$\boxed{\text{ES. } 15.12}$ $V = \mathbb{R}^4$

$$U = \mathrm{Span}(u_1, u_2) \qquad u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{pmatrix} : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 4x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 11x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \right.$$

- Calcolare le dimensioni di U e W

$\dim U = 2$ perché u_1 e u_2 non sono uno multiplo dell'altro e quindi sono lin. indip. QUINDI u_1 e u_2 sono una ~~base~~ di U perché per definizione U è generato da u_1 e u_2

$$W = N(L_A) \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & 5 & 11 & 1 \end{pmatrix}$$

CALCOLO RANGO A

$$A \overset{\text{RIDUCO A SCALINI}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 8 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\text{rango } A = 2$ $\qquad \dim N(L_A) = \dim(\mathbb{R}^4) - \dim(\mathrm{Im}\, L_A)$
$= 4 - 2 = 2.$

$$\boxed{\dim W = 2}$$

OSSERVAZIONE $\qquad W = N(L_A) = N\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

b) CALCOLARE $\dim(W+U)$ e $\dim(W\cap U)$

$$\dim(W+U) + \dim(W\cap U) = \underset{2}{\dim W} + \underset{2}{\dim U} = 4$$

IN QUESTO CASO CALCOLO $W \cap U$

[• SE W E U SONO SOTTOSPAZI

COME $\mathrm{SPAN}(w_1 \dots w_h)$ $\mathrm{SPAN}(u_1 \dots u_k)$]

O EQUIVALENTEMENTE W e U SONO DESCRITTI

COME IMMAGINI DI APP ALLORA

• $W+U = \mathrm{SPAN}(w_1 \dots w_h, u_1, \dots u_k)$

• SE W È DESCRITTO ~~COME~~ DA EQ

$$\boxed{W: \begin{cases} eq_1 = 0 \\ eq_2 = 0 \\ eq_3 = 0 \end{cases}} \quad \text{e pure} \quad \boxed{U: \begin{cases} eq'_1 = 0 \\ eq'_2 = 0 \end{cases}}$$

$W = N(L_A)$ $\qquad$ $W = N(L_B)$

$W \cap U = \{ v \in V \cdot\ v$ verifica le eq che defin W e v verifica le eq che defin $U \}$

$$\begin{cases} eq_1 = 0 \\ eq_2 = 0 \\ eq_3 = 0 \\ eq_1' = 0 \\ eq_2' = 0 \end{cases}$$
]

TORNIAMO ALL'ESERCIZIO

$U = \mathrm{Span}(u_1, u_2)$ $\qquad W = N(L_B)$ $\qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

CALCOLO $U \cap W$.

$$U \cap W = \{ v \in U : v \in W \}$$

$$= \{ a u_1 + b u_2 : a, b \in \mathbb{R} \quad a u_1 + b u_2 \in W \}$$

$$a u_1 + b u_2 = a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 4b \\ 2a + 3b \\ 3a + 2b \\ 4a + b \end{pmatrix} \underline{\underline{\in W}} \; ?$$

VADO A VEDERE PER QUALI a, b IL VETTORE CHE HO CALCOLATO È IN W.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 4x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

SOSTITUENDO

$$\begin{cases} (a + 4b) + \dots + (4a + b) = 0 \\ (2a + 3b) + 4(3a + 2b) - (4a + b) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10a + 10b = 0 \\ 10a + 10b = 0 \end{cases} \qquad a + b = 0 \qquad 0 = 0$$

$$\boxed{\begin{matrix} a = 0 \\ b = 0 \end{matrix}}$$

$$W \cap U = \{ a u_1 + b u_2 : a, b \in \mathbb{R} \quad a + b = 0 \}$$

$b = -a$

$0 u_1 + 0 u_2$

$$W \cap U = \{ a(u_1 - u_2) : a \in \mathbb{R} \} = \operatorname{Span}(u_1 - u_2)$$

$$= \operatorname{Span} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

- $\dim W \cap U = 1$
- $\dim W + U = 3$

a

W

$$W \cap U = \{ \underline{a u_1 + b u_2} : a, b \in \mathbb{R} \quad \underline{\underline{0 = 0}} \}$$

$= U$

$\boxed{13.3}$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -5 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$ CALCOLARE, SE ESISTE, A^{-1}

