PREREQUISITI E RICHIAMI

IL CORSO ASSUMERÀ CHE GLI STUDENTI ABBIANO QUALCHE FAMILIARITÀ CON I SEGUENTI ARGOMENTI

- NUMERI RAZIONALI E NUMERI REALI
- INSIEMI E FUNZIONI
- PIANO CARTESIANO : RETTE, CERCHI, PARABOLE
- TRIGONOMETRIA
- POLINOMI, SOL. DI EQ. E DIS. DI 2° GRADO

PER I PRIMI DUE DAREMO DEI BREVI RICHIAMI IN QUESTE NOTE.

OLTRE A QUESTO IL CORSO ASSUMERÀ ALTRE DUE COSE

- CHE SAPPIATE FARE I CONTI! SOPRATTUTTO MANIPOLARE DELLE ESPRESSIONI ALGEBRICHE SENZA PERDERSI
- CHE ABBIATE UNA IDEA DI COSA SIA UN RAGIONAMENTO MATEMATICO, POSSIBILMENTE DI COSA SIA UNA DIMOSTRAZIONE.

L'ULTIMO PUNTO È, PER ESPERIENZA, IL PIÙ DELICATO. CON RAGIONAMENTO MATEMATICO MI RIFERISCO AD UN MODO DI PROCEDERE CHE DICA NON SOLO COME ARRIVARE AL RISULTATO MA CHE SOPRATTUTTO SPIEGHI <u>PERCHÉ</u> ALCUNE COSE SONO VERE.

PER CHI SI SENTE INCERTO SU QUESTO PUNTO POTREBBE ESSERE UTILE AVERE UN ESEMPIO PERSONALE DI RAGIONAMENTO DI QUESTO TIPO CHE SAPETE DI AVER CAPITO COMPLETAMENTE. UN ESEMPIO CHE NON SIA BANALE MA CHE NON C'È BISOGNO SIA COMPLICATO. LE DIMOSTRAZIONI DEL TEOREMA DI PITAGORA, O CHE I NUMERI PRIMI SONO INFINITI POSSONO ANDAR BENE, MA PUÒ ANDAR BENE ANCHE LA SOLUZIONE DI UN ESERCIZIO. L'IMPORTANTE È CHE VI SENTIATE SICURI SU QUESTO ESEMPIO.

ESR. 1 TROVARE UN TALE ESEMPIO

ESR. 2 FARE ALMENO UN ESERCIZIO DELLA SEZIONE "ESERCIZI VARI" NEL FILE DEGLI ESERCIZI

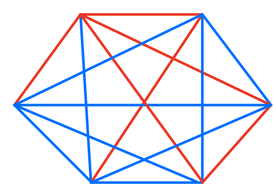
ESR. 3 CALCOLARE LA SOMMA DEGLI INTERI DA 1 A 100 OSSERVANDO CHE $1+100 = 101$, $2+99 = 101$, $3+98 = 101$, ...

ESR 4 SI CALCOLI LA SOMMA DEI NUMERI DELLA SEGUENTE TABELLA 100×100

$$
\begin{array}{cccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots & & 100 \\
2 & 3 & 4 & 5 & & & & 101 \\
3 & 4 & 5 & & & & & \\
4 & 5 & & & & & & \vdots \\
5 & & & & & & & \\
\vdots & & & & & & & 198 \\
100 & 101 & 102 & \cdots & & & 198 & 199
\end{array}
$$

(AIUTO : ... $= 200 \times (1+2+\cdots+99) + 100 \times 100$)

ESR. 5 Si consideri un esagono in cui tutti i lati sono stati colorati o di blu o di rosso.



esempio

Dimostrare che esiste un triangolo i cui lati sono o tutti rossi, o tutti blu.

NUMERI NATURALI, INTERI, RAZIONALI, REALI

Ci aspettiamo che abbiate familiarità con i seguenti insiemi di numeri e le loro proprietà:

- $\mathbb{N}$: l'insieme dei numeri naturali: 0, 1, 2, ...
- $\mathbb{Z}$: l'insieme dei numeri interi: ... −1, 0, 1, 2 ...
- $\mathbb{Q}$: l'insieme dei numeri razionali, ovvero delle frazioni $\frac{a}{b}$ con a, b interi e $b \neq 0$
- $\mathbb{R}$: l'insieme dei numeri reali, ovvero di tutti i numeri con la virgola, anche non periodici. Qualche attenzione va fatta sul 9 periodico, ma di questi numeri parleremo diffusamente ad analisi.

Se andiamo a scrivere una frazione come un numero con la virgola otteniamo sempre un numero periodico e viceversa un numero periodico si può scrivere sempre come una frazione.

