso di  $n = 3$ .

**Esercizio 10.9.** Sia  $K = \mathbb{R}$  o  $K = \mathbb{C}$ .

- (1) Si determini  $\text{Matsim}_n \cap \text{Matant}_n$ .
- (2) Si determini  $\text{Matsim}_2 + \text{Matant}_2$ .
- (3) Si dimostri che  $\text{Matsim}_n + \text{Matant}_n = \text{Mat}_{n \times n}$ .

**Esercizio 10.10.** Sia  $A, B$  matrici  $\ell \times m$  a coefficienti in  $K$  e  $\lambda \in K$ . Si dimostri che

- (1)  $(A + B)^t = A^t + B^t$  e  $(\lambda A)^t = \lambda A^t$
- (2) Se inoltre  $\ell = m$  vale  $\text{Tr}(A + B) = \text{Tr}(A) + \text{Tr}(B)$  e  $\text{Tr}(\lambda A) = \lambda \text{Tr}(A)$ .

[Se trovare questo esercizio ostico provate a farlo per matrici  $2 \times 2$ ]

**Esercizio 10.11.** Sia  $A$  una matrice  $m \times h$  e  $B$  una matrice  $h \times n$ . Si dimostri che

- (1)  $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$ .
- (2) Se inoltre  $m = n$  vale  $\text{Tr}(A \cdot B) = \text{Tr}(B \cdot A)$ .

**Esercizio 10.12.** Sia data la matrice a coefficienti complessi:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

e supponiamo che esista una matrice  $2 \times 2$ ,  $B$  tale che  $A \cdot B = I_2$ . Si dimostri che  $ad - bc \neq 0$  e che  $B$  è uguale alla matrice scritta nell'esercizio 10.4

**Esercizio 10.13.** Sia  $A$  una matrice  $m \times m$  invertibile. Dimostrare che  $A^t$  è invertibile e che  $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$ .

**Esercizio 10.14.** Siano  $A$  e  $B$  due matrici  $m \times m$  invertibili. Dimostrare che  $AB$  è invertibile e che  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .

**Esercizio 10.15.** Sia

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}$$

e sia  $B$  una matrice  $3 \times m$  e  $C$  una matrice  $m \times 3$ . Calcolare  $A \cdot B$  e  $C \cdot A$ . [Obiettivo dell'esercizio è capire che in questo caso il risultato è molto facile da descrivere. Se si hanno dei dubbi provare con  $m = 2$  e  $B$  e  $C$  matrici concrete a vostra scelta per iniziare a farsi un'idea.]

**Definizione.** Una matrice quadrata  $\ell \times \ell$ ,  $A = (a_{ij})$  si dice diagonale se tutte le entrate fuori dalla diagonale sono zero. Un esempio tipico è la matrice  $A$  dell'esercizio precedente.

Una matrice quadrata  $\ell \times \ell$ ,  $A = (a_{ij})$  si dice triangolare superiore se tutte le entrate sotto la diagonale sono zero. Un esempio tipico è la matrice  $A$  dell'esercizio 8.2 o dell'esercizio 8.6

**Esercizio 10.16.** Dimostrare che il prodotto di due matrici triangolari è triangolare. [Se si ha poca dimestichezza con gli indici fare il caso di matrici  $3 \times 3$ .]

## 11. APPLICAZIONI LINEARI

**Esercizio 11.1.** Quali delle seguenti applicazioni da  $\mathbb{R}^3$  a  $\mathbb{R}^2$  è una applicazione lineare?

$$\begin{aligned} f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3z + y \\ 5y \end{pmatrix} & g \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 + z \\ x \end{pmatrix} & h \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x + y + z \\ 1 \end{pmatrix} & k \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ x - y \end{pmatrix} \\ a \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} e^x \\ 0 \end{pmatrix} & b \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} e^x - e^y \\ z + x \end{pmatrix} & c \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ x^2 \end{pmatrix} & d \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} |x| \\ |y| \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**Esercizio 11.2.** Sia  $V = \mathbb{C}[t]$  e siano  $G : V \rightarrow V$ ,  $G : V \rightarrow \mathbb{C}^3$  e  $H : \mathbb{C}^3 \rightarrow V$  definite nel modo seguente:

$$F(p(t)) = (t^2 - 5t)p(t) \quad G(p(t)) = \begin{pmatrix} p(1) \\ p(3) \\ p(7) \end{pmatrix} \quad H \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x(t-1) + y(t-3) + z(t-7) + (t-8)$$