VOGLIO VEDERE SE ESISTE UNA MATRICE B 3x3

$$A \cdot B = I$$

$$B = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} Av_1 & Av_2 & Av_3 \end{pmatrix} = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\hphantom{A \cdot B = (Av_1 \; Av_2 \; Av_3) = I = } \;\; e_1 \quad e_2 \quad e_3$$

CIOÈ v_1 v_2 v_3 (SE ESISTONO) SONO LE SOLUZIONI DEI SISTEMI,

v_1 $\quad A x = e_1$ $\{$

v_2 $\quad A x = e_2$ $\{$

v_3 $\quad A x = e_3$ $\{$

LE MATRICI ASSOCIATE AL SISTEMA

$(A \mid e_1)$ $\quad (A \mid e_2)$ $\quad (A \mid e_3)$

SCRIVO A UNA SOLA VOLTA

$$\left(A \mid e_1 \mid e_2 \mid e_3 \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 3 & -1 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 3 & -1 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2+\frac{2}{3} & 1+\frac{10}{3} & -2/3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 3 & -1 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4/3 & 13/3 & -2/3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & \boxed{-1/3} & \boxed{-5/3} & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \boxed{-13/4} & +1/2 & 0 & -3/4 \\ 0 & 0 & 1 & -1/6 & 1/6 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & -1/3 & 0 & \frac{1}{3}+\left(-\frac{1}{6}\right)\frac{5}{3} & \frac{1}{6}\cdot\frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2}+\frac{13}{4}\cdot\left(-\frac{1}{6}\right) & \frac{1}{6}\cdot\frac{13}{4} & -3/4 \\ 0 & 0 & 1 & -1/6 & 1/6 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & -1/3 & 0 & +1/18 & 5/18 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/24 & 13/24 & -3/4 \\ 0 & 0 & 1 & -1/6 & 1/6 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{18}+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{24}\right) & \frac{5}{18}+\frac{1}{3}\,\frac{13}{24} & 0+\frac{1}{3}\,\frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -1/24 & 13/24 & -3/4 \\ 0 & 0 & 1 & -1/6 & 1/6 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 3/72 & 33/72 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & -1/24 & 13/24 & -3/4 \\ 0 & 0 & 1 & -1/6 & 1/6 & 0 \end{array}\right)$$

u_1

v_1 $\quad A\,x = e_1 \sim I\cdot x = u_1 \quad x = u_1 \quad v_1 = u_1$

v_2 $\quad A\,x = e_2 \sim I\,x = u_2 \quad x = u_2 \quad v_2 = u_2$

v_3 $\quad A\,x = e_3 \sim I\,x = u_3 \quad x = u_3 \quad v_3 = u_3$

$A\cdot B = I$

ESERCIZIO

$F : V \longrightarrow V$ $\quad \boxed{F^2 = Id}$

DIMOSTRARE CHE F È DIAGONALIZZABILE

- QUALI SONO I POSSIBILI AUTOVALORI DI F?

CERCO I λ TALI CHE ESISTE $v \neq 0$ e $Fv = \lambda v$)

SUPPONGO CHE λ SIA UN AUTOVALORE CON $v \neq 0$ e CHE $Fv = \lambda v$

CALCOLO $= F^2 v = F(F(v)) = F(\lambda v) = \lambda F(v) = \lambda^2 v$

$$\underset{\displaystyle I v = v}{\shortparallel}$$

$\lambda^2 v = v$ OVVERO $(\lambda^2 - 1) v = 0$.

QUINDI $\lambda^2 - 1 = 0$ OVVERO $\boxed{\lambda = \pm 1}$

- $\lambda = 1$ $\quad \boxed{V_1 = N(F - I)} = \{v : Fv = v\}$

$\lambda = -1$ $\quad \boxed{V_{-1} = N(F + I)} = \{v : Fv = -v\}$

SO GIÀ CHE V_1 E V_{-1} SONO IN SOMMA DIRETTA

CIOÉ CHE $V_1 \cap V_{-1} = \{0\}$

DIMOSTRO CHE $V_1 + V_{-1} = V$

$\forall v \in V$ $\quad \boxed{\exists\ u \in V_1 \text{ e } w \in V_{-1} : \ v = u + w}$ $\quad u + w = v$