Esercizio Scrivere $\frac{180}{37}$ come numero con la virgola.

$$
\begin{array}{rrrr|l}
1 & 8 & 1 & & 37 \\
\hline
1 & 4 & 8 & & 4,891 \\
3 & 3 & 0 & & \\
2 & 9 & 6 & & \\
 & 3 & 4 & 0 & \\
 & 3 & 3 & 3 & \\
 & & 7 & 0 & \\
 & & 3 & 7 & \\
 & & 3 & 3 & 0
\end{array}
$$

da qui in poi il calcolo si ripete uguale

quindi otteniamo $4,\overline{891}$

Esercizio Scrivere $11,3\overline{57}$ come frazione

Sia $x = 11,3\overline{57}$ allora

$$
\begin{array}{rcl}
100x & = & 1135,75757\ldots \quad - \\
x & = & 11,35757\ldots \quad = \\
\hline
99x & = & 1124,400\ldots
\end{array}
$$

da cui

$$x = \frac{1124,4}{99} = \frac{11244}{\cancel{990}} = \frac{3748}{330} = \frac{1874}{165}$$

INSIEMI

QUELLO CHE CI ASPETTIAMO SAPPIATE DELLA TEORIA DEGLI INSIEMI SONO ALCUNI CONCETTI E COSTRUZIONI DI BASE. OLTRE A QUESTO CI ASPETTIAMO CHE ABBIATE QUALCHE FAMILIARITÀ CON ALCUNE NOTAZIONI E CHE SAPPIATE DESCRIVERE UN INSIEME

- CONCETTI E NOTAZIONI FONDAMENTALI

  - appartenenza $\in$: $x \in A$ vuol dire che l'elemento x appartiene all'insieme A.

  - contenimento $\subset$: $A \subset B$ vuol dire che l'insieme A è contenuto nell'insieme B ovvero che ogni elemento di A è anche un elemento di B. Si può anche scrivere $B \supset A$.
    NOTA BENE quando scrive $A \subset B$ può anche essere $A = B$. Si dice anche A è un sottoinsieme di B

  - $\forall$ è un'abbreviazione per "per ogni"

  - $\exists$ è un'abbreviazione per "esiste"

  - $\exists_1$ o $\exists!$ è un'abbreviazione per "esiste un unico"

  - $:$ o $|$ è un'abbreviazione per "tale che"

  - $\emptyset$ è l'insieme vuoto. È un insieme che non ha elementi

  - card (A) indica la cardinalità di un insieme, ovvero il numero degli elementi di un insieme

NOTA: Non è che se scrivete $\forall$ allora state facendo matematica e se scrivete "per ogni" non state facendo matematica. Le due cose sono perfettamente intercambiabili e anzi invito chi non si sente sicuro ad utilizzare la forma estesa. È bene però che acquisiate un po' di familiarità con questa simbologia perché io la userò a lezione e la troverete usata nella maggior parte dei libri.

DESCRIVERE UN INSIEME

UN INSIEME SI PUÒ DESCRIVERE ESSENZIALMENTE IN DUE MODI.

PRIMO MODO: SE NE POSSONO ELENCARE GLI ELEMENTI. PER ESEMPIO POSSIAMO DIRE CHE

A È L'INSIEME I CUI ELEMENTI SONO 1, 2, 3

UN MODO EQUIVALENTE È SCRIVERE

$$A = \{1, 2, 3\}$$

LE RIPETIZIONI E L'ORDINE NON CONTANO QUINDI ABBIAMO ANCHE

$$A = \{1, 3, 1, 2\}$$

A VOLTE UTILIZZEREMO QUESTO METODO IN MODO IMPROPRIO. PER ESEMPIO SCRIVEREMO

$$B = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

PER INDICARE TUTTI I NUMERI INTERI MAGGIORI O UGUALI A UNO. UNA ULTERIORE VARIANTE SI PRESENTA NEL SEGUENTE MODO

$$C = \{3m + 1 : m \in A\}$$

$$D = \{m^2 - 4m + 4 : m \in A\}$$

$$E = \{2m : m \in B\}$$

SONO ALTRI ESEMPI DI MODI PER ELENCARE GLI ELEMENTI DI UN INSIEME. NEGLI ESEMPI

$$C = \{4, 7, 10\}$$

$$D = \{0; 1\}$$

E È L'INSIEME DEI NUMERI PARI

SECONDO MODO: SI PUÒ DESCRIVERE UN INSIEME FORNENDO UNA PROPRIETÀ CHE CARATTERIZZA I SUOI ELEMENTI, PER ESEMPIO POSSIAMO DIRE CHE F È L'INSIEME DEI NUMERI CHE RISOLVONO L'EQUAZIONE $x^7 + x^5 + 3x^3 + 2 = 0$.

$$F = \{ x : x^7 + x^5 + 3x^3 + 2 = 0 \}$$

CON UNA FORMA PIÙ COMPLETA E PIÙ CORRETTA, MA NOI USEREMO ENTRAMBE, SI POSSONO SPECIFICARE A CHE TIPO DI NUMERI FACCIAMO RIFERIMENTO

$$G = \{ x \in \mathbb{R} : x^7 + x^5 + 3x^3 + 2 = 0 \}$$

$$H = \{ x \in \mathbb{N} : x^7 + x^5 + 3x^3 + 2 = 0 \}$$

IN GENERALE SIA I UN INSIEME E $P(x)$ UNA PROPOSIZIONE DELLA QUALE POSSIAMO VALUTARE LA VERITÀ SUGLI ELEMENTI DI I, OVVERO UNA FRASE CHE DIPENDE DA UNA VARIABILE x E CHE SE AL POSTO DI x METTIAMO UN ELEMENTO DI I POSSIAMO DIRE SE LA FRASE È VERA. PER ESEMPIO SIA $I = \mathbb{N}$ E SIA $P(x)$ LA FRASE