- (1) dire quali tra  $F, G, H$  sono lineari.
- (2) dire quali tra  $F, G, H$  sono iniettive?
- (3) dire quali tra  $F, G, H$  sono surgettive?
- (4) Determinare  $G \circ H$  e  $F \circ H$ .

**Esercizio 11.3.** Sia  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  l'applicazione lineare definita da

$$F \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + y + z \\ 2x + y \\ x + z \\ x + y - z \end{pmatrix}$$

- (1) Si determini una matrice  $A$  tale che  $F = L_A$ ;
- (2) Si dica quali dei seguenti punti sono nel nucleo:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- (3) Si dica quali dei seguenti punti sono nell'immagine:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

**Esercizio 11.4.** Si consideri il piano  $W$  di equazione  $x + y + 3z = 0$  in  $\mathbb{R}^3$ . Si descriva  $W$  come nucleo di una applicazione lineare  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  e come immagine di una applicazione lineare  $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . [La seconda parte dell'esercizio potrebbe risultare un po' più difficile della prima.]

**Esercizio 11.5.** Si consideri la retta  $W$  di  $\mathbb{R}^3$  passante per l'origine e per il punto  $(1, 2, 3)$ . Si descriva  $W$  come immagine di una applicazione lineare  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  e come nucleo di una applicazione lineare  $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . [La seconda parte dell'esercizio potrebbe risultare un po' più difficile della prima.]

**Esercizio 11.6.** Sia  $F : \mathbb{C}[t] \rightarrow \mathbb{C}[t]$  l'applicazione lineare definita da  $F(f) = f'$  la derivata rispetto a  $t$  di  $f$ . Si determini il nucleo e l'immagine.

**Esercizio 11.7.** Sia  $V = \mathbb{C}[t]_{\leq 3}$  e sia  $F : V \rightarrow V$  definita da  $F(p(t)) = p'(t) + p(t+1)$ . Si verifichi che è una applicazione lineare e si calcoli la matrice associata a  $F$  rispetto alla base standard di  $V$  in partenza e in arrivo.

**Esercizio 11.8.** Sia  $F$  la rotazione di  $\mathbb{R}^2$  in senso antiorario di centro l'origine e angolo  $\theta$ . Si scriva la matrice associata  $F$  rispetto alla base standard.

**Esercizio 11.9.** Sia  $P : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la proiezione ortogonale di  $\mathbb{R}^3$  sul piano di equazione  $x + y + z = 0$ . Si dimostri che  $P$  è lineare e si scriva la matrice associata a  $P$  rispetto alla base standard.

**Esercizio 11.10.** Sia  $V = \text{Mat}_{2 \times 3}$  e  $W = \text{Mat}_{2 \times 2}$ . Sia inoltre

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Sia  $R_A : V \rightarrow W$  l'applicazione definita da  $R_A(X) = X \cdot A$ . Si dimostri che  $R_A$  è lineare e se ne calcoli la matrice associata rispetto alla basi standard in arrivo e in partenza.

**Esercizio 11.11.** Sia  $W$  il piano di  $\mathbb{R}^3$  definito da  $x + y - 2z = 0$  e sia  $F : W \rightarrow \mathbb{R}^2$  l'applicazione definita da

$$F \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 3z \\ x - y \end{pmatrix} \quad \text{per ogni} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in W$$

Si scelga una base di  $W$  e si scriva la matrice associata a  $F$  rispetto a questa base in partenza e alla base standard in arrivo.

