SPAZI VETTORIALI

Vogliamo ora introdurre una generalizzazione dello spazio $\mathbb{R}^3$ che abbiamo studiato. Questa generalizzazione è data dalla definizione di spazio vettoriale. Come abbiamo visto nel caso di $\mathbb{R}^3$, lo studio di molte proprietà geometriche si può ricondurre alle proprietà di 3 operazioni

- la somma $u+v$ con $u,v \in \mathbb{R}^3$
- il prodotto per scalare $\lambda \cdot u$ con $\lambda \in \mathbb{R}$ e $u \in \mathbb{R}^3$
- il prodotto scalare $u \cdot v$ con $u,v \in \mathbb{R}^3$

La definizione di spazio vettoriale fornisce una versione astratta delle proprietà che riguardano le prime due di queste operazioni (mentre la terza la riprenderete nel secondo semestre). Nel corso vedremo come da questa struttura relativamente semplice possiamo dedurre molte conseguenze interessanti anche nel caso di $\mathbb{R}^3$. Lavorare a questo livello di astrazione permette di trattare in modo uniforme e formalmente molto semplice delle situazioni molto diverse tra loro e che nei casi concreti possono avere un aspetto perlomeno notazionalmente complicato. In altre parole quella di spazio vettoriale è una definizione molto azzeccata che sembra cogliere in un modo ottimale l'aspetto essenziale di alcuni problemi. Al primo

impatto questa definizione astratta può disorientare.
Il mio consiglio è di tenere sempre ben presente gli esempi che faremo.

DEFINIZIONE (Spazio vettoriale)

Sia K un campo. Uno spazio vettoriale su K è il dato di

- un insieme V
- una operazione $\underset{V}{+}$ detta somma che dati due elementi $u, v \in V$ determina un terzo elemento $u \underset{V}{+} v$ di V
- una operazione $\underset{V}{\cdot}$ detta prodotto per scalare che dati un elemento $\lambda \in K$ e un elemento $v \in V$ determina un nuovo elemento $\lambda \underset{V}{\cdot} v$ di V
- un elemento $0_V \in V$ detto lo zero

che soddisfano le seguenti proprietà:

P① COMMUTATIVA

$$\forall u, v \in V \qquad u \underset{V}{+} v = v \underset{V}{+} u$$

P② ASSOCIATIVA

$$\forall u, v, w \in V \qquad (u \underset{V}{+} v) \underset{V}{+} w = u \underset{V}{+} (v \underset{V}{+} w)$$

$$\forall \lambda, \mu \in K \text{ e } \forall v \in V \qquad (\lambda\mu) \underset{V}{\cdot} v = \lambda \underset{V}{\cdot} (\mu \underset{V}{\cdot} v)$$

P③ ELEMENTO NEUTRO

$$\forall v \in V \qquad 0_V \underset{V}{+} v = v \underset{V}{+} 0_V = v$$

$$\forall v \in V \qquad 1 \underset{V}{\cdot} v = v$$

P④ OPPOSTO

$$\forall v \in V \quad \exists_1\, u \in V \quad \text{tale che} \quad u \underset{V}{+} v = 0_V$$

P⑤ DISTRIBUTIVA

$$\forall \lambda \in K \quad \forall u, v \in V \qquad \lambda \underset{V}{\cdot} (u \underset{V}{+} v) = \lambda \underset{V}{\cdot} u + \lambda \underset{V}{\cdot} v$$

$$\forall \lambda, \mu \in K \quad \forall v \in V \qquad (\lambda + \mu) \underset{V}{\cdot} v = \lambda \underset{V}{\cdot} v + \mu \underset{V}{\cdot} v$$

Esempi (tutti molto importanti)

① $V = \mathbb{R}^3$ con le somme e il prodotto per scalare definiti nelle lezioni precedenti è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$

② Una generalizzazione dell'esempio precedente è la seguente. Sia $V = K^n = \{ (x_1, \dots, x_n) : x_i \in K \}$
Definiamo

$$(x_1, \dots, x_n) \underset{V}{+} (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1; \dots; x_n + y_n)$$

$$\lambda \underset{V}{\cdot} (x_1, \dots, x_n) = (\lambda \cdot x_1; \dots; \lambda \cdot x_n)$$

$$0_V = (0, \dots, 0)$$

Esempio per $n = 5$ $\quad K = \mathbb{R}$

$$(1, 2, -1, 0, 1) \underset{V}{+} (3, 2, 1, \pi, -1+e) =$$
$$= (4, 5, 0, \pi, e)$$

$$2 \underset{V}{\cdot} (1, 3, 1/4, \pi, -1) =$$

mentre per $n = 2$ $\quad K = \mathbb{C}$

$$(1-i, 1+i) + (1, -1) = (2-i, i)$$
$$(1+i) \cdot (1, i) = (1+i, -1+i)$$

La seguente proposizione generalizza alcune osservazioni che abbiamo fatto per $\mathbb{R}^3$.