$x+1$ È UN NUMERO PRIMO

PER ESEMPIO

$P(5)$ È FALSA

$P(12)$ È VERA

ALLORA POSSIAMO DEFINIRE L'INSIEME DEGLI ELEMENTI DI I CHE HANNO LA PROPRIETÀ P CHE SI SCRIVE

$$J = \{ x \in I : P(x) \}$$

FACCIAMO DUE PICCOLE OSSERVAZIONI:

1) BASTA SCRIVERE $P(x)$ NON C'È BISOGNO DI SCRIVERE $P(x)$ È VERA

2) SPESSO L'INSIEME I NON LO SPECIFICHEREMO

ESEMPI

UN INSIEME PUÒ AVERE DESCRIZIONI DIVERSE

1) $$K = \{ x \in \mathbb{R} : x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2 = 0 \}$$

$$L = \{ x \in \mathbb{R} \mid (x-1)(x-2) = 0 \}$$

ANCHE SE LA FRASE CHE DESCRIVE L'INSIEME L È MOLTO PIÙ SEMPLICE, I DUE INSIEMI SONO UGUALI. INFATTI

$$L = \{1, 2\}$$

PER CAPIRE COME È FATTO L'INSIEME K OSSERVIAMO CHE

$$x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)(x^2+1)$$

QUINDI ANCHE

$$K = \{1, 2\}.$$

IN PARTICOLARE $L = K$.

2) SE DEFINIAMO

$$M = \{ x \in \mathbb{R} \mid x^6 + x^4 + x^2 + 1 = 0 \}$$

È UN MODO UN PO' COMPLICATO DI DIRE $M = \emptyset$ INFATTI PER $x \in \mathbb{R}$

$$x^6 + x^4 + x^2 + 1 \geq 1$$

E QUINDI $x^6 + x^4 + x^2 + 1 = 0$ NON HA SOLUZIONE.

MOLTI ESERCIZI CONSISTONO PROPRIO NEL PASSARE DA UNA DESCRIZIONE DEL SECONDO TIPO AD UNA DEL PRIMO TIPO. PER ESEMPIO RISOLVERE UN'EQUAZIONE, COME ILLUSTRA L'ESEMPIO DI K E L VUOL DIRE PASSARE DA UNA DESCRIZIONE MEDIANTE UNA PROPRIETÀ AD

UNA DESCRIZIONE MEDIANTE UNA LISTA COME ABBIAMO FATTO SOPRA PER L DA

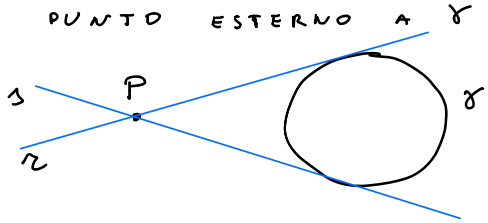
$$K = \{ x \in \mathbb{R} : x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2 = 0 \}$$

A $K = \{1, 2\}$.

ESEMPI

GLI ELEMENTI DI UN INSIEME POSSONO ESSERE A LORO VOLTA INSIEMI.

1) SIA π IL PIANO E SIA γ UN CERCHIO E P UN PUNTO ESTERNO A γ



SIA N L'INSIEME DELLE RETTE PASSANTI PER P E TANGENTI A γ. N HA QUINDI DUE ELEMENTI: LA RETTA r E LA RETTA s.

SI NOTI CHE $r \in N$ MA $P \notin N$ E $r \not\subset N$ (r NON È CONTENUTO IN N)

2) L'INSIEME

$$P = \{ \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R} \}$$

È UN INSIEME CON 4 ELEMENTI CHE SONO A LORO VOLTA 4 INSIEMI

ESEMPIO Capire come sono fatti i seguenti insiemi

$$Q = \{ x \in \mathbb{R} \mid \exists y \in \mathbb{R} \text{ tale che } x = y^2 \}$$

$$R = \{ x \in \mathbb{R} \mid \forall y \in \mathbb{R} , \quad x = y^2 \}$$

$$S = \{ x \in \mathbb{R} \mid \forall y \in \mathbb{R} , \quad x = xy^2 \}$$

Q è l'insieme dei numeri reali che sono il quadrato di un numero reale quindi

$$Q = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0 \}$$

R è l'insieme dei numeri x tali che

$$x = y^2 \quad \text{per ogni } y$$

ma questo vuol dire in particolare

$$x = 0^2 = 1^2$$

che è impossibile. Quindi

$$R = \emptyset$$

$S = \{0\}$. Per far vedere questo devo far vedere che 0 è l'unico numero che ha la proprietà richiesta.

Come prima cosa faccio vedere che se $x \in S$ allora $x = 0$. Infatti se $x \in S$ allora $x = x y^2$ per ogni y e in particolare per $y = 0$ otteniamo $x = x \cdot 0^2 = 0$.

quindi se $x \in S$ allora $x = 0$.

viceversa se $x = 0$ allora l'equazione

$$0 = 0 \cdot y^2$$

è vera per ogni y e quindi $0 \in S$

Come mostra questo esempio l'uso dei quantificatori (per ogni, esiste) rende subito le cose più complicate. Per esperienza per molti studenti questo è un problema

<u>Esercizio</u>

Sia X l'insieme di tutte le persone.

