GEOMETRIA DEL PIANO E DELLO SPAZIO

Richiameremo alcuni concetti di geometria del piano e dello spazio.

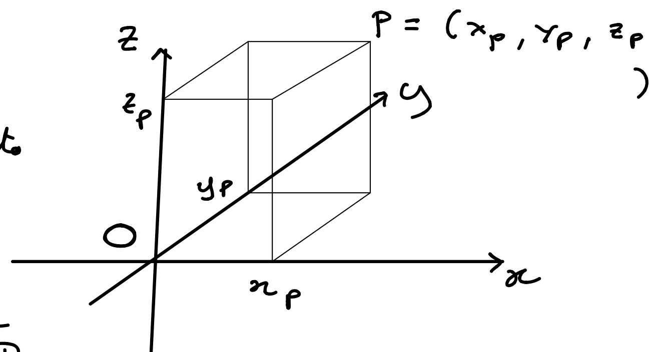
- somma e prodotto per scalare, rette, segmenti, punto medio e baricentro
- distanza e prodotto scalare, piani
- alcune proprietà di triangoli
- proiezioni ortogonali
- area di un triangolo
- prodotto vettoriale
- volume di un tetraedro

Rifarete tutti questi argomenti più in generale in seguito. Ritengo però utile affrontare prima questo caso più concreto per fornire un ponte con quello che già state facendo a fisica o che avete già fatto alle superiori e per creare un bagaglio di esempi che possa essere utile in seguito.

Per motivare le costruzioni e le definizioni che daremo, faremo utilizzo di alcuni risultati di geometria euclidea. Si tratterà di risultati molto intuitivi che perlomeno nel caso del piano avete visto alle superiori. Per chi ne sentisse il bisogno ho inserito delle note numerate ①, ②... nelle quali fornisco qualche dettaglio in più su questi aspetti.
Noi utilizzeremo la geometria euclidea per ricavare una descrizione più algebrica. Si può percorrere però il percorso inverso e partire da alcune costruzioni algebriche per fornire un modello della geometria euclidea. Questo è fatto in una appendice. Né note, né appendice fanno parte del programma d'esame.

Fissiamo una unità di lunghezza con la quale misurare le distanze e fissiamo nello spazio un'origine O e tre assi coordinati ortogonali tra loro e passanti per O. Su ogni asse fissiamo una direzione positiva e una negativa.

Se P è un punto dello spazio possiamo considerare le proiezioni di P (nota ①) sugli assi. In questo modo ogni punto è individuato dalle sue coordinate ovvero da una tripla di numeri (x_P, y_P, z_P).



Lo spazio sarà per noi, quindi l'insieme di queste triple ovvero $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

SOMMA E PRODOTTO PER SCALARE

Come per i numeri complessi possiamo definire una somma tra gli elementi di $\mathbb{R}^3$. Se (x, y, z) e (x', y', z') sono elementi di $\mathbb{R}^3$ definiamo:

$$(x, y, z) \oplus (x', y', z') = (x+x', y+y', z+z').$$

Per esempio

$$(1, 2, -3) \oplus (3, -4, 2) = (4, -2, -1)$$

Questa operazione gode di alcune semplici proprietà

A1 $\quad \forall P, Q \in \mathbb{R}^3 \qquad P \oplus Q = Q \oplus P$

A2 $\quad \forall P, Q, R \in \mathbb{R}^3 \qquad (P \oplus Q) \oplus R = P \oplus (Q \oplus R)$

A3 $\quad \forall P \in \mathbb{R}^3 \qquad P \oplus O = P$

A4 $\quad \forall P \in \mathbb{R}^3 \ \exists Q \in \mathbb{R}^3$ tale che $\quad P \oplus Q = O$

L'elemento Q di A4 si indica con $-P$.

Ho utilizzato il simbolo "$\oplus$" per distinguerlo dalla somma usuale di numeri ma in futuro lo indicheremo con $+$.
Non è invece possibile definire un prodotto tra elementi di $\mathbb{R}^3$ in modo che $\mathbb{R}^3$ sia un campo che contiene $\mathbb{R}$.
È però possibile definire il prodotto di un elemento di $\mathbb{R}^3$ per un numero reale. Per $\lambda \in \mathbb{R}$ e $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ definisco

$$\lambda \odot (x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$$

Valgono le seguenti proprietà $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\forall P, Q \in \mathbb{R}^3$

A5 $\qquad 1 \odot P = P$

A6 $\qquad \lambda \odot (\mu \odot P) = (\lambda\mu) \odot P$

A7 $\qquad (\lambda + \mu) \odot P = \lambda \odot P \oplus \mu \odot P$

A8 $\qquad \lambda \odot (P \oplus Q) = \lambda \odot P \oplus \lambda \odot Q$

In seguito indichiamo $\lambda \odot P$ con λP

Differenza

Se $P, Q \in \mathbb{R}^3$ la differenza $Q - P = Q + (-P)$ viene indicata spesso con $\overrightarrow{PQ}$ e chiamata il vettore da P a Q.

