IL TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA LINEARE

Chiamo teorema fondamentale dell'algebra lineare il teorema che afferma che tutte le basi hanno la stessa cardinalità. Non è un nome convenzionale, non lo troverete enunciato allo stesso modo in un libro, è un nome però meritato. La dimostrazione di questo teorema che abbiamo dato a lezione e che trovate qui sotto, non è molto bella, ma spero sia più "concreta" e quindi più adatta a questo corso. Dimostreremo il teorema prima nel caso di K^m e poi per un qualsiasi spazio vettoriale di dimensione finita.

TEOREMA (FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA LINEARE)

Siano $v_1, \dots, v_l$ e $w_1 \dots w_m$ due basi di V.
Allora $l = m$.

dim

Si considerino le matrici di camb. di base $A = [\,Id\,]^{v_1 \dots v_l}_{w_1 \dots w_m}$ e $B = [\,Id\,]^{w_1 \dots w_m}_{v_1 \dots v_l}$. Per quanto spiegato nella sezione sulle opp lineari $AB = I$ e $BA = I$ quindi A e B sono invertibili. Quindi $l = m$ per quanto spiegato nella sezione sui sistemi lineari #

DEFINIZIONE

Se $v_1 \dots v_m$ è una base di uno spazio vettoriale V diciamo che $m = \dim V$ è la dimensione di V.

Per quanto dimostrato nel teorema questo numero non dipende dalla base di V che abbiamo scelto

ESEMPI

① $\dim K^m = m$ infatti $e_1, \dots e_m$ è una base di K^m

② $\dim \mathrm{Mat}_{m\times n}(K) = m\cdot n$ infatti E_{ij} con $i=1\dots m$ $j=1\dots n$ è una base di $\mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$

③ $\dim K[t]_{\leq n} = n+1$ infatti $1, t, t^2, \dots, t^{n+1}$ è una base di $K[t]_{\leq n}$

DEFINIZIONE Sia V uno spazio vettoriale

Se $\dim V = 1$ V si dice una retta

Se $\dim V = 2$ V si dice un piano

Se V ha una base $v_1 \dots v_m$ diciamo che V è di dim. finita.

LA DEFINIZIONE DI RANGO E IL NUMERO DI VARIABILI LIBERE

Registriamo subito una conseguenza del teorema precedente riguardo ai sistemi lineari. Data una matrice A $l\times m$ nella risoluzione del sistema $A\cdot x = 0$ avevamo visto che se individuavamo h variabili libere e le variabili dipendenti, allora esisteva una base di $N(L_A)$ fatta di h elementi. Quindi

$$h = \dim N(L_A).$$

In particolare il n° di variabili libere non dipende da come abbiamo risolto il sistema.

Questo chiarisce anche un punto che era rimasto in sospeso nella definizione di rango di una matrice $l\times m$. Avevamo notato che la definizione era ben data nel caso in cui il rango

era $l, m \neq 0$, ma nel caso generale non ne eravamo sicuri perché dipendeva da come riducevamo A a scalini.
Il rango è uguale però al n° di pivot ovvero al numero di variabili dipendenti, quindi

$$\text{rango } A = k = m - h = m - \dim N(L_A)$$

non dipende dalla riduzione a scalini effettuata. Torneremo ancora sulla definizione di rango dandone una interpretazione un po' diversa.

AGGIUNGERE VETTORI LINEARMENTE INDIPENDENTI

Iniziamo con due osservazioni, la prima che ci spiega come aggiungere un vettore ad una lista di vettori linearmente indipendenti, la seconda come eliminare generatori superflui.

Queste osservazioni possono essere utili in alcuni casi a costruire basi di uno spazio vettoriale.

LEMMA

Sia V uno spazio vettoriale su K e siano $v_1 \dots v_b \in V$ dei vettori linearmente indipendenti. Sia $v \in V$.

Allora $v_1, \dots, v_b, v$ sono lin. indip. se e solo se $v \notin \langle v_1 \dots v_b \rangle$.

dimostrazione Dimostriamo che $v_1, \dots, v_b, v$ sono lin. dipendenti se e solo se $v \in \langle v_1 \dots v_b \rangle$. Supponiamo che $v \in \langle v_1 \dots v_b \rangle$, allora $\exists\, \alpha_1 \dots \alpha_b \in K$ tali che

$$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_b v_b$$

ovvero

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_b v_b - 1 \cdot v = 0,$$

In particolare questa è una combinazione lineare che ha almeno il coeff. di v diverso da zero e che è uguale a zero. Quindi $v_1, \dots, v_b, v$ sono lin. dip.