Ci si faccia una idea dei seguenti insiemi

$$A = \{ x \in X : \exists y \in X \text{ tale che } x \text{ e } y \text{ sono amici} \}$$

$$B = \{ x \in X : \forall y \in X, \ x \text{ e } y \text{ sono amici} \}$$

$$C = \{ x \in X : \forall y \in X, \ x \text{ sa dell'esistenza di } y \}$$

$$D = \{ x \in X : \exists y \in X \text{ tale che } x \text{ sa dell'esistenza di } y \}$$

$$F = \{ x \in X : \forall x \in X, \ y \text{ sa dell'esistenza di } x \}$$

$$G = \{ x \in X : \exists x \in X \text{ tale che } y \text{ sa dell'esistenza di } x \}$$

<u>NOTA</u> : "sa dell'esistenza" non è, forse, per tutti chiaro cosa significhi. Io so dell'esistenza di Trump, ma non credo proprio Trump sappia della mia esistenza

<u>Esercizio</u> Fare gli esercizi 1.7, 1.8, 1.9.

OPERAZIONI TRA INSIEMI

DATI DEGLI INSIEMI POSSIAMO COSTRUIRNE DI NUOVI MEDIANTE LE SEGUENTI OPERAZIONI.

- $\cup$ = UNIONE
- $\cap$ = INTERSEZIONE
- $\setminus$ = DIFFERENZA
- $\times$ = PRODOTTO (PER QUESTO VEDI LA PROSSIMA SEZIONE)

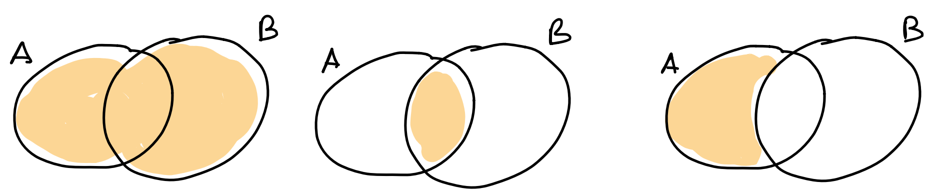
SE A E B SONO DUE INSIEMI

$$A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ o } x \in B \}$$

$$A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ e } x \in B \}$$

$$A \setminus B = \{ x \mid x \in A \text{ e } x \notin B \}$$

L'ULTIMO DEI TRE SI LEGGE "A SENZA B".
È FACILE E MOLTO UTILE RAPPRESENTARE QUESTI INSIEMI GRAFICAMENTE



$A \cup B$ $A \cap B$ $A \setminus B$

OSSERVAZIONE

Se $A \cap B = \emptyset$ (si dice che A e B sono disgiunti) allora

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B)$$

In generale però questo non è vero. Per esempio se

$A = \{1, 2, 3\} \qquad B = \{2, 3, 5\}$

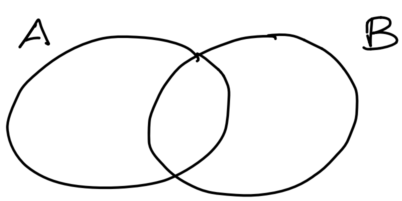
allora $A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$

e non è vero che $4 = 3 + 3$.

In generale vale la seguente formula

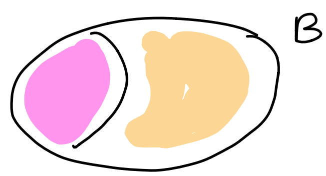
$$\text{card}(A \cup B) + \text{card}(A \cap B) = \text{card}(A) + \text{card}(B)$$

<u>dim.</u>



concentriamoci prima su B.

$$B = (B \setminus A) \cup (B \cap A)$$



e inoltre $(B \setminus A) \cap (B \cap A) = \emptyset$

quindi

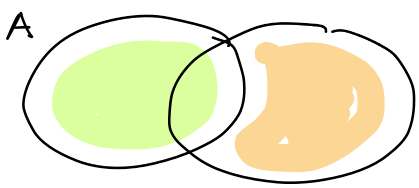
$$\text{card } B = \text{card}(B \setminus A) + \text{card}(B \cap A).$$

da cui

$$\text{card } B \setminus A = \text{card } B - \text{card}(B \cap A)$$

Ora osserviamo che

$$A \cup B = \underline{A} \cup \underline{(B \setminus A)}$$



e che $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$. Quindi

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B \setminus A)$$

se sostituisco la formula trovata prima per $\text{card}(B \setminus A)$ ottengo

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}\, A + \text{car}\, B - \text{car}\, A \cap B$$

da cui ricavo la tesi #

__Esercizio__

In una classe <u>ogni studente</u> gioca a calcio o a pallavolo.

15 giocano a calcio

10 " a pallavolo

5 " sia a calcio che a pallavolo

quanti sono gli studenti?

$A = \{$ studenti che giocano a calcio $\}$
$B = \{$ " " " pallavolo $\}$
$A \cap B = \{$ " " a calcio e a pallavolo $\}$

$A \cup B$ è tutta la classe

$$\begin{aligned} card(A \cup B) &= card(A) + card\, B - card\, A \cap B \\ &= 15 + 10 - 5 \\ &= 20 \end{aligned}$$

#

PRODOTTO TRA INSIEMI

DEFINIAMO ORA IL PRODOTTO TRA INSIEMI

DEFINIZIONE

SE A E B SONO DUE INSIEMI ALLORA UNA COPPIA ORDINATA DI A E B È UNA ESPRESSIONE DELLA FORMA

$$(a, b)$$

CON a UN ELEMENTO DI A E b UN ELEMENTO DI B.