Esercizio

Sia $P = (1, 2, 3)$ $Q = (1, -1, 5)$ $R = (-2, 1, 1)$

Calcolare

1) $P + Q + 3R$
2) $P - Q + 2R$
3) $P + \overrightarrow{QR}$
4) $P + \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{PQ}$

DISTANZA

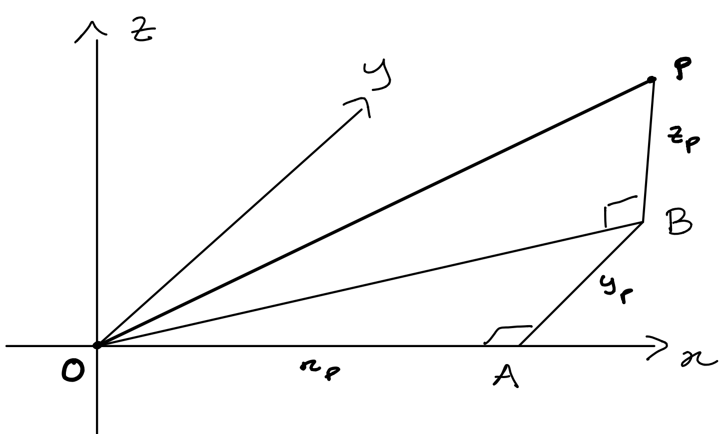
Vediamo ora come descrivere distanze e angoli.

Distanza

Se $P = (x_P, y_P, z_P)$ allora la distanza di P dall'origine

$$d(P, O) = \sqrt{x_P^2 + y_P^2 + z_P^2}$$

Infatti consideriamo la figura seguente



dove B è la proiezione di P sul piano xy

e A la proiezione di B sulla retta x

I triangoli OBP e OAB sono ortogonali. Quindi per il teorema di Pitagora otteniamo:

$$\mathrm{dist}(O,P)^2 = \mathrm{dist}(O,B)^2 + \mathrm{dist}(B,P)^2$$

$$= \mathrm{dist}(O,A)^2 + \mathrm{dist}(A,B)^2 + \mathrm{dist}(B,P)^2$$

ora osservo che $\mathrm{dist}(O,A)^2 = x_P^2$ $\quad \mathrm{dist}(A,B)^2 = y_P^2$

$\mathrm{dist}(B,P)^2 = z_P^2$ quindi

$$\mathrm{dist}(O,P)^2 = x_P^2 + y_P^2 + z_P^2$$

<u>NOTAZIONE</u> Se $P \in \mathbb{R}^3$ la distanza di P dall'origine si indica con $\|P\|$ e si chiama il modulo o la norma di P.

<u>OSSERVAZIONE</u> SIA $t \in \mathbb{R}$ E $P \in \mathbb{R}^3$ ALLORA

$$\|tP\| = |t| \, \|P\| \qquad |t| \text{ è il valore assoluto di } t$$

Calcoliamo adesso la distanza tra due punti $P = (x_P \; y_P \; z_P)$ e $Q = (x_Q, y_Q, z_Q)$.

Un ragionamento del tutto analogo al precedente (nota ②) mostra che

$$\mathrm{dist}(P,Q) = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2 + (z_Q - z_P)^2}$$

$$= \|P - Q\|$$

PUNTO MEDIO

DATI DUE PUNTI P, Q IL PUNTO MEDIO È L'UNICO PUNTO M TALE CHE

$$\mathrm{dist}(P,M) = \mathrm{dist}(Q,M) = \frac{1}{2}\,\mathrm{dist}(P,Q)$$

OSSERVIAMO CHE SE PONIAMO $M = \dfrac{P+Q}{2}$ ABBIAMO

$$\mathrm{dist}(P,M) = \left\| P - \frac{P+Q}{2} \right\| = \left\| \frac{P}{2} - \frac{Q}{2} \right\| = \frac{1}{2}\|P-Q\|$$

$$\mathrm{dist}(Q,M) = \left\| \frac{P+Q}{2} - Q \right\| = \left\| \frac{P}{2} - \frac{Q}{2} \right\| = \frac{1}{2}\|P-Q\|$$

$$\mathrm{dist}(P,Q) = \|P-Q\|$$

QUINDI IL PUNTO MEDIO È $M = \dfrac{P+Q}{2}$

ESERCIZIO

CALCOLARE LA DISTANZA E IL PUNTO MEDIO TRA

$P = (1,2,3)$ E $Q = (3,1,-1)$

ESERCIZIO

DIMOSTRARE IL CONTENUTO DELL'OSSERVAZIONE: SE $t \in \mathbb{R}$ E $P \in \mathbb{R}^3$ ALLORA $\|tP\| = |t|\,\|P\|$

DEFINIZIONE

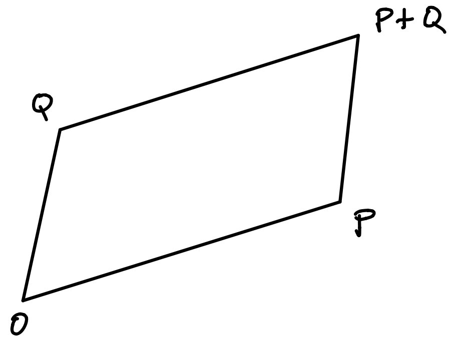
Più in generale se ho n-punti $P_1, P_2, \dots, P_n$ definisco il loro baricentro come

$$B = \frac{P_1 + P_2 + \cdots + P_n}{n}$$

Rincontreremo il baricentro più avanti.