DEVO CAPIRE COME COSTRUIRE u e w DATO v

PROVO AD APPLICARE F

$$Fv = Fu + Fw = u - w$$

$$v = u + w$$
$$Fv = u - w$$

RICAVO $\underbrace{u = \frac{v + Fv}{2}}$ $\quad w = \frac{v - Fv}{2}$

DATO $v \in V$

SCELGO $u = \frac{v + Fv}{2}$ $\quad w = \frac{v - Fv}{2}$

E VERIFICO CHE HANNO LE PROPRIETÀ VOLUTE

OK

$u \in V_1$ $\quad w \in V_{-1}$ $\quad u + w = v$

$\downarrow$

$Fu = u$ $\quad Fw = -w$ $\quad \frac{v + \cancel{Fv}}{2} + \frac{v - \cancel{Fv}}{2} = v$

$$F\left(\frac{v + Fv}{2}\right) = \frac{F(v) + F^2 v}{2} = \frac{F(v) + v}{2} = u$$

VERIFICA SIMILE. (ESR.)

- GLI AUTOVALORI POSSIBILI SONO $\lambda = 1$ e $\lambda = -1$
- $V_1 = N(F - I) = \{v \in V : Fv = v\}$

$V_{-1} = N(F + I) = \{v \in V : Fv = -v\}$

$V_1 + V_{-1} = V$ $\quad V_1$ e V_{-1} SONO ~~IN~~ SOMMA DIRETTA

- Sia $v_1 \dots v_k$ una base di V_1

$u_1 \dots u_h$ - - - - V_{-1}

allora $v_1 \dots v_k\ u_1 \dots u_h$ è una base di autovettori

rispetto ad F di V.

ESERCIZIO COMPLICATO

A una matrice $n \times n$

p_A è un polinomio di grado n

$$p_A(t) = (-1)^n t^n + \ldots + \det(A)$$

$$A = \begin{pmatrix} e_{11} & & e_{14} \\ \vdots & & \\ e_{41} & & e_{44} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Det}\begin{pmatrix} e_{11}-\lambda & e_{12} & e_{13} & e_{14} \\ e_{21} & e_{22}-\lambda & e_{23} & e_{24} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33}-\lambda & e_{34} \\ e_{41} & e_{42} & e_{43} & e_{44}-\lambda \end{pmatrix}$$

QUESTO PEZZO.

PREMESSA

SIA B UNA MATRICE ($n \times n$) LE CUI ENTRATE $b_{ij}(\lambda)$ SONO POLINOMI IN λ

E FISSATO SUPPONIAMO CHE $\text{grado}\left(b_{ij}(\lambda)\right) \leq d_i$

PER OGNI j.

ALLORA DET B È UN POLINOMIO IN λ DI GRADO $\leq d_1 + \cdots + d_n$

DIMOSTRAZIONE

p.i. su n

$\boxed{n = 1}$ NON C'È NULLA DA DIM.

$$B = \left(b_{11}(\lambda)\right) \qquad \mathrm{Det}\, B = b_{11}(\lambda)$$

$\boxed{n-1 \Rightarrow n}$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11}(\lambda) & & b_{1n}(\lambda) \\ & & \\ b_{n1}(\lambda) & & b_{nn}(\lambda) \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Det}\, B = \underbrace{b_{11}}_{\text{pol in } \lambda \text{ di grado } \leq d_1} \cdot \underbrace{\mathrm{Det}(B_{11})}_{\text{pol in } \lambda \text{ di grado } \leq d_2 + \dots + d_n} - b_{21}\, \mathrm{Det}(B_{21}) \dots$$

pol in λ di grado $\leq d_1 + d_2 + \dots + d_n$

QUINDI È UN POL. IN λ DI GRADO $\leq d_1 + \dots + d_n$

#

COROLLARIO

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & & a_{1n} \\ & a_{22} - \lambda & \\ & & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}$$

$P_A(\lambda) = \mathrm{Det}(A - \lambda I)$ è un pol in λ di grado $\leq \overbrace{1 + \dots + 1}^{n \text{ volte}} = n$