**Esercizio 11.12.** Sia  $F : V \rightarrow W$  una applicazione lineare e siano  $v_1, \dots, v_n \in V$ . Si dimostri che

- (1) se  $F$  è iniettiva e  $v_1, \dots, v_n$  sono linearmente indipendenti allora anche  $F(v_1), \dots, F(v_n)$  sono linearmente indipendenti.
- (2) se  $F$  è surgettiva e  $v_1, \dots, v_n$  sono generatori allora  $F(v_1), \dots, F(v_n)$  sono generatori.
- (3) se  $F$  è bigettiva e  $v_1, \dots, v_n$  è una base, allora  $F(v_1), \dots, F(v_n)$  sono una base.

**Esercizio 11.13** (Compito luglio 2017). Sia  $W$  il sottospazio di  $\mathbb{R}^3$  definito dall'equazione  $2x + z = 0$ , sia  $E$  lo spazio vettoriale delle matrici  $2 \times 2$  e sia  $T : W \rightarrow E$  l'applicazione lineare definita da

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x + 2z \end{pmatrix} \quad \text{per ogni} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in W.$$

Sia inoltre  $S : \mathbb{R}^3 \rightarrow E$  l'applicazione lineare definita da

$$S \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{per ogni} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in W \quad \text{e} \quad S \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) scegliere una base di  $W$  e una di  $E$  e scrivere la matrice associata a  $T$  rispetto a queste basi.
- b) scrivere la matrice associata ad  $S$  rispetto alla basi standard di  $\mathbb{R}^3$  ed  $E$ .

**Esercizio 11.14** (Compitino febbraio 2017). Sia  $W$  il sottospazio di  $\mathbb{R}^3$  definito dall'equazione  $x + y + z = 0$  e sia  $V$  il sottospazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 3 che si annullano in 1:  $V = \{p(t) \in \mathbb{R}[t]_{\leq 3} : p(1) = 0\}$ . Sia  $F : W \rightarrow V$  l'applicazione lineare definita da

$$F \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x + 2yt + zt^2 + (x+z)t^3$$

(per esempio  $F(1, -1, 0)$  è il polinomio  $1 - 2t + t^3$ )

- a) Si scelga una base di  $W$  e una di  $V$  e si scriva la matrice associata a  $F$  rispetto a queste basi.

b) Sia  $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}[t]_{\leq 3}$  l'applicazione lineare tale che

$$G \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 + t \quad \text{e} \quad G \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{se} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in W.$$

Scrivere la matrice associata a  $G$  rispetto alle basi standard di  $\mathbb{R}^3$  e  $\mathbb{R}[t]_{\leq 3}$ .

**Esercizio 11.15.** Sia data la seguente matrice  $2 \times 2$ :

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

- (1) si determini un vettore non nullo  $v_1$  di  $\mathbb{R}^2$  tale che  $L_M(v_1) = 2v_1$ ;
- (2) si determini un vettore non nullo  $v_2$  di  $\mathbb{R}^2$  tale che  $L_M(v_2) = 3v_2$ ;
- (3) si calcoli  $M^{100}$ .

**Esercizio 11.16** (Compito 5 giugno 2017). Sia  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'applicazione lineare che ha come matrice associata rispetto alla base canonica la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- a) Dire se esistono due basi  $u_1, u_2, u_3$  e  $v_1, v_2, v_3$  di  $\mathbb{R}^3$  tale che  $[F]_{v_1, v_2, v_3}^{u_1, u_2, u_3}$  è diagonale.
- b) Dire se esiste una base  $v_1, v_2, v_3$  di  $\mathbb{R}^3$  tale che  $[F]_{v_1, v_2, v_3}^{e_1, e_2, e_3}$  è diagonale.

**Esercizio 11.17.** Esiste una applicazione lineare da  $\mathbb{R}^5$  a  $\mathbb{R}^2$  iniettiva? e una surgettiva?

**Esercizio 11.18** (Compitino febbraio 2017). a) Si enunci il teorema della dimensione.  
b) Esistono due applicazioni lineari

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

tali che la loro composizione  $g \circ f$  sia iniettiva? Motivare la risposta.

**Esercizio 11.19.** Siano  $F : U \rightarrow V$  e  $G : V \rightarrow W$  due applicazioni lineari. Si dimostri che  $\text{rango } G \circ F \leq \text{rango } F$  e che  $\text{rango } G \circ F \leq \text{rango } G$ .