INTERPRETAZIONE GEOMETRICA DELLA SOMMA

SE $P, Q \in \mathbb{R}^3$ ALLORA $P+Q$ È IL QUARTO VERTICE DEL PARALLELOGRAMMA $O\ P\ P+Q\ Q$



PER VERIFICARE QUESTO FATTO USO LA SEGUENTE CARATTERIZZAZIONE DEI PARALLELOGRAMMI:

ABCD È UN PARALLELOGRAMMA SE E SOLO SE IL PUNTO MEDIO DI AC È UGUALE A PUNTO MEDIO DI BD.

NEL CASO DI $A=O$ $B=P$ $C=P+Q$ $D=Q$

ABBIAMO DAL CALCOLO DEL PUNTO MEDIO

$$\text{PUNTO MEDIO DI } BD = \frac{P+Q}{2}$$

$$\text{PUNTO MEDIO DI } AC = \frac{O+P+Q}{2} = \frac{P+Q}{2}$$

E QUINDI SONO UGUALI

Traslazioni

Se $u \in \mathbb{R}^3$ definiamo $T_u : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ come

$$T_u(v) = u+v$$

questa è la traslazione dello spazio che porta O in u. (note ③)

Esercizio $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{ST}$ se e solo se $PQTS$ sono i vertici di un parallelogramma.

Svolgimento

osserviamo che $PQTS$ è un parallelogramma se e solo se traslando per $-P$ è un parallelogramma ovvero se $O\ \ Q-P\ \ T-P\ \ S-P$ è un parallelogramma ovvero

$$T-P = Q-P + S-P$$

che semplificando è equivalente a

$$T - S = Q - P$$

ovvero $\overrightarrow{ST} = \overrightarrow{PQ}$

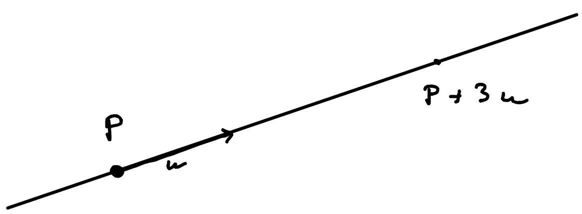
#

Rette e segmenti

DEFINIZIONE (note 5)

Se $P \in \mathbb{R}^3$ e $u \in \mathbb{R}^3$ con $u \neq 0$ la retta passante per P di direzione u è la retta

$$\{ P + tu : t \in \mathbb{R} \} = P + \mathbb{R}u$$



OSSERVAZIONE

Se P e $Q \in \mathbb{R}^3$ sono distinti, c'è una unica retta che passa per P e Q e è la retta passante per P di direzione $\overrightarrow{PQ}$.

$$r = \{ P + t\overrightarrow{PQ} : t \in \mathbb{R} \}$$

Al variare del parametro t, il punto $P + t\overrightarrow{PQ}$ percorre tutta la retta e abbiamo

per $t=0$ $\qquad P + 0\overrightarrow{PQ} = P$

$t=1$ $\qquad P + 1\overrightarrow{PQ} = P + Q - P = Q$

DEFINIZIONE

Se $P, Q \in \mathbb{R}$ con $P \neq Q$ il segmento tra P e Q è l'insieme

$$\{ P + t\overrightarrow{PQ} : 0 \leq t \leq 1 \}$$

OSSERVAZIONE

$$P + t\overrightarrow{PQ} = P + tQ - tP =$$
$$= (1-t)P + tQ$$

Se chiamo $s = 1-t$ abbiamo

$$s + t = 1 \quad e$$
$$P + t\overrightarrow{PQ} = sP + tQ$$

In particolare la retta e il segmento tra P e Q possono anche essere descritti come

$$\text{retta} = \{ sP + tQ : s + t = 1 \}$$

$$\text{segmento} = \{ sP + tQ : s + t = 1 \text{ e } s, t \geq 0 \}$$

NOTA

Chi ha già fatto qualche pratica con i vettori alle superiori avrà già incontrato questo modo di descrivere una retta nello spazio.

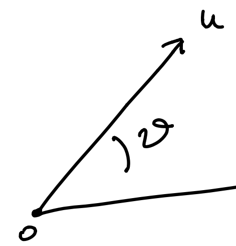
Chi non avesse mai visto questo modo può prendere questa come la definizione di retta e analogamente per il segmento

In un appendice a questa nota viene spiegato come mai questa definizione di retta coincide con quella della geometria euclidea.

