COMPITI DI GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE DELL'ANNO 2020

Le soluzioni dei compiti sono in fondo al file

Compito di Geometria e algebra lineare di martedì 7 gennaio 2020: prima parte

Istruzioni: Avete 55 minuti di tempo a disposizione. Come prima cosa scrivete nome, cognome e matricola nello spazio qui sotto. Prima di consegnare il foglio trascrivetevi su un foglietto le risposte. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari, pena l'annullamento del compito.

Nome e cognome e matricola: ____________________

Domanda 1. Sia $z = 2 - 2i$. Calcolare modulo e argomento di z.

$\|z\| =$ $\qquad\qquad$ $arg(z) =$

Domanda 2. Per quali $a \in \mathbb{R}$ la seguente applicazione è diagonalizzabile?

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2+a & 0 \\ 0 & 0 & 2-a \end{pmatrix}$