## 12. CONSEGNA DEL 9 DICEMBRE

Le avvertenze sono le stesse della consegna precedente. Per chi vuole, ma siete consigliati di farlo, venerdì 9 dicembre potete consegnare alcuni esercizi che vi saranno corretti.

Potete consegnare il **primo esercizio e al massimo altri due esercizi** tra gli ultimi tre.

Ripeto: questi esercizi non avranno nessun peso sull'esame finale, se non vi fidate potete anche mettere un nome falso, serve solo per rintracciare il compito al momento della consegna. Potete collaborare, ma non ha nessun senso consegnare degli esercizi copiati integralmente da un'altra persona o di cui non abbiate capito la soluzione. Non saranno corretti esercizi scritti in modo illeggibile: questa è una regola che vale anche per i compiti e i compitini. In questo caso, visto che avete tutto il tempo, ci aspettiamo consegnate una versione in bella degli esercizi e senza troppe cancellature.

**Esercizio 12.1.** a) Dare la definizione di vettori linearmente indipendenti.

- b) Fare un esempio di tre vettori  $u, v, w$  in  $\mathbb{R}^3$  tali che presi a coppie siano linearmente indipendenti (ovvero che  $u, v$  siano linearmente indipendenti,  $u, w$  siano linearmente indipendenti, e che  $v, w$  siano linearmente indipendenti) ma che  $u, v, w$  siano linearmente dipendenti
- c) Siano  $u, v, w$  elementi di uno spazio vettoriale. Supponiamo che  $u$  e  $v$  siano linearmente indipendenti. Dimostrare che se  $u, v, w$  sono linearmente dipendenti allora  $w \in \langle u, v \rangle$ .

**Esercizio 12.2.** Sia  $A$  la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si determini una base di  $N(L_A)$ .

**Esercizio 12.3.** Sia  $E$  lo spazio vettoriale delle matrici  $2 \times 2$  a coefficienti complessi nella variabile  $t$ . Sia  $V$  lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti complessi di grado minore o uguale a 2. Sia  $U$  il sottospazio di  $V$  dei polinomi di che si annullano in 1. Sia  $F : U \rightarrow E$  la seguente applicazione lineare:

$$F(p(t)) = \begin{pmatrix} p(0) & p(2) \\ p(-1) & p(-2) \end{pmatrix}.$$

Sia  $G : U \rightarrow E$  l'applicazione lineare tale che

$$G(p(t)) = F(p(t)) \quad \text{per ogni } p \in U \quad \text{e} \quad G(1+t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Si determini una base di  $U$  e si scriva la matrice associata a  $F$  rispetto a questa base in partenza e alla base standard in arrivo.
- Quanto fa  $G(t)$ ?
- Calcolare la matrice associata a  $G$  rispetto alle basi standard in partenza e in arrivo.

**Esercizio 12.4.** Si consideri il seguente sistema lineare al variare del parametro  $c \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 6x_4 = 13 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 = c^2 + 4 \\ x_2 + 3x_3 + x_4 = c^2 \\ x_1 + 2x_3 + 3x_4 = 7 \end{cases}$$

- calcolare il rango della matrice associata al sistema
- per quali  $c$  il sistema ha soluzione? e quando ha soluzione, quante soluzioni ha?

### 13. SISTEMI LINEARI

**Esercizio 13.1.** Si consideri il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} 2x_2 + 2x_3 + 6x_4 + x_5 = 7 \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 + 11x_4 = 4 \\ x_1 + 3x_3 + 4x_4 + x_5 = 4 \end{cases}$$

- Ridurre il sistema a scalini.
- Calcolare il rango della matrice
- Descrivere le soluzioni del sistema

**Esercizio 13.2.** Sia  $A$  la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Si determini una base di  $N(L_A)$ .