- **PRODOTTO SCALARE**. RICORDO CHE IL PRODOTTO SCALARE DI $u, v \in \mathbb{R}^3$ È DEFINITO COME

$$u \cdot v = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos \vartheta$$

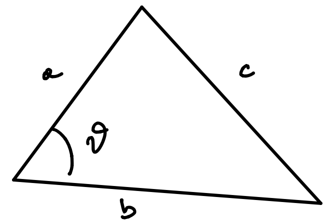
DOVE ϑ È L'ANGOLO IN FIGURA



PROPOSIZIONE Si'e $u = (u_1\ u_2\ u_3)$ e $v = (v_1\ v_2\ v_3)$

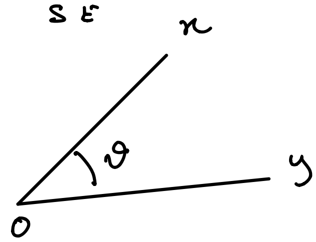
$$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

dim Ricordo che se a, b, c sono i lati di un triangolo abbiamo



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \vartheta$$

DOVE ϑ È L'ANGOLO IN FIGURA. SE APPLICO QUESTA FORMULA AL CASO DEL TRIANGOLO $O\ x\ y$



$$\text{dist}(x, y)^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\, x \cdot y$$

DA CUI

$$(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + (u_3 - v_3)^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 - 2\, u \cdot v$$

SEMPLIFICANDO OTTENGO $u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$

#

LA FORMULA SI PUÒ USARE PER CALCOLARE L'ANGOLO ϑ INFATTI DALLA DEFINIZIONE DI $\cdot$ RICAVIAMO:

$$\cos \vartheta = \frac{u \cdot v}{\|u\|\ \|v\|}$$

PROPRIETÀ DEL PRODOTTO SCALARE

Se $u, v \in \mathbb{R}^3$ si osservi che

1) $\|u\|^2 = u \cdot u$

2) u è ortogonale a $v \iff u \cdot v = 0$

VALGONO INOLTRE LE SEGUENTI PROPRIETÀ CHE SI DICONO DI BILINEARITÀ E SIMMETRIA:
$\forall\ u, v, w \in \mathbb{R}^3$

3) $u \cdot v = v \cdot u$

4) $u \cdot (\lambda v) = \lambda (u \cdot v)$

5) $u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$

LE PRIME DUE SEGUONO SIA DALLA DEFINIZIONE CHE DALLA FORMULA APPENA TROVATA. LA TERZA NON È OVVIA DALLA DEFINIZIONE MA È SEMPLICE DEDURLA DALLA FORMULA APPENA TROVATA.

QUESTE PROPRIETÀ SONO MOLTO IMPORTANTI E MOLTI ENUNCIATI DI GEOMETRIA CLASSICA SI POSSONO RICONDURRE AD ESSE. VEDREMO NELLA PROSSIMA SEZIONE ALCUNI ESEMPI. ORA APPLICHIAMO QUELLO CHE ABBIAMO VISTO ALLA DETERMINAZIONE DELLE EQUAZIONI DI UN PIANO

PIANI

VOGLIAMO VEDERE CHE I PIANI DI $\mathbb{R}^3$ SI POSSONO DESCRIVERE MEDIANTE UNA EQUAZIONE DEL TIPO

$$ax + by + cz = d$$

CON $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. FACCIAMO PRIMA DUE ESEMPI

Esercizio. Scrivere l'equazione del piano Π passante per l'origine e ortogonale alla retta $\mathbb{R}u$ con $u = (1, 2, 3)$.

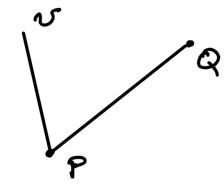
Svolgimento Sia $v = (x, y, z)$ un punto di $\mathbb{R}^3$. v è un elemento del piano Π se e solo se è ortogonale a u ovvero se e solo se $v \cdot u = 0$. Più esplicitamente

$v \in \Pi$ se e solo se $x + 2y + 3z = 0$ #

Esercizio. Scrivere l'equazione del piano Π passante per $P=(1,1,1)$ e ortogonale alla retta PQ con $Q=(2,3,5)$.

Svolgimento Sia $v=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. $v\in\Pi$ se e solo se $\overrightarrow{Pv}$ è ortogonale a $\overrightarrow{PQ}$ ovvero se e solo se

$$\overrightarrow{Pv}\cdot\overrightarrow{PQ}=0$$



Più esplicitamente

$$(x-1,\ y-1,\ z-1)\cdot(2-1,\ 3-1,\ 5-1)=0$$

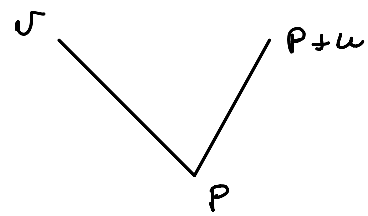
ovvero $\quad x+2y+4z=7$ #

Esercizio Scrivere l'equazione del piano Π passante per $P=(1,0,1)$ e ortogonale alla retta $\mathbb{R}u$ con $u=(1,1,1)$.