L'INSIEME PRODOTTO $A \times B$ È L'INSIEME DI TUTTE LE POSSIBILI COPPIE.

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ e } b \in B\}$$

PIÙ IN GENERALE SE HO n INSIEMI $A_1, A_2 \dots A_n$ POSSO DEFINIRE UNA n-UPLA ORDINATA DI $A_1, A_2 \dots A_n$ COME UNA ESPRESSIONE

$$(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

CON $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n$ È IL PRODOTTO $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ COME L'INSIEME DELLE n-UPLE ORDINATE:

$$A_1 \times \dots \times A_n = \{(a_1 \dots a_n) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n\}$$

ESEMPIO

$A = \{1, 2, 3\}$ $\qquad$ $B = \{3, 5\}$

Allora gli elementi di $A \times B$ sono

$(1, 3)$ $\quad$ $(2, 3)$ $\quad$ $(3, 3)$

$(1, 5)$ $\quad$ $(2, 5)$ $\quad$ $(3, 5)$

OSSERVAZIONE

$$\text{card}(A \times B) = \text{card}(A) \cdot \text{card}(B)$$

dim

Sia

$$A = \{1, 2, 3, \dots\ a\}$$

$$B = \{1, 2, 3, \dots\ b\}$$

Elenchiamo gli elementi di A lungo le colonne e quelli di B lungo le righe e le coppie come qui sotto ↓

B \ A	1	2	3	4	...	a
1	(1,1)	(2,1)	(3,1)			(a,1)
2	(1,2)	(2,2)				(a,2)
3						

b | $(1,b)$ $(2,b)$ $\dots$ (a,b)

In questo modo ho elencato tutte le coppie. Quindi ho $a \cdot b$ coppie.

#

FUNZIONI

Siano A e B due insiemi. Una funzione da A a B è una "regola" che associa ad ogni elemento di A un elemento di B. L'espressione "regola" è un po' impropria qui, perché fa pensare a un procedimento che dato un elemento di A permette di calcolare un elemento di B. La definizione di funzione è in realtà più generale di così, ma questa definizione intuitiva di funzione è sufficiente per gli scopi del corso. Se f è una funzione da A a B scriviamo

$$f : A \to B$$

e se $a \in A$ indichiamo con $f(a)$ l'elemento di B associato ad a.

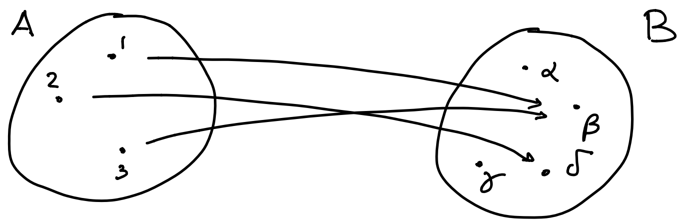
Esempi

① $A = \{1, 2, 3\}$ $\quad$ $B = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$

Definisco $f : A \longrightarrow B$ nel seguente modo

$$f(1) = \beta \qquad f(2) = \delta \qquad f(3) = \beta$$

In questo caso possiamo anche rappresentare graficamente la funzione nel seguente modo



② Sia $A = \{$parole della lingua italiana$\}$

e sia $B = \{$lettere dell'alfabeto$\}$

e $f : A \longrightarrow B$

è definita nel seguente modo:

$$f(\text{parola}) = 1^{a} \text{ lettera della parola}$$

Per esempio

$$f(\text{"carta"}) = c$$
$$f(\text{"banco"}) = b$$

③ Se $A = B$ è un insieme non vuoto c'è sempre una funzione $Id_A : A \longrightarrow A$ definita mediante

$$Id_A(a) = a$$

per ogni $a \in A$

(4) Se $A = B = \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è definita mediante

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + e^x & \text{se } x \geq 3 \\ x - 1 & \text{se } x \in \mathbb{Z} \text{ e } x < 3 \\ x & \text{se } x < 3 \text{ e } x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

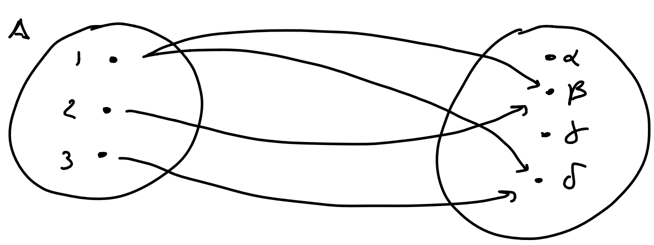
(5) Se $A = B$ è il piano euclideo e $\mathcal{R} \subset A$ è una retta allora

$$f : A \longrightarrow A$$

definita da $f(P) = P'$ con P' il simmetrico di P rispetto alla retta $\mathcal{R}$.

(6) Sia $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$

Il disegno seguente è la rappresentazione grafica di una funzione?