Viceversa supponiamo che $v_1, \dots, v_b, v$ siano lin. dip.. Allora $\exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_b, \beta$ non tutti nulli tali che

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_b v_b + \beta v = 0 \quad \text{ovvero} \quad \beta v = -\alpha_1 v_1 - \alpha_2 v_2 \dots - \alpha_b v_b$$

Se fosse $\beta = 0$ allora avremmo una combinazione lineare che annulla $v_1 \dots v_b$ che sono lin. indip. per ipotesi quindi avremmo $\alpha_1 = \dots = \alpha_b = 0$ contro il fatto che almeno uno tra gli α_i e β è non nullo.
Quindi $\beta \neq 0$. Dividendo per β la seconda formula ricaviamo

$$v = -\frac{\alpha_1}{\beta} v_1 \dots - \frac{\alpha_b}{\beta} v_b$$

e quindi $v \in \langle v_1 \dots v_b \rangle$ #

Questo lemma ha la seguente conseguenza immediata

COROLLARIO

Se $v_1 \dots v_b \in V$ sono un insieme di vettori lin. indipendenti massimale (cioè se non posso aggiungere a questa lista un altro vettore v in modo che $v_1, \dots, v_b, v$ siano lin. indip) allora $\langle v_1 \dots v_b \rangle = V$ e quindi $v_1 \dots v_b$ sono una base di V

OSSERVAZIONE

Inoltre il lemma fornisce un modo per costruire una lista di vettori lin. indip. : si parte da $v_1 \in V$ con $v_1 \neq 0$.

- Se $\langle v_1 \rangle \neq V$ scelgo $v_2 \in V \setminus \langle v_1 \rangle$ e il lemma assicura che v_1, v_2 sono lin. indip.
- Se $\langle v_1, v_2 \rangle \neq V$ scelgo $v_3 \in V \setminus \langle v_1, v_2 \rangle$ e il lemma assicura che v_1, v_2, v_3 sono lin. indip.

e continuo così. Il processo termina solo se ad un certo punto $\langle v_1 \dots v_b \rangle = V$. In quel caso $v_1 \dots v_b$ è una base.

Esempio - esercizio.

Sia $V = \mathbb{R}^3$ e sia W il piano $x + y + z = 0$.
Costruire una base v_1, v_2, v_3 di $\mathbb{R}^3$ tale che $v_1\ v_2$ è una base di W.

Se riscriviamo l'equazione che definisce W nella forma

$$x = -y - z$$

sappiamo che possiamo trovare una base di W ponendo $y=1\ z=0$ e in seguito $y=0\ z=1$. Otteniamo quindi che

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e } v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

è una base di W.

Scegliamo ora $v_3 \notin W$, per esempio $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

v_1, v_2, v_3 sono una base di $\mathbb{R}^3$ infatti

$e_1 = v_3 \qquad e_2 = v_1 + v_3 \qquad e_3 = v_2 + v_3$

Registriamo alcune conseguenze teoriche di questo modo di costruire liste di vettori linearmente indipendenti.

PROPOSIZIONE (completamento di una lista di vettori linearm. indipendenti ad una base)

Sia V uno spazio vettoriale di dim n e sia $u_1 \dots u_n$ una base.

Siano $v_1 \dots v_b$ dei vettori lin. indip. Allora possiamo completare la lista $v_1 \dots v_b$ ad una base scegliendo i nuovi elementi tra gli elementi della base $u_1 \dots u_n$. Ovvero esistono $u_{i_1} \dots u_{i_l}$ tale che

$$v_1 \dots v_b \; u_{i_1} \quad u_{i_l} \quad \text{è una base}$$

In particolare 1) $b \leq n$

2) Se $b = n$ allora $v_1 \dots v_n$ è una base

dim.

Se $\mathrm{Span}(v_1 \dots v_b) = V$ allora $v_1 \dots v_b$ è una base e $b = n$. Se $\mathrm{Span}(v_1 \dots v_b) \neq V$ allora esiste $i : u_i \notin \mathrm{Span}(v_1 \dots v_b)$. Per quanto osservato prima possiamo aggiungere u_i alla lista di vettori e ottenere $v_1 \dots v_b \; u_i$. Posso procedere e continuare ad aggiungere vettori della base $u_1 \dots u_n$ alla mia lista iniziale e ottenere una nuova lista di vettori lin indip

$$v_1 \dots v_b \; u_{i_1} \; u_{i_2} \dots u_{i_l} .$$

Poiché

$$\mathrm{Span}(v_1 \dots v_b\, u_1 \dots u_n) \supset \mathrm{Span}(u_1 \dots u_n) = V$$

ottengo che ad un certo punto avrò

$$\mathrm{Span}(v_1 \dots v_b\, u_{i_1} \dots u_{i_k}) = V$$

e quindi $v_1 \dots v_b\, u_{i_1} \dots u_{i_k}$ è una base di V.
In particolare $b + k = n$.
Questo implica $b \leq n$ e se $k = 0$, ovvero $b = n$, $v_1 \dots v_n$ è una base #

Un ragionamento simile mostra questa altra importante conseguenza, piuttosto intuitiva:
Se $W \subset V$ allora $\dim W < \dim V$.