Svolgimento Osserviamo che le rette $\mathbb{R}u$ e $P+\mathbb{R}u$ sono una la traslata dell'altra e quindi parallele. Richiedere l'ortogonalità rispetto a $\mathbb{R}u$ o a $P+\mathbb{R}u$ è quindi equivalente. Procediamo quindi come in precedenza

Sia $v=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Allora $v\in\Pi$ se e solo se

$$\overrightarrow{Pv} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{P\ P+u}=u$$



sono ortogonali ovvero $\overrightarrow{Pv}\cdot u=0$.

Più esplicitamente $\quad x+y+z=2$ #

SIA ORA Π UN PIANO QUALSIASI E SIA $P=(x_P,y_P,z_P)$ UN SUO PUNTO. SIA $P+\mathbb{R}u$ LA RETTA PASSANTE PER P ORTOGONALE A Π, CON $u=(a,b,c)$ UN VETTORE NON NULLO. ALLORA

$$\Pi=\{v\in\mathbb{R}^3:\ (v-P)\cdot u=0\}$$
$$=\{v\in\mathbb{R}^3:\ v\cdot u=P\cdot u\}$$

OVVERO

$$\Pi=\{v=(x,y,z):\ ax+by+cz=ax_P+by_P+cz_P\}$$

SE CHIAMO $d=ax_P+by_P+cz_P$ OTTENGO

$$\Pi=\{v=(x,y,z):\ ax+by+cz=d\}$$

CHIUDIAMO QUESTA SEZIONE SUL PRODOTTO SCALARE CON UNA DISUGUAGLIANZA FAMOSA

<u>PROPOSIZIONE</u> (DISUGUAGLIANZA DI CAUCHY - SCHWARZ)

SE $u, v \in \mathbb{R}^3$ ALLORA

$$|u \cdot v| \leq \|u\| \, \|v\|$$

E L'UGUAGLIANZA È VERIFICATA SE E SOLO SE u E v SONO UNO UN MULTIPLO DELL'ALTRO. (CIOÈ SE $u = \lambda v$ O $v = \lambda u$ CON $\lambda \in \mathbb{R}$).

<u>dim</u> Se $u = 0$ o $v = 0$ l'enunciato è ovvio.

se $u, v \neq 0$ allora

$$\frac{|u \cdot v|}{\|u\| \, \|v\|} = |\cos \vartheta| \leq 1$$

da cui segue la disuguaglianza.

Inoltre vale $|\cos \vartheta| = 1$ se e solo $\vartheta = 0$ o π

ovvero se u, v e 0 sono sulla stessa retta #

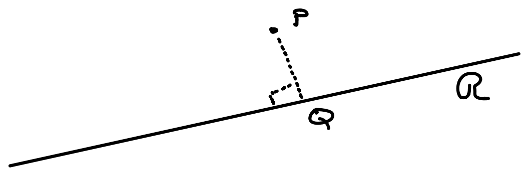
APPENDICE 1 (FUORI PROGRAMMA)

QUESTE DUE APPENDICI SONO DESTINATE A DESCRIVERE QUALE SIA IL LEGAME TRA QUELLO CHE ABBIAMO FATTO IN QUESTA NOTA E LA GEOMETRIA EUCLIDEA. NON DAREMO NESSUNA FONDAZIONE DELLA GEOMETRIA EUCLIDEA, QUINDI LA NOTA TEMO ABBIA UN QUALCHE INTERESSE SOLO PER CHI ABBIA GIÀ VISTO LA GEOMETRIA EUCLIDEA. CHI NON L'HA VISTA NON SI DEVE PREOCCUPARE PERCHÈ LA TEORIA CHE NOI SVILUPPEREMO IN SEGUITO È DEL TUTTO INDIPENDENTE.

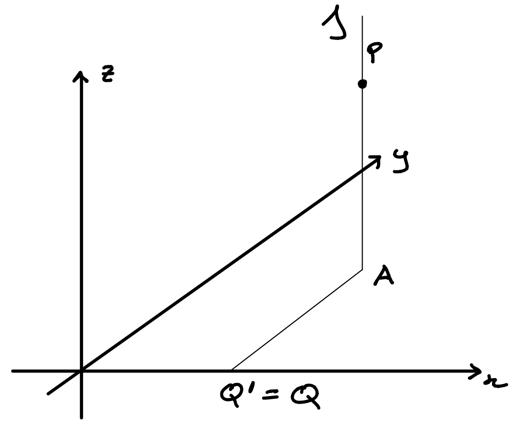
LA PRIMA DELLE DUE APPENDICI CONTIENE DEI COMMENTI AL TESTO. LO SCOPO DI QUESTI COMMENTI È SPIEGARE PIÙ NEL DETTAGLIO COME LE NOSTRE DEFINIZIONI ALGEBRICHE SIANO COMPATIBILI CON QUELLE DELLA GEOMETRIA EUCLIDEA. IN EFFETTI NELLE NOSTRE SPIEGAZIONI ABBIAMO FATTO UN PO' I FURBI. QUANDO CI HA FATTO COMODO ABBIAMO USATO I RISULTATI DELLA GEOMETRIA EUCLIDEA, ALTRE VOLTE LE PROPRIETÀ DELL'ALGEBRA, MA NON SEMPRE È STATO CHIARO CHE SI STESSE PARLANDO DELLA STESSA COSA

