Compito di geometria e algebra lineare del 17 luglio 2022

Istruzioni: Avete 2 ore e 30' di tempo. Non è sufficiente dare la risposta giusta, dovete fornire delle giiustificazioni. Durante lo svolgimento non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari né altri oggetti elettronici, pena l'annullamento del compito. Buon lavoro!

Esercizio 1. [7 punti] Rispondi alle domande seguenti.

(1) Siano $U, V, W \subset \mathbb{R}^2$ sottospazi di dimensione 1. È possibile che U, V, W siano in somma diretta?
(2) Siano $U, V, W \subset \mathbb{R}^3$ sottospazi di dimensione 1. È possibile che U, V, W siano in somma diretta?

In entrambi i casi, se la risposta è negativa devi dimostrarlo, se è positiva devi descrivere un esempio.

Esercizio 2. [10 punti] Considera il piano in $\mathbb{R}^3$ dato da

$$U = \{x + y + z = 0\}.$$

(1) Costruisci una funzione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\mathrm{Im} f = U$ e $\ker f \subset U$.
(2) Costruisci una funzione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\ker f = U$ e $\mathrm{Im} f \subset U$.

Esercizio 3. [8 punti] Considera la matrice seguente, dipendente da un parametro $t \in \mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t-2 \\ 0 & t+2 & 0 \\ t & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Determina per quali $t \in \mathbb{R}$ la matrice è diagonalizzabile.

Esercizio 4. [9 punti] Siano r e s due rette orientate incidenti in $\mathbb{R}^3$. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una rotazione di angolo α intorno a r, e sia $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una rotazione di angolo β intorno a s.

(1) La composizione $f \circ g$ è sicuramente una rotazione di un certo angolo θ intorno ad una certa retta passante per $P = r \cap s$. Spiega perché questo è vero.
(2) Nel caso in cui r e s sono ortogonali, determina $\cos\theta$ in funzione di $\cos\alpha$ e $\cos\beta$.

Soluzioni

Esercizio 1.

(1) No, perché avremmo $\dim(U+V+W) = \dim U + \dim V + \dim W = 1+1+1 = 3$ ma $U + V + W \subset \mathbb{R}^2$.
(2) Si, ad esempio U, V, W possono essere le rette generate dai vettori della base canonica di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 2. Notiamo intanto che una base di U è data dai vettori $(1, -1, 0)$ e $(0, 1, -1)$.

(1) Ad esempio $f = L_A$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(2) Ad esempio $f = L_A$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3. Gli autovalori sono $\lambda_1 = t + 2$, $\lambda_2 = t + 1$, $\lambda_3 = 3 - t$. Quando sono tutti diversi è diagonalizzabile. Valutiamo i casi in cui non sono tutti diversi.

L'uguaglianza $\lambda_1 = \lambda_2$ non è possibile. L'uguaglianza $\lambda_1 = \lambda_3$ si verifica per $t = 1/2$, e in questo caso calcolando le molteplicità geometriche si vede che è diagonalizzabile. L'uguaglianza $\lambda_2 = \lambda_3$ si verifica per $t = 1$, e in questo caso calcolando le molteplicità geometriche si vede che non è diagonalizzabile.

Quindi la matrice è diagonalizzabile per ogni $t \neq 1$.

Esercizio 4.

(1) Componendo due isometrie affini che preservano l'orientazione (cioè con $\det A = 1$) si ottiene sempre una isometria affine che preserva l'orientazione. Poiché la composizione deve fissare il punto P, ha qualche punto fisso e quindi è una rotazione intorno a qualche asse.

(2) Prendo un sistema di riferimento in cui P è l'origine e i primi due vettori della base sono quelli che generano r e s. In questo sistema di riferimento le rotazioni sono $f(x) = Ax$ e $g(x) = A'x$, con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix}$$

Quindi $f(g(x)) = AA'x$ e moltiplicando le matrici si ottiene

$$AA' = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ \sin\alpha\sin\beta & \cos\alpha & -\sin\alpha\cos\beta \\ -\cos\alpha\sin\beta & \sin\alpha & \cos\alpha\cos\beta \end{pmatrix}.$$

Vediamo che $2\cos\theta + 1 = \mathrm{tr}(AA') = \cos\alpha + \cos\beta + \cos\alpha\cos\beta$ e quindi

$$\cos\theta = \frac{1}{2}(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\alpha\cos\beta - 1).$$