TEOREMA

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e sia $W \subset V$ un sottospazio vettoriale.
Allora W ha dimensione finita e $\dim W \leq \dim V$.
Inoltre $\dim W = \dim V$ se e solo se $W = V$

dim. Se $W = 0$ è ovvio. Se $W \neq 0$.
Dimostriamo prima che $\dim W$ è finita.
Procediamo p.a. supponiamo che W non sia di dimensione finita. Allora costruisco una successione di vettori

$$v_1, v_2, \dots v_n \dots \in W$$

linearmente indipendenti. La successione la costruisco in questo modo:

$v_1 \in W$ e $v_1 \neq 0$
una volta costruiti $v_1 \dots v_{n-1}$ osservo che poiché per ipotesi assurda W non ha dimensione finita allora $W \neq \langle v_1 \dots v_{n-1} \rangle$ quindi $\exists\, v_n \in W \setminus \langle v_1 \dots v_{n-1} \rangle$. Per quanto osservato in una lezione precedente $v_1, \dots, v_n$ sono lin. indipendenti

In particolare se $m = \dim V$ allora ho costruito $v_1, \dots, v_{m+1} \in V$ linearmente indipendenti che è contro la proposizione prec. punto 1) .

Quindi W ha dimensione finita e sia $v_1 \dots v_n$ una base di W. Allora $v_1 \dots v_n$ sono vettori linearmente indipendenti di V e quindi sempre per il teorema fond., punto 1) si ricava $n \leq m$ ovvero $\dim W \leq \dim V$.

Se infine $n = m$ allora $v_1; \dots; v_m$ sono vettori lin. indip. di V e quindi per il punto 2) sono una base di V. Quindi

$$W = \langle v_1 \dots v_n \rangle = V.$$

#

ELIMINARE DEI GENERATORI

Forniamo un risultato del tutto simmetrico nel caso di generatori di uno spazio vettoriale

LEMMA

Siano $v_1 \dots v_b$ dei generatori dello spazio vettoriale V, allora possiamo eliminarne uno (cioè $\exists i$ tale che i vettori $v_1 \dots v_{i-1}, v_{i+1}, \dots v_b$ sono generatori) se e solo se $v_1 \dots v_b$ sono lin. dip.

dimostrazione

Supponiamo di poter eliminare un vettore. Per semplicità di notazione supponiamo sia l'ultimo. Quindi $V = \langle v_1 \dots v_{b-1} \rangle$ e $v_b \in \langle v_1 \dots v_{b-1} \rangle$. Allora esistono $\lambda_1 \dots \lambda_{b-1}$ tali che

$$v_b = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{b-1} v_{b-1}$$

da cui

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{b-1} v_{b-1} - 1 \cdot v_b = 0$$

e quindi $v_1 \dots v_b$ sono lin. dip.

Viceversa supponiamo che $v_1 \dots v_b$ siano lin dip. Allora esistono $\lambda_1 \dots \lambda_b$ non tutti nulli tali che

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_b v_b = 0.$$

Sappiamo che esiste $\lambda_i \neq 0$, sempre per semplicità di notazione che sia $\lambda_b \neq 0$. Quindi otteniamo

$$v_b = -\frac{\lambda_1}{\lambda_b} v_1 \dots - \frac{\lambda_{b-1}}{\lambda_b} v_{b-1} \in \langle v_1 \dots v_{b-1} \rangle = W$$

Quindi $v_1, \dots, v_b \in W$ e $\langle v_1 \dots v_b \rangle$ è il più piccolo sottospazio che contiene $v_1, \dots, v_b$, quindi

$$V = \langle v_1 \dots v_b \rangle \subset W \subset V$$

Possiamo allora eliminare v_b infatti:

$$V = W = \langle v_1 \dots v_{b-1} \rangle \qquad \#$$

Una conseguenza immediata del lemma è il seguente corollario.

COROLLARIO

Se $v_1 \dots v_b$ sono un insieme minimale di generatori di V (cioè se non possiamo eliminare un elemento v_i dalla lista in modo che $v_1 \dots \check{v}_i \dots v_b$ sono generatori di V) allora sono lin. indip.

OSSERVAZIONE (estrazione di una base da un insieme di generatori)

Il lemma precedente fornisce un modo di estrarre una base da un insieme di generatori:

Siano $v_1 \dots v_b$ dei generatori di V.
- Se sono lin. indip. allora sono una base.
- Se sono lin. dip allora ne possiamo eliminare uno e quindi abbiamo che
  $v_1 \dots \check{v}_i \dots v_b$ sono generatori.

A questo punto riapplichiamo lo stesso ragionamento.

COROLLARIO

Siano $v_1 \dots v_n$ dei generatori di V.
Allora 1) V ha dim finita e $\dim V \leq n$
2) Se $\dim V = n$ allora $v_1 \dots v_n$ è una base

dim Per quanto osservato sopra esiste una base fatta di alcuni elementi della lista $v_1 \dots v_n$. Diciamo siano i primi k: $v_1 \dots v_k$. Allora $k = \dim V \leq n$ e se $k = n$ allora sono lin. indip. $\#$