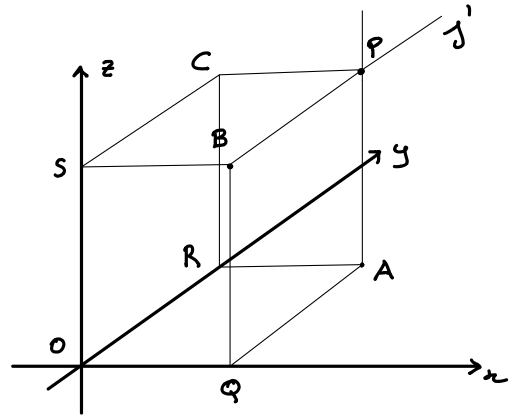
- NOTA ① LA PROIEZIONE DI UN PUNTO SUGLI ASSI.

SE P È UN PUNTO E $\mathcal{R}$ È UNA RETTA LA PROIEZIONE ORTOGONALE DI P SU $\mathcal{R}$ È IL PUNTO Q DI $\mathcal{R}$ PIÙ VICINO A P. EQUIVALENTEMENTE SE $P \in \mathcal{R}$, ALLORA $Q = P$, MENTRE SE $P \notin \mathcal{R}$ È L'UNICO PUNTO Q DI $\mathcal{R}$ TALE L'ANGOLO TRA $\mathcal{R}$ E LA RETTA PQ È $90°$.



NEL CASO DELLA PROIEZIONE DI P SUGLI ASSI COORDINATI POSSIAMO COSTRUIRE LA PROIEZIONE DI P SUGLI ASSI ANCHE IN UN ALTRO MODO.
CONSIDERIAMO LA RETTA $\mathcal{J}$ PARALLELA ALL'ASSE z PASSANTE PER P E SIA A L'INTERSEZIONE TRA QUESTA RETTA E IL PIANO xy. CONSIDERIAMO POI LA PROIEZIONE Q' DI A SULL'ASSE DELLE x. IN PARTICOLARE AQ' È PARALLELA ALL'ASSE DELLE y. LE RETTE AP E AQ SONO CONTENUTE NEL PIANO Π PASSANTE PER A PARALLELO AL PIANO yz. IN PARTICOLARE Π È ORTOGONALE ALL'ASSE x E QUINDI L'ANGOLO TRA LA RETTA $Q'P$ E L'ASSE DELLE x È RETTO, OVVERO $Q' = Q$ È LA PROIEZIONE DI P SULL'ASSE DELLE x.





SE INDICHIAMO CON (x_P, y_P, z_P) LE COORDINATE DI P OSSERVIAMO CHE Π È ESATTAMENTE IL PIANO DEI PUNTI CHE PROIETTATI SULL'ASSE DELLE x SONO UGUALI A Q OVVERO DEI PUNTI CON PRIMA COORDINATA UGUALE A x_P.

E CHE I PUNTI DELLA RETTA s SONO I PUNTI CON PRIME DUE COORDINATE UGUALI A x_P E y_P.

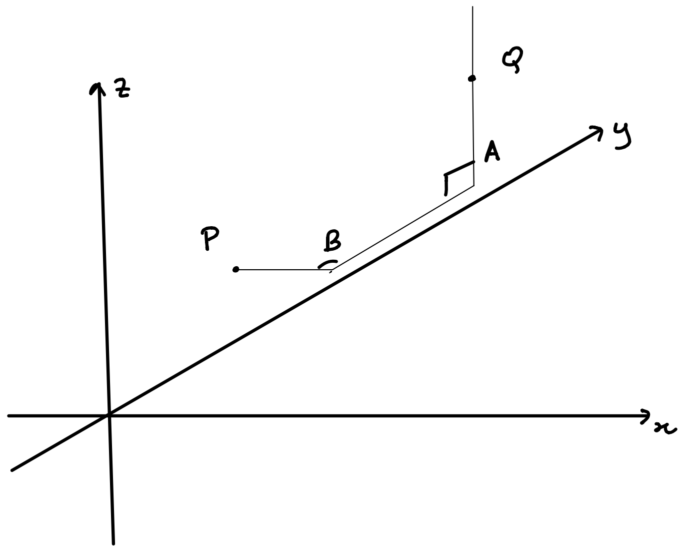
SIMILMENTE POSSIAMO COSTRUIRE I PUNTI B E C E LE PROIEZIONI R E S COME MOSTRATO IN FIGURA. SI FORMA COSÌ UN PARALLELEPIPEDO. IN PARTICOLARE $dist(P, C) = dist(O, Q) = |x_P|$ ED È ANCHE LA DISTANZA DEL PIANO yz DAL PUNTO P.