**Esercizio 13.3.** Si calcoli l'inversa, se esiste, delle seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -5 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 11 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

**Esercizio 13.4.** Si considerino i seguenti vettori in  $\mathbb{R}^3$ :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Sia  $W = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ . Si determini una base di  $W$ , e si calcoli la dimensione di  $W$  e si descriva  $W$  tramite equazioni. Dire tra i seguenti vettori quali stanno in  $W$ :

$$w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3/2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad w_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Per i vettori  $w_i$  che stanno in  $W$  si determinino le coordinate rispetto alla base scelta

**Esercizio 13.5.** Si considerino i seguenti vettori in  $\mathbb{C}^5$ :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Sia  $W = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$ . Si determini una base di  $W$ , e si calcoli la dimensione di  $W$  e si descriva  $W$  tramite equazioni. Dire tra i seguenti vettori quali stanno in  $W$ :

$$w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad w_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad w_3 = \begin{pmatrix} -1+i \\ 2i+1 \\ -1 \\ 1+i \\ 2i \end{pmatrix}$$

**Esercizio 13.6** (Comptino febbraio 2016). Sia  $V$  lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a 2. Al variare del parametro reale  $k$  si consideri l'applicazione lineare  $L_k : V \rightarrow V$  definita da

$$L_k(p(t)) = p(t+1) - kp(t)$$

per ogni polinomio  $p(t)$ .

- Si scelga una base di  $V$  e si determini la matrice associata ad  $L_k$  rispetto a tale base;
- Si determini il rango di  $L_k$  al variare del parametro  $k$ ;
- Sia  $f(t)$  il polinomio  $f(t) = t^2 + 1$  si determini al variare di  $k$  se esistono polinomi  $p(t)$  tali che  $L_k(p(t)) = f(t)$ .

#### 14. DETERMINANTI

**Esercizio 14.1.** Calcolare il determinante delle seguenti matrici, riducendole a scalini:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 3 & 5 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 7 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

**Esercizio 14.2.** Calcolare il determinante delle seguenti matrici applicando la formula di Laplace

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

**Esercizio 14.3.** Sia  $V = \mathbb{C}[t]_{\leq n-1}$  lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a  $n-1$  e siano  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ . Si consideri la seguente applicazione lineare  $F : V \rightarrow \mathbb{C}^n$

$$F(p(t)) = (p(\lambda_1), p(\lambda_2), \dots, p(\lambda_n))$$

Si dimostri che è iniettiva se e solo se i numeri  $\lambda_i$  sono distinti. Se ne deduca che

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{n-2} & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^{n-2} & \lambda_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \lambda_i & \lambda_i^2 & \dots & \lambda_i^{n-2} & \lambda_i^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \dots & \lambda_n^{n-2} & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} = 0$$

se e solo se due dei numeri  $\lambda_i$  sono uguali.

**Esercizio 14.4** (I compitino 2016). Sia  $B$  la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Sia  $E = \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  lo spazio vettoriale delle matrici  $2 \times 2$  a coefficienti reali. Sia  $T : E \rightarrow E$  l'applicazione definita da  $T(X) = B \cdot X$ . Si calcoli il determinante di  $T$ .

**Esercizio 14.5.** Sia  $M$  la matrice a blocchi:

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

con  $A$  matrice  $p \times p$ ,  $D$  matrice  $q \times q$  e  $B$  matrice  $p \times q$ . Dimostrare che  $\det M = \det A \cdot \det D$  seguendo i seguenti passi:

- (1) Dimostrare che se  $A$  non è invertibile allora non lo è neppure  $M$  e quindi  $\det M = 0$ ;
- (2) Se  $A$  è invertibile dimostrare che

$$M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A^{-1}B \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

e applicare il teorema di Binet.

- (3) Calcolare i determinanti delle tre matrici che compaiono nella formula precedente.

## 15. DESCRIZIONE DI SOTTOSPAZI, SOMMA E INTERSEZIONE DI SOTTOSPAZI

**Esercizio 15.1.** Sia  $W$  il sottospazio di  $\mathbb{R}^4$  descritto dalle equazioni:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \quad x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0.$$

Descrivere  $W$  in forma parametrica.

**Esercizio 15.2.** Sia  $W$  il sottospazio di  $\mathbb{R}^5$  generato dai vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

si descriva  $W$  in forma parametrica e in forma cartesiana.