PROPOSIZIONE $\underset{V}{+}, \underset{V}{\cdot}; 0_V$ verificano le proprietà P① – P⑤ elencate sopra quindi V è un K-spazio vettoriale

dim. Dobbiamo verificare le proprietà P① – P⑤ una per una. Questa verifica è un po' noiosa ma piuttosto semplice. Verifichiamo solo la P③ e la P⑤.

P③ • $0_V \underset{V}{+} v = v \quad \forall v \in V$. Infatti se $v = (x_1 - x_n)$

$$0_V \underset{V}{+} (x_1 \dots x_n) = (0 \dots 0) \underset{V}{+} (x_1 \dots x_n) =$$
$$= (0 + x_1, \dots, 0 + x_n) = (x_1 \dots x_n)$$

• $1 \underset{V}{\cdot} v = v \quad \forall v \in V$. Infatti se $v = (x_1 \dots x_n)$

$$1 \underset{V}{\cdot} (x_1 \dots x_n) = (1 \cdot x_1, \dots, 1 \cdot x_n) = (x_1 \dots x_n)$$

P⑤ $\forall v \in V \ \exists_1 \ u : u \underset{V}{+} v = 0_V$. Infatti se

$v = (x_1 \dots x_n)$ e $u = (y_1 \dots y_n)$ allora

$$u \underset{V}{+} v = (y_1 + x_1, \dots, y_n + x_n) = 0_V$$

se e solo se $y_1 = -x_1, \dots, y_n = -x_n$. Quindi u esiste ed è unico, come richiesto. $=$

NOTA: invece di scrivere gli elementi di K^n come righe $(x_1 \dots x_n)$ li possiamo scrivere anche come colonne.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

È comune riferirsi agli elementi di K^n scritti come righe come "vettori riga" e ai secondo come "vettore colonna". Come vedremo in seguito, in alcuni contesti, è utile scrivere gli elementi di K^n come colonne. Noi utilizzeremo entrambi i modi di rappresentare gli elementi di K^n.

③ Terzo esempio: le funzioni. Sia X un insieme e sia K un campo. Definiamo

$$W = \mathcal{F}(X, K) = \{ f : X \longrightarrow K \},$$

0_W è la funzione che vale sempre 0:

$$0_W(x) = 0 \quad \text{per ogni } x \in X$$

La somma è definita così: se $f, g \in V$ allora

$$(f +_W g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{per ogni } x \in X$$

e il prodotto per scalare è definito così: se $f \in V$ e $\lambda \in K$

$$(\lambda \cdot_W f)(x) = \lambda f(x) \quad \text{per ogni } x \in X$$

PROPOSIZIONE $+_W$, $\cdot_W$; 0_W verificano le proprietà P① – P⑤ elencate sopra quindi W è un K-spazio vettoriale

Esercizio: Completare la verifica che K^n è uno spazio vettoriale su K.

Esercizio: Completare la verifica che $\mathcal{F}(X, K)$ è uno spazio vettoriale su K.

Si consiglia di fare almeno uno degli esercizi precedenti.

NOTA: usualmente indicheremo 0_V, $+_V$, $\cdot_V$ con 0, $+$, $\cdot$. È comodo però avere entrambe le notazioni per le definizioni iniziali.

opposto e sottrazione. Se $u \in V$ sappiamo dalla proprietà P4 che esiste un unico v tale che $u + v = 0_V$. Indichiamo v con $-u$ e lo chiamiamo l'opposto di u.
Definiamo

$$w - u = w + (-u)$$

Osserviamo che $$(w+u) - u = w$$
infatti $$(w+u) - u = w + (u + (-u)) = w + 0_V = w.$$
Similmente $$(w-u) + u = w.$$

ALCUNE PROPRIETÀ ALGEBRICHE DEGLI SPAZI VETTORIALI

Dalle proprietà (P1), ..., (P5) è possibile dedurre le proprietà che siamo abituati ad utilizzare per $\mathbb{R}^3$. Facciamo qualche considerazione di questo tipo come esempio.

<u>Osservazione</u> Se $u, v, w \in V$ e $u+v = u+w$ allora $v = w$.

<u>dimost.</u> Se sommo $-u$ all'uguaglianza $u+v=u+w$ ottengo

$$-u+(u+v) = -u+(u+w) \quad \text{da cui}$$
$$(-u+u)+v = (-u+u)+w \quad \text{da cui}$$
$$0_V + v = 0_V + w \quad \text{da cui}$$
$$v = w$$

#

<u>Osservazione</u> Se V è uno spazio vettoriale su K allora

1) $0_K \cdot_V v = 0_V$ per ogni $v \in V$
2) $\lambda \cdot_V 0_V = 0_V$ per ogni $v \in V$

Prima di dedurre queste proprietà da (P1) ... (P5) osserviamo che per K^n queste proprietà sono immediate. Dimostriamo la 1) in generale.