NOTA ② DISTANZA TRA DUE PUNTI.

SIA $P = (x_P\ y_P\ z_P)$ E $Q = (x_Q, y_Q, z_Q)$.

Sia $A = (x_Q, y_Q, z_P)$ e

sia $B = (x_Q, y_P, z_P)$



PER QUANTO DISCUSSO IN PRECEDENZA NELLA NOTA ① LA RETTA AQ È PARALLELA ALL'ASSE DELLE Z E LA RETTA AB È PARALLELA ALL'ASSE DELLE y E PB A QUELLA DELLE x. QUINDI I TRIANGOLI PBA E PAQ SONO RETTANGOLI

QUINDI PER IL TEOREMA DI PITAGORA APPLICATO DUE VOLTE

$$dist(P, Q) = \sqrt{dist(P,B)^2 + dist(B,A)^2 + dist(A,Q)^2}$$

ORA RIMANE DA VERIFICARE CHE

$$dist(P, B) = |x_P - x_Q|$$

$$dist(B, A) = |y_P - y_Q|$$

$$dist(A, Q) = |z_P - z_Q|$$

Verifichiamo l'ultima (sono tutte molto simili)

Abbiamo $Q = (x_Q\ y_Q\ z_Q)$ $A = (x_Q\ y_Q\ z_P)$

Sia Π IL PIANO PARALLELO A xy PASSANTE PER Q

Sia Π' " " " " " " " " A

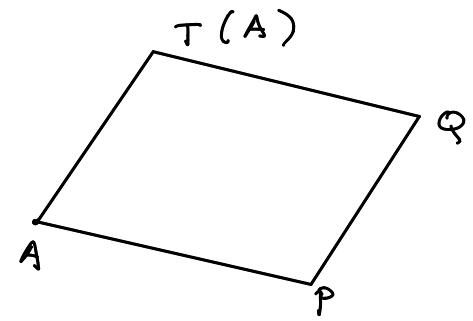
$\Pi \cap$ asse $z = \{Q'\}$ $\Pi' \cap$ asse $z = \{A'\}$

Per quanto spiegato nella nota ① $Q' = (0, 0, z_Q)$ e $A' = (0, 0, z_P)$ e essendo l'asse z parallelo ad AQ e π e π' paralleli abbiamo $\text{dist}(Q, A) = \text{dist}(Q', A')$

Ma per due punti sull'asse z lo sappiamo calcolare la distanza e quindi $\text{dist}(Q, A) = |z_Q - z_P|$.

- NOTA ③

Dati due punti dello spazio P e Q, in geometria euclidea, la traslazione che manda P in Q è la trasformazione T dello spazio che manda un punto A nel quarto vertice del parallelogramma $A, P, Q, T(A)$.



Per come abbiamo descritto la somma di elementi di $\mathbb{R}^3$ abbiamo che la trasformazione T_u definita nel testo è la traslazione che manda O in u

- NOTA ④ Sia $P \in \mathbb{R}^3$ con $P \neq O$ e sia $\mathcal{R}$ la retta OP e $\mathcal{S}$ il segmento OP. Voglio dimostrare che

$$\mathcal{R} = \{ tP : t \in \mathbb{R} \}$$

$$\mathcal{S} = \{ tP : 0 \le t \le 1 \}$$

MOSTRO SOLO LA DESCRIZIONE DEL SEGMENTO. DEVO UTILIZZARE UNA QUALCHE CARATTERIZZAZIONE GEOMETRICA DEI PUNTI DI $\mathcal{S}$. USO LA SEGUENTE

$$\mathcal{S} = \{ Q : \text{dist}(O, Q) + \text{dist}(Q, P) = \text{dist}(O, P) \}$$

UTILIZZERÒ INOLTRE IL FATTO CHE SE $Q, Q' \in \mathcal{S}$ E $\text{dist}(O, Q) = \text{dist}(O, Q')$ ALLORA $Q = Q'$.

DIMOSTRIAMO CHE $\{tP : 0 \le t \le 1\} \subset S$.