Svolg. No perché $f(1)$ non è definito per bene. Potrebbe essere β oppure δ.

Funzioni iniettive e surgettive

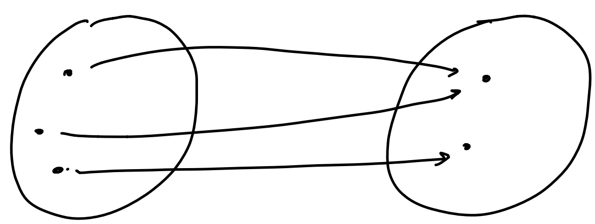
Una funzione $f: A \to B$ si dice surgettiva se ogni elemento di B è l'immagine di un elemento di A, ovvero se

$$\forall b \in B \quad \exists a \in A \text{ tale che } f(a) = b .$$

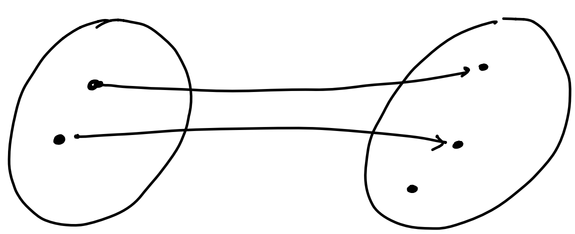
Una funzione $f: A \to B$ si dice iniettiva se manda elementi distinti in elementi distinti, ovvero se $\forall a, \alpha \in A$ se $a \neq \alpha$ allora $f(a) \neq f(\alpha)$
C'è un modo equivalente per descrivere queste proprietà che spesso risulta utile:

$$\forall a, \alpha \in A \quad \text{se } f(a) = f(\alpha) \text{ allora } a = \alpha .$$

Esempio

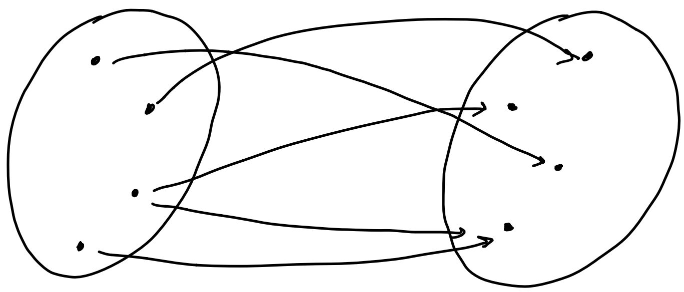


esempio di una funzione surgettiva ma non iniettiva

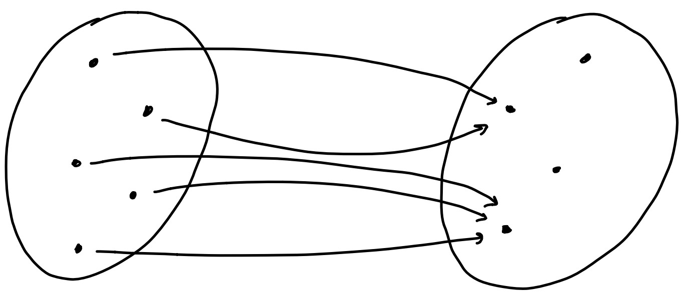


esempio di funzione iniettiva ma non surgettiva

__Esercizio__ quali dei seguenti disegni sono la rappresentazione grafica di una funzione? quali di una funzione iniettiva? e quali di una funzione surgettiva?