VOGLIO DIMOSTRARE CHE IL COEFF DI λ^n è $(-1)^n$

$$\mathrm{Det} \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & & a_{1n} \\ & a_{22} - \lambda & \\ a_{n1} & & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}$$

$$= (a_{11} - \lambda)\, \mathrm{Det} \begin{pmatrix} a_{22} - \lambda & & a_{2n} \\ & \ddots & \\ a_{n2} & & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} - a_{21} \cdot \mathrm{Det} \begin{pmatrix} a_{12} & & a_{1n} \\ & \ddots & \\ a_{n2} & & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}$$

IPOTESI INDUTTIVA

$$\underline{(e_{11}-\lambda)\left((-1)^{n-1}\lambda^{n-1}+\dots\right)} + \underbrace{\text{pol in } \lambda \text{ di grado} \leq n-2}$$

$$\| $$

$$(-1)^n \lambda^n + \dots$$

$\boxed{\text{ES. 16 12}}$

$$A_t = \begin{pmatrix} t-1 & 2t & t \\ 0 & t-1 & 0 \\ 2 & t+2 & 1 \end{pmatrix}$$

- CALCOLO GLI AUTOVALORI DI A_t

$$P_{A_t}(\lambda) = \mathrm{Det}\left(A_t - \lambda\right) = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} t-1-\lambda & 2t & t \\ 0 & t-1-\lambda & 0 \\ 2 & t+2 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (t-1-\lambda)\,\mathrm{Det}\begin{pmatrix} t-1-\lambda & t \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (t-1-\lambda)\left((t-1-\lambda)(1-\lambda) - 2t\right)$$

$$= (t-1-\lambda)\left(t-1-\cancel{\lambda}-\lambda t+\cancel{\lambda}+\lambda^2-2t\right)$$

$$= (t-1-\lambda)\left(\underline{\lambda^2-\lambda t-1-t}\right)$$

$\lambda_1 = t-1$ è radice

$$\lambda^2 - \lambda t - 1 - t = 0$$

$$\Delta = t^2 + 4 + 4t = (t+2)^2$$

$$\lambda_{2,3} = \frac{t \pm (t+2)}{2} \quad \begin{cases} t+1 \\ -1 \end{cases}$$

$\lambda_1 = t-1 \qquad \lambda_2 = t+1 \qquad \lambda_3 = -1$

- SE $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ SONO DISTINTI ALLORA A_t È DIAGON.

$\lambda_1 \neq \lambda_2$ PER OGNI t

$\lambda_1 = \lambda_3$ VUOL DIR $t-1=-1$ OVVERO $t=0$

$\lambda_2 = \lambda_3$ " " $t+1=-1$ " $t=-2$

SE $t \neq 0, -2$ λ_1 λ_2 λ_3 SONO DISTINTI E A_t È DIAGONALIZZABILE

STUDIO I CASI $t=0$ e $t=-2$

$t=0$ $\lambda_1 = -1$ $\lambda_2 = 1$ $\lambda_3 = -1$

$1 \quad -1 \qquad me_1 = 1 \qquad me_{-1} = 2$

CALCOLIAMO LE MOLTEPLICITÀ GEOMETRICHE.

$$A_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$mg_1 = \dim\left(N(A_0 - I)\right) = 3 - rk(A_0 - I) = 1 = me_1$$

$$A_0 - I = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad rk(A_0 - I) = 2$$

$$mg_{-1} = \dim\left(N(A_0 + I)\right) = 3 - rk(A_0 + 2I) = 2 = me_{-1}$$

$$A_0 + I \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad rk(A_0 + I) = 1$$

QUINDI A_0 è DIAGONALIZZABILE

$\boxed{t=-2}$

$\lambda_1 = -3 \qquad \lambda_2 = -1 \qquad \lambda_3 = -1$

$me_{-3} = 1 \qquad me_{-1} = 2$

CALCOLIAMO LE MOLTEPLICITÀ GEOM.

$$A_{-2} = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$mg_{-3} = \dim\left(N\left(A_{-2} + 3I\right)\right) = 3 - 2 = 1 = me_{-3}$$

$$A_{-2} + 3I = \begin{pmatrix} 0 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad rk = 2$$

$$mg_{-1} = \dim\left(N\left(A_{-2} + I\right)\right) = 3 - 2 = 1 \neq me_{-1} = 2$$

$$A_{-2} + I = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad rk = 2$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

PER $t = -2$ A_t NON È DIAGONALIZZABILE

QUINDI A_t è DIAGON. SE E SOLO SE $t \neq -2$.