**Esercizio 15.3.** Sia  $W$  il sottospazio di  $\mathbb{R}^3$  il sottospazio descritto dalla parametrizzazione  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$F \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3s + t \\ t - s \\ 2t + 3s \end{pmatrix}$$

- (1) si verifichi che  $F$  è una parametrizzazione (cioè che  $F$  è iniettiva);
- (2) si determini una base di  $W$ ;
- (3) si descriva  $W$  in forma cartesiana.

**Esercizio 15.4.** Sia  $A$  la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 8 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

si descrivano  $\text{Im } L_A$  e  $N(L_A)$  in forma parametrica e in forma cartesiana.

**Esercizio 15.5** (I compitino 2015-2016). Siano  $U$  e  $W$  due sottospazi vettoriali di  $\mathbb{R}^8$ . Sia  $\dim U = 3$  e  $\dim W = 5$ . Quale delle seguenti affermazioni è sicuramente vera?

- A)  $\dim(U + W) = 8$  qualsiasi siano  $U$  e  $W$ .
- B)  $\dim(U \cap W) = 2$  qualsiasi siano  $U$  e  $W$ .
- C) Se  $U \cap W$  è diverso da zero allora  $\dim(U + W) = 8$ .
- D) Se  $\dim(U \cap W) = 3$  allora  $U \subset W$ .
- E) Se  $\dim U + W = 8$  allora  $\dim(U \cap W) = 3$ .

**Esercizio 15.6** (Compito luglio 2017). Sia  $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^5$  una applicazione lineare con  $\dim N(T) = 1$  e sia  $W$  un sottospazio di  $\mathbb{R}^5$  di dimensione 4



- a) dimostrare che  $W \cap \text{Im}(T) \neq 0$ ;  
 b) quali sono le possibili dimensioni di  $W \cap \text{Im}(T) \neq 0$ ? motivare la risposta

**Esercizio 15.7** (Compito 6 giugno 2016). Siano  $V$  e  $W$  due sottospazi di dimensione 3 di  $\mathbb{R}^4$ . Quali sono le possibili dimensioni del sottospazio  $V \cap W$ ? Motiva la risposta in modo completo.

**Esercizio 15.8.** Siano  $U$  e  $W$  due sottospazi di  $V$ . Si dimostri che se  $U \cup W$  è un sottospazio allora  $U \subset W$  o  $W \subset U$ .

**Esercizio 15.9.** Siano  $U, V, W$  dei sottospazi dello spazio vettoriale  $E$  in somma diretta. Sia  $u_1, \dots, u_a$  una base di  $U$ ,  $v_1, \dots, v_b$  una base di  $V$ ,  $w_1, \dots, w_c$  una base di  $W$ . Dimostrare che  $u_1, \dots, u_a, v_1, \dots, v_b, w_1, \dots, w_c$  è una base di  $U + V + W$ . [La dimostrazione è del tutto analoga a quella fatta in classe nel caso di due soli sottospazi]

**Esercizio 15.10.** Sia  $W = \{x \in \mathbb{C}^5 : x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0\}$ . Si trovino tre sottospazi  $X$  e  $Y$  e  $Z$  diversi da zero, di  $W$  tali che  $W = X \oplus Y \oplus Z$ .

**Esercizio 15.11.** Sia  $V = \mathbb{R}^4$  e sia  $X, Y, Z$  dei sottospazi di dimensione 3 di  $V$ . Sia  $a = \dim X \cap Y$ ,  $b = \dim X \cap Z$ ,  $c = \dim Y \cap Z$  e  $d = \dim X \cap Y \cap Z$ .

- (1) si dimostri che  $a = 2$  o  $3$ ;
- (2) si dimostri che non può essere  $d = 0$ ;
- (3) di esibiscano  $X, Y, Z$  tali che  $d = 2$ ;
- (4) di esibiscano  $X, Y, Z$  tali che  $d = 1$ ;
- (5) si descrivano tutte le quadruple  $(a, b, c, d)$  che si possono ottenere al variare di  $X, Y, Z$ .

**Esercizio 15.12** (Compitino di algebra lineare del 26 febbraio 2018). Sia  $U$  il sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^4$  generato dai vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sia  $V$  il sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^4$  delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 4x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 11x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

- a) Calcolare la dimensione di  $U$  e  $V$ .
- b) Calcolare la dimensione di  $U + V$  e  $U \cap V$ .