INFATTI $\mathrm{dist}(O, tP) + \mathrm{dist}(tP, P) =$

$$= \|tP\| + \|P - tP\| =$$

$$= t\|P\| + (1-t)\|P\| = \|P\| = \mathrm{dist}(O, P)$$

ORA DIMOSTRIAMO $S \subset \{tP : 0 \le t \le 1\}$

Sia $Q \in S$ e sia $d = \mathrm{dist}(O, Q)$. Abbiamo $d \le \mathrm{dis}(O,P)$

quindi

$$0 \le t = \frac{d}{\mathrm{dist}(O,P)} \le 1$$

Sia $Q' = tP$ allora $Q' \in S$ e $\mathrm{dist}(O, Q') = t\|P\| = d$

quindi $\mathrm{dist}(O, Q') = \mathrm{dist}(O, Q)$ e quindi $Q = Q'$

#

APPENDICE 2

Nell'appendice 1 e nelle note abbiamo utilizzato la geometria euclidea per ricavare una descrizione algebrica di rette, piani, prodotto scalare. Si può anche ribaltare questo punto di vista, dare delle definizioni puramente algebriche, prescindendo da ogni concetto precedente di geometria euclidea e verificare che queste definizioni sono compatibili con gli assiomi della geometria euclidea. Questo è un punto di vista molto efficace. La cosa più delicata è definire l'angolo $P\hat{O}Q$. Possiamo definire il coseno di tale angolo usando il prodotto scalare e la formula

$$\cos P\hat{O}Q = \frac{P \cdot Q}{\|P\| \, \|Q\|}$$

e definire il prodotto scalare algebricamente mediante

$$(x, y, z) \cdot (x', y', z') = x x' + y y' + z z'.$$

Sono gli stessi passaggi che abbiamo fatto a lezione ma percorsi in senso inverso. A lezione siamo partiti dalla definizione di prodotto scalare come

$$P \cdot Q = \cos P\hat{O}Q \quad \|P\| \quad \|Q\|$$

e abbiamo ricavato la formula per $P \cdot Q$ in coordinate. Per fare questo ci siamo poggiati sul teorema del coseno, e ancora prima di questo sul concetto di angolo. Ora invece vogliamo partire dalla formula algebrica per il prodotto scalare e definire l'angolo $P\hat{O}Q$ mediante

$$\cos P\hat{O}Q = \frac{P \cdot Q}{\|P\| \ \|Q\|}$$

Se prendiamo questo punto di vista dobbiamo dimostrare a priori, senza poggiarci sulla geometria che

$$\frac{|P \cdot Q|}{\|P\| \ \|Q\|} \leq 1$$

ovvero $|P \cdot Q| \leq \|P\| \ \|Q\|$. Dobbiamo quindi dare una dimostrazione alternativa della disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. Ne daremo due dimostrazioni, la prima più diretta, la seconda

PROPOSIZIONE

Siano $u, v \in \mathbb{R}^3$ allora $|u \cdot v| \leq \|u\| \, \|v\|$.

Inoltre se $u \neq 0$, $|u \cdot v| = \|u\| \, \|v\|$ se e solo se $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ e $v = \lambda u$

1ª dimostrazione

Sia $u = (x, y, z)$ e $v = (a, b, c)$.
La disuguaglianza $|u \cdot v| \leq \|u\| \, \|v\|$ è equivalente a $(u \cdot v)^2 \leq \|u\|^2 \, \|v\|^2$ e sostituendo troviamo

$$(xa + yb + zc)^2 \leq (x^2 + y^2 + z^2)(a^2 + b^2 + c^2)$$

Sviluppando e semplificando, da questa equazione ricaviamo che è equivalente a

$$(xb - ya)^2 + (xc - za)^2 + (yc - zb)^2 \geq 0$$

che è chiaramente verificata.

Se inoltre vale $|u \cdot v| = \|u\| \, \|v\|$ e con gli stessi passaggi troviamo

$$(xb - ya)^2 + (xc - za)^2 + (yc - zb)^2 = 0$$

ovvero

$$xb = ya \qquad xc = za \qquad yc = zb.$$

Se $u \neq 0$ allora $x \neq 0$ o $y \neq 0$ o $z \neq 0$. Supponiamo $x \neq 0$ (gli altri due casi sono analoghi). Ricaviamo

$$b = \frac{a}{x} y \qquad c = \frac{a}{x} z$$

ovvero $v = (a, b, c) = \frac{a}{x}(x, y, z) = \frac{a}{x} u$

quindi, ponendo $\lambda = \frac{a}{x}$ otteniamo $v = \lambda u$.

Viceversa se $v = \lambda u$ abbiamo

$$|u \cdot v| = |\lambda| \, \|u\|^2 = \|u\| \, \|v\|$$

#

2ª dimostrazione

Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(t) = \|v - tu\|^2 = (v - tu) \cdot (v - tu)$$

$$= \|v\|^2 - 2t \, u \cdot v + t^2 \|u\|^2$$

f è quindi un polinomio di secondo grado e $f(t) \geq 0$ per ogni t. Quindi

$$\Delta \leq 0$$

ovvero

$$4 (u \cdot v)^2 - 4 \|u\|^2 \|v\|^2 \leq 0$$

da cui

$$(u \cdot v)^2 \leq \|u\|^2 \, \|v\|^2$$

Se inoltre $|u \cdot v| = \|u\| \, \|v\|$ allora $\Delta = 0$ e quindi la funzione f assume il valore 0, ovvero $\exists \, t : \|v - tu\|^2 = 0$ o equivalentemente $v = tu$.