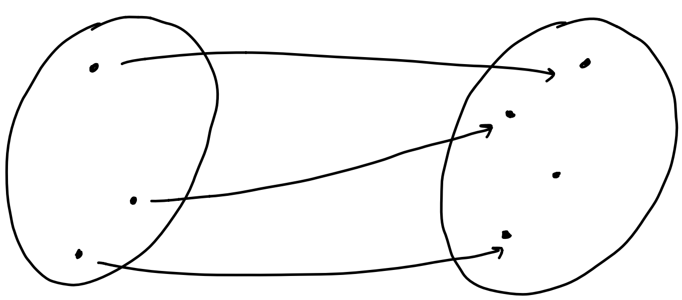
NON È UNA FUNZIONE



È UNA FUNZIONE

NON È INIETTIVA

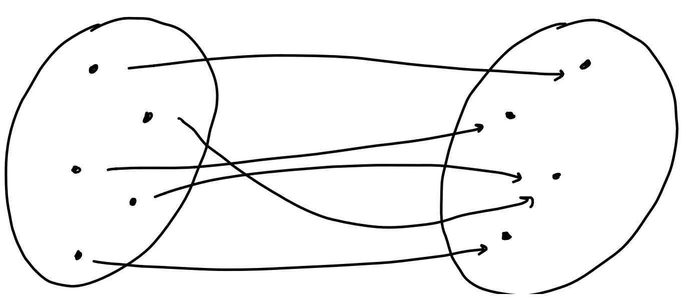
NÉ SURGETTIVA



È UNA FUNZIONE

INIETTIVA MA NON

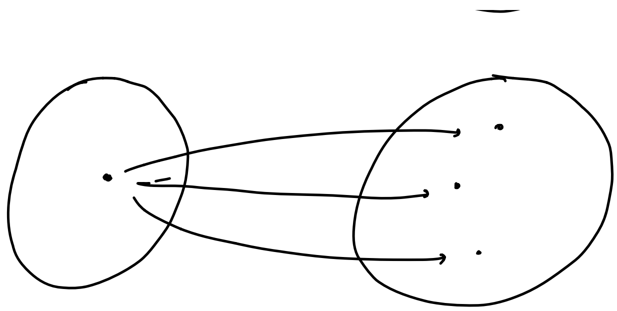
SURGETTIVA



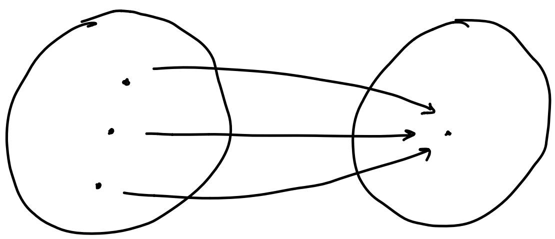
È UNA FUNZIONE

SURGETTIVA MA NON

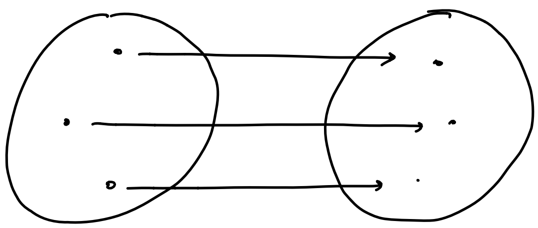
INIETTIVA



.....



.....



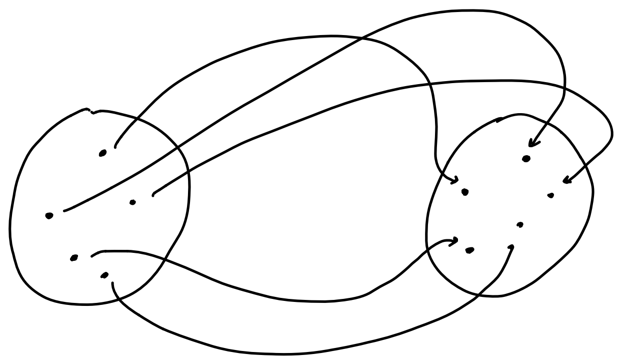
.....

Funzioni bigettive e funzione inversa

Una funzione si dice bigettiva se è sia iniettiva che surgettiva. Se esplicitiamo queste due proprietà troviamo che una funzione $f: A \longrightarrow B$ è bigettiva se e solo se per ogni elemento b di B esiste un unico elemento di A che ha come immagine b. Ovvero se

$$\forall b \in B \quad \exists_1 \, a \in A \text{ tale che } f(a) = b.$$

Esempio



Esempio

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f(x) = 3x + 5$$

è bigettiva.

svolgimento

In questo caso $A = B = \mathbb{R}$. Quindi la definizione di bigettività si scrive:

$$\forall b \in \mathbb{R} \quad \exists_1 a \in \mathbb{R} \text{ tale che } \quad 3a + 5 = b.$$

Quindi si tratta di vedere quante soluzioni ha l'equazione

$$3a + 5 = b$$

L'equazione, in questo caso è molto semplice, è equivalente a

$$3a = b - 5$$

e quindi ha come unica soluzione

$$a = \frac{b-5}{3}$$

#

Quando $f: A \to B$ è una funzione bigettiva allora possiamo definire una funzione $g: B \to A$ con la regola

$$g(b) = a \quad \text{se} \quad f(a) = b.$$

La funzione g così costruita si chiama funzione inversa e si indica con f^{-1}.

<u>NOTA</u> La notazione f^{-1} si può confondere con la notazione per il reciproco di un numero $\frac{1}{a}$ che si indica anche con a^{-1}. Ma sono due cose completamente diverse.

<u>Esempio</u>

$$A = \{1, 2, 3\} \qquad B = \{\alpha, \beta, \gamma\}$$

$$f: A \to B \qquad f(1) = \beta \qquad f(2) = \gamma \qquad f(3) = \alpha$$

allora $\quad f^{-1}(\alpha) = 3 \quad f^{-1}(\beta) = 1 \quad f^{-1}(\gamma) = 2.$

<u>Esempio</u> $\quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = 3x + 5.$

Allora $\quad f^{-1}(x) = \dfrac{x-5}{3}$

<u>svolgimento</u> Abbiamo già visto in un esempio precedente che $f(a) = b$ se e solo se $a = \dfrac{b-5}{3}$

e quindi $\quad f^{-1}(b) = \dfrac{b-5}{3}$

#

Immagine e immagine inversa di un sottoinsieme

Sia $f: A \to B$ una funzione. Allora l'immagine di f è definita come

$$\operatorname{Im} f = \{ f(a) : a \in A \}$$

Esempio

$$f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \qquad f(x) = 2x$$

$\mathrm{Im}\, f$ è l'insieme dei numeri pari

Esercizio

Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione
$$f(x) = x^2 + 3x + 2$$
Determinare l'immagine di f.