<u>OSSERVAZIONE</u> • $\underline{me_\lambda \geq mg_\lambda}$ È SEMPRE VERA.

SE $\boxed{me_\lambda = 1}$ VUOL DIRE CHE λ È UN AUTOVALORE

$\exists\, v \neq 0$ $\quad Av = \lambda v$ $\quad$ ovvero $\quad v \in \underline{N(A - \lambda I)}$

IN PARTICOLARE $N(A - \lambda I) \neq 0$

$$\boxed{mg_\lambda} = \dim\left(N(A - \lambda I)\right) \geq 1$$

E QUINDI $mg_\lambda = 1 = ma_\lambda$

A DIAGON. L_A DIAGON.

$\boxed{15.6}$

$T: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^5$

$\dim N(T) = 1$

$W \subset \mathbb{R}^5$ $\quad \dim W = 4$

1) $W \cap \operatorname{Im} T \neq 0$

PER IL TEO DIM. $\quad \dim \operatorname{Im} T = \dim \mathbb{R}^4 - \dim N(T) = 4 - 1 = 3$

PER LA FORMULA DI GRASSMANN

$$\dim (W \cap \operatorname{Im} T) = \dim W + \dim \operatorname{Im} T - \dim (\operatorname{Im} T + W)$$
$$= 4 + 3 - \dim (\operatorname{Im} T + W)$$

$\operatorname{Im} T + W \subset \mathbb{R}^5 \qquad \dim (\operatorname{Im} T + W) \leq 5$

$\dim (W \cap \operatorname{Im} T) \geq 7 - 5 = 2$

qui. $W \cap \operatorname{Im} T \neq 0$.

2) QUALI SONO LE POSSIBILI DIM DI $\operatorname{Im} T \cap W$.

$\dim W = 4 \qquad \dim \operatorname{Im} T = 3$

$W \subset \operatorname{Im} T + W \subset \mathbb{R}^5$

$4 \leq \dim (\operatorname{Im} T + W) \leq 5 \qquad \{$

$\dim(\mathrm{Im}\,T \cap W) = 7 - \dim(\mathrm{Im}\,T + W)$

QUINDI SE $\underline{\dim(\mathrm{Im}\,T + W) = 4}$ $\quad \dim \mathrm{Im}\,T \cap W = 3$

$\dim(\mathrm{Im}\,T + W) = 5 \quad \dim \mathrm{Im}\,T \cap W = 2$

COSTRUISCO DUE ESEMPI, UNO IN CUI $\dim \mathrm{Im}\,T \cap W = 3$ E UNO IN CUI $\dim(\mathrm{Im}\,T \cap W) = 2$

- $\dim(\mathrm{Im}\,T \cap W) = 3$ QUESTO SI VERIFICA QUANDO $\dim(\mathrm{Im}\,T + W) = 4$ OVVERO QUANDO $\mathrm{Im}\,T + W = W$

OVVERO $\mathrm{Im}\,T \subset W$

QUINDI DEVO COSTRUIRE UN ESEMPIO DI T e W TALI CHE $\boxed{\mathrm{Im}\,T \subset W}$

$$T = L_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{Rango } A = 3 \qquad \dim N(T) = 1.$$

$\mathrm{Im}\,L_A = \mathrm{Span}(e_1\ e_2\ e_3)$

Scelgo $W = \mathrm{Span}(e_1\ e_2\ e_3\ e_4)$

- $\dim(\mathrm{Im}\,T \cap W) = 2$ SI VERIFICA QUANDO $\dim(\mathrm{Im}\,T + W) = 5$ OVVERO QUANDO $\mathrm{Im}\,T \not\subset W$.

SCELGO $T = L_A$ COME PRIMA $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & 0 \\ & & 1 & 0 \\ & & & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

Allora $\mathrm{Im}\,T = \mathrm{Span}(e_1\ e_2\ e_3)$

Cerco W di $\dim = 4$ e $W \not\supset \mathrm{Im}\,T$

per esempio $W = \mathrm{Span}(e_2\ e_3\ e_4\ e_5) \not\ni e_1$

$$\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = -1 + t \end{cases}$$

$t = x - 1$

$$\boxed{\begin{cases} y = 1 + x - 1 = x \\ z = -1 + x - 1 = x - 2 \end{cases}}$$