**Esercizio 15.13.** Si considerino i seguenti vettori di  $\mathbb{R}^5$ :

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad w_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Sia  $U$  il sottospazio di  $\mathbb{R}^5$  generato da  $u_1, u_2, u_3$  e  $W$  il sottospazio generato da  $w_1, w_2, w_3$ .

- (1) Si descriva una base di  $U + W$ ;
- (2) Si descriva una base di  $U \cap W$ ;
- (3) Si descriva  $U + W$  in forma cartesiana;
- (4) Si descriva  $U \cap W$  in forma cartesiana.

## 16. AUTOVALORI, AUTOVETTORI E DIAGONALIZZABILITÀ

**Esercizio 16.1.** Sia  $V$  uno spazio vettoriale complesso. Sia  $F : V \rightarrow V$  una applicazione lineare tale che  $F^4 = Id$ . Si dimostri che se  $\lambda$  è un autovalore di  $F$  allora  $\lambda^4 = 1$

**Esercizio 16.2.** Sia  $F : V \rightarrow V$  una applicazione lineare e sia  $\sqrt{2}$  un autovalore di  $F$ . Si dimostri che  $6$  è un autovalore di  $F^4 + F^2$ .

**Esercizio 16.3.** Si calcolino gli autovalori delle applicazioni  $L_A$  associate alle seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Esercizio 16.4.** Sia  $F : V \rightarrow V$  una applicazione diagonalizzabile. Si dimostri che  $F^2$  è diagonalizzabile e che  $2F$  è diagonalizzabile.

**Esercizio 16.5.** Sia  $A$  una matrice  $5 \times 5$  triangolare superiore che ha lungo la diagonale tutte le entrate uguali a 2. Si dimostri che  $A$  è diagonalizzabile se e solo se  $A = 2I$ .

**Esercizio 16.6.** Si calcoli  $A^{100}$  per

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

**Esercizio 16.7** (Compito 9 gennaio 2017). Sia  $V$  uno spazio vettoriale sui numeri complessi di dimensione finita e sia  $F : V \rightarrow V$  una applicazione lineare.

- Sia  $\lambda$  un autovalore di  $F$ . Si dia la definizione di molteplicità geometrica e molteplicità algebrica di  $\lambda$  rispetto a  $F$ .
- Supponiamo che  $\dim V = 4$ . Si dimostri che se la molteplicità geometrica di 2 è uguale a 4 allora  $F = 2Id$ .

**Esercizio 16.8.** Sia  $V$  uno spazio vettoriale e sia  $F : V \rightarrow V$  tale che  $F^2 = F$ . Dimostrare che  $F$  è diagonalizzabile. [Dimostrare che  $V_0 \oplus V_1 = V$  direttamente]

**Esercizio 16.9** (I compitino 2017). Sia  $A$  la matrice  $13 \times 13$  con tutte le entrate uguali a 1.

- Si determini una base del nucleo di  $L_A$ .
- Si determini un autovettore con autovalore diverso da zero (si provi ad indovinare!).
- Si determini una base di autovettori per  $L_A$  e si calcoli il polinomio caratteristico di  $L_A$ .

**Esercizio 16.10.** Sia  $V = \mathbb{C}[x]_{\leq 2}$  lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 2 a coefficienti complessi. Si consideri l'applicazione lineare  $F : V \rightarrow V$  definita nel seguente modo:

$$F(p(x)) = p(0)x^2 + p'(x)$$

- Si determinino gli autovalori di  $F$ .
- Si determini una base di autovettori.
- Si calcoli  $F^{15}$ .

**Esercizio 16.11.** Costruisci una matrice  $A$  di taglia  $3 \times 3$  tale che l'applicazione  $L_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  soddisfi entrambe le proprietà seguenti:

- l'immagine di  $L_A$  è il piano definito da  $x + y = 0$ ;
- l'endomorfismo  $L_A$  non è diagonalizzabile.