Svolgimento L'immagine sono gli elementi $y \in \mathbb{R}$ tali che esiste $x \in \mathbb{R}$ che verifica $f(x) = y$, ovvero sono le $y \in \mathbb{R}$ tali che l'equazione nella variabile x
$$y = x^2 + 3x + 2$$
ha soluzione. Possiamo riscrivere l'equazione nella forma
$$x^2 + 3x + 2 - y = 0$$
che ha soluzione se e solo se
$$\Delta = 9 - 8 + 4y = 1 + 4y \geq 0$$
ovvero per $y \geq -\frac{1}{4}$. Quindi
$$\mathrm{Im}\, f = \left\{ y \in \mathbb{R} : y \geq -\frac{1}{4} \right\} = \left[-\frac{1}{4}, +\infty\right)$$
#

Osservazione $f: A \to B$ f è surgettiva se e solo se $\operatorname{Im} f = B$. #

Se $f: A \to B$ e $C \subset A$ definiamo l'immagine di C tramite f come

$$f(C) = \{ f(a) : a \in C \}$$

#

Esempio $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = \sin(2\pi x)$

Sia $C = \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$. Allora

$$f(C) = \{0\}$$

#

Se $f: A \to B$ e $D \subset B$ definiamo l'immagine inversa di D tramite f come

$$f^{-1}(D) = \{ a \in A : f(a) \in D \}.$$

#

Esempio

Sia $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}$

Sia $f(1) = \beta$ $f(2) = \varepsilon$ $f(3) = \beta$ $f(4) = \alpha$

- Se $D = \{\gamma\}$ $f^{-1}(D) = \emptyset$
- Se $D = \{\alpha, \beta\}$ $f^{-1}(D) = \{1, 3, 4\}$

Esempio

Sia $A = B = \mathbb{R}$ e sia $f(x) = x^2 - 1$

Se $D = \{0\}$ $f^{-1}(D) = \{-1, 1\}$

Se $D = \{-2\}$ $f^{-1}(D) = \emptyset$

Se $D = \mathbb{R}_+ = (0, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$

$f^{-1}(D) = \{x \in \mathbb{R} : x < -1 \text{ o } x > 1\}$

NOTA Se $f : A \to B$ è una funzione bigettiva abbiamo definito la funzione inversa $f^{-1} : B \to A$.
Si noti che l'immagine inversa di un sottoinsieme, $f^{-1}(D)$ è definita anche quando f non è bigettiva e la funzione inversa non è definita. Quindi con lo stesso simbolo f^{-1}, indichiamo in realtà tre cose diverse

- Se $f : A \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ha senso considerare $\frac{1}{f}$ la funzione reciproca (Noi cercheremo di usare sempre $\frac{1}{f}$)
- Se $f : A \to B$ è bigettiva è definita la funzione inversa $f^{-1} : B \to A$
- Se $f : A \to B$ qualsiasi e $D \subset B$ ha sempre senso considerare $f^{-1}(D)$

Esercizio $f : A \to B$. Sia $C \subset A$ e $D \subset B$.

- Dimostrare che $f^{-1}(f(C)) \supset C$
- Dimostra che $f(f^{-1}(D)) \subset D$

Composizione di funzioni

Siano $f: A \longrightarrow B$ e $g: B \longrightarrow C$ due funzioni.
Allora possiamo costruire una nuova funzione

$$h: A \longrightarrow C$$

definita da

$$h(a) = g(f(a))$$

ovvero prima calcolo $b = f(a)$ e poi calcolo $g(b)$. La funzione così ottenuta si chiama la funzione composta e si indica con

$$g \circ f$$

si legge f composto g.

Esempio

$A = \{\text{persone}\}$ $\quad B = \{\text{parole}\}$ $\quad C = \{\text{lettere}\}$

$f: A \longrightarrow B$ associa ad ogni persona il suo nome

$g: B \longrightarrow C$ associa ad ogni parola la prima lettera

$h = g \circ f : A \longrightarrow B$ associa ad ogni persona l'iniziale del nome.

Esempio

$f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ $\qquad f(n) = 2n+1$

$g: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ $\qquad g(n) = n^2 + 2$.

Allora $g \circ f(n) = g(f(n))$

$$= g(2n+1)$$

$$= (2n+1)^2 + 2 \qquad *$$

$$= 4n^2 + 4n + 3$$

Spiego meglio il passaggio indicato con $*$

$f(n) = 2n+1 = m$ e

$g(m) = m^2 + 2 = (2n+1)^2 + 2$

#

Abbiamo già incontrato la funzione identità

$id_A : A \longrightarrow A \qquad id_A(a) = a \quad \forall a$

Esercizio Sia $f : A \longrightarrow B$, allora

1) $id_B \circ f = f$

2) $f \circ id_A = f$

3) Se f è bigettiva

$f^{-1} \circ f = id_A$ e $f \circ f^{-1} = id_B$

Restrizione di una funzione ad un sottoinsieme

Se $f : A \longrightarrow B$ è una funzione e $C \subset A$

possiamo definire la restrizione di f a C

$$f|_C : C \longrightarrow B$$

definita da $f|_C(c) = f(c) \quad \forall c \in C$.

Cioè $f|_C$ è uguale a f ma è definita solo su C

Esempio

Sia $A = \mathbb{R}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}$

$f : A \longrightarrow B \qquad f(x) = x^2 + 1$

Sia $C = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$

- $f : A \longrightarrow B$ è suriettiva ma non iniettiva.
- $f|_C : C \longrightarrow B$ è invece biettiva.