<u>dim</u> 1) Sia $u = 0_K \cdot v$, osservo che

$$u+u = 0_K \cdot v + 0_K \cdot v = (0_K + 0_K)\cdot v = 0_K \cdot v = u = u + 0_V$$

applicando l'osservazione precedente ottengo $u = 0_V$ #

<u>Esercizio</u> Si dimostri il punto 2) ragionando in modo simile considerando l'elemento $u = \lambda \cdot 0_V$

SOTTOSPAZI VETTORIALI

Il concetto di sottospazio vettoriale generalizza quello di rette e piano passanti per l'origine.

<u>DEFINIZIONE</u> Sia V uno spazio vettoriale su K. Un sottospazio vettoriale di V è un sottoinsieme $W \subset V$ tale che

1) $0_V \in W$
2) se $u, v \in W$ allora $u+v \in W$
3) se $\lambda \in K$ e $u \in W$ allora $\lambda u \in W$.

<u>Esempi</u>

1. Le rette di $\mathbb{R}^3$ passanti per l'origine sono sottospazi vettoriali.
Verifichiamolo: sia $u \in \mathbb{R}^3$ e $u \neq 0$, e sia $W = \mathbb{R}u$ l'associata retta per l'origine.
Dobbiamo verificare le tre condizioni

che caratterizzano i sottospazi:

1) $0_V \in W$. Infatti $0_V = 0 \cdot u \in W$

2) Se $v, w \in W$ allora $v + w \in W$.
Infatti se $v = \lambda u$ e $w = \mu u$ allora
$$v + w = \lambda u + \mu u = (\lambda + \mu) u \in W$$

3) Se $v \in W$ e $\lambda \in K$ allora $\lambda v \in W$.
Infatti se $v = \mu u$ allora $\lambda v = (\lambda \mu) \cdot u \in W$.

(2) In $V = \mathbb{R}^2$ consideriamo la circonferenza W di centro $(0,0)$ e raggio 1. Osserviamo che $(0,0) \notin W$ e quindi W non è sottospazio vettoriale

(3) I piani di $\mathbb{R}^3$ passanti per l'origine sono sottospazi vettoriali.
Sia W il piano ortogonale alla retta $\mathbb{R}u$ e passante per l'origine. Quindi
$$W = \{ v \in \mathbb{R}^3 : \quad v \bullet u = 0 \}$$
Verifichiamo che W è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$:

1) $0 \in W$, infatti $0 \bullet u = 0$

2) Se $v, w \in W$ allora $v + w \in W$. Infatti
$$(v + w) \bullet u = v \bullet u + w \bullet u = 0 + 0 = 0$$

3) Se $v \in W$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ allora $\lambda v \in W$. Infatti
$$(\lambda v) \bullet u = \lambda (v \bullet u) = \lambda 0 = 0$$

4) Consideriamo $X = K = \mathbb{R}$ e lo spazio vettoriale $V = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \{ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \}$. In V possiamo considerare il sottoinsieme W dei polinomi. W è un sottospazio vettoriale di V, infatti

1) 0_V è il polinomio nullo e quindi appartiene a W
2) Se $f, g \in W$, ovvero se f e g sono polinomi anche $f+g$ è un polinomio
3) Se λ è un numero e f è un polinomio allora λf è un polinomio

5) In $\mathbb{R}^2 = V$ consideriamo i seguenti sottoinsiemi

a) $W_1 = \{ (x,y) : y = x^2 \}$

b) $W_2 = \{ (x,y) : y = 0 \text{ e } x \geq 0 \}$

c) $W_3 = \{ (x,y) : y^2 = 0 \}$

d) $W_4 = \{ (x,y) : xy = 0 \}$

W_1, W_2, W_4 non sono sottospazi mentre W_3 lo è.

- W_1: Per verificare che un sottoinsieme non è un sottospazio basta verificare che una delle tre proprietà che caratterizzano i sottospazi vettoriali non è verificata. Nel caso di W_1 scegliamo la seconda proprietà, quella relativa alla somma. Per dimostrare che questa proprietà non è verificata basta esibire due elementi $u, v \in W_1$ tali che $u + v \notin W_1$. Per esempio $u = (1,1)$ e $v = (-1, 1)$ sono elementi di W_1 ma $u + v = (0, 2) \notin W_1$

Esercizio Dimostrare che W_2 e W_4 non sono sottospazi vettoriali. (fare un disegno può aiutare a capire quale proprietà non è verificata)

Esercizio Dimostrare che W_3 è un sottospazio vettoriale.