**Esercizio 16.12** (II compitino 2016). Determinare per quali valori  $t \in \mathbb{R}$  la matrice seguente è diagonalizzabile:

$$\begin{pmatrix} t-1 & 2t & t \\ 0 & t-1 & 0 \\ 2 & t+2 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Esercizio 16.13.** Sia  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione finita, sia  $F : V \rightarrow V$  e sia  $\lambda$  un autovalore di  $F$ . Si dimostri che  $ma_\lambda \geq mg_\lambda$ . [Si utilizzi l'esercizio 14.5]

## 17. CONSEGNA DEL 16 GENNAIO

Le avvertenze sono le stesse della consegna precedente. Per chi vuole lunedì 16 gennaio, in luogo e orario che saprete quando sarà possibile prenotare un'aula, potete consegnare al **massimo tre esercizi** che vi saranno corretti.

Ripeto: questi esercizi non avranno nessun peso sull'esame finale, se non vi fidate potete anche mettere un nome falso, serve solo per rintracciare il compito al momento della consegna. Potete collaborare, ma non ha nessun senso consegnare degli esercizi copiati integralmente da un'altra persona o di cui non abbiate capito la soluzione. Non saranno corretti esercizi scritti in modo illeggibile: questa è una regola che vale anche per i compiti e i compitini. In questo caso, visto che avete tutto il tempo, ci aspettiamo consegnate una versione in bella degli esercizi e senza troppe cancellature.

**Esercizio 17.1.** Si calcoli  $A^{100}$  per

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

**Esercizio 17.2.** Sia  $E = \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{C})$ . Sia  $A$  la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

e sia  $F : E \rightarrow E$  l'applicazione lineare definita da  $F(X) = AX - XA$ . Si determini una base di  $\text{Im}(F) \cap N(F)$ .

**Esercizio 17.3** (Compitino di algebra lineare del 26 febbraio 2018). Sia  $U$  il sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^5$  generato dai vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sia  $W$  il sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^4$  delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

- Calcolare la dimensione di  $U$  e  $W$ .
- Calcolare la dimensione di  $U + W$  e  $U \cap W$ .
- Trovare una base di  $U + W$  e di  $U \cap W$ .

**Esercizio 17.4.** Sia  $V = \mathbb{R}[t]_{\leq 4}$  lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 4. Sia

$$U = \text{Span}\{e_3 - 2e_2, e_3 - e_2 - e_1, \}$$

e sia

$$W = \{f \in V : f(0) = f(1) = f(2) = 0\}$$

Calcolare le dimensioni di  $U$ ,  $W$ ,  $U \cap W$  e  $U + W$ .

**Esercizio 17.5.** Sia  $V = \mathbb{C}[t]_{\leq n-1}$  lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a  $n-1$  e siano  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ . Si consideri la seguente applicazione lineare  $F : V \rightarrow \mathbb{C}^n$

$$F(p(t)) = (p(\lambda_1), p(\lambda_2), \dots, p(\lambda_n))$$

Si dimostri che è iniettiva se e solo se i numeri  $\lambda_i$  sono distinti. Se ne deduca che

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{n-2} & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^{n-2} & \lambda_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \lambda_i & \lambda_i^2 & \dots & \lambda_i^{n-2} & \lambda_i^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \dots & \lambda_n^{n-2} & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} = 0$$

se e solo se due dei numeri  $\lambda_i$  sono uguali.

**Esercizio 17.6** (Compito 9 gennaio 2017). Sia  $V$  uno spazio vettoriale sui numeri complessi di dimensione finita e sia  $F : V \rightarrow V$  una applicazione lineare.

- Sia  $\lambda$  un autovalore di  $F$ . Si dia la definizione di molteplicità geometrica e molteplicità algebrica di  $\lambda$  rispetto a  $F$ .
- Supponiamo che  $\dim V = 4$ . Si dimostri che se la molteplicità geometrica di 2 è uguale a 4 allora  $F = 2Id$ .

**Esercizio 17.7.** Sia  $V$  uno spazio vettoriale e sia  $F : V \rightarrow V$  tale che  $F^2 = F$ . Dimostrare che  $F$  è diagonalizzabile. [Dimostrare che  $V_0 \oplus V_1 = V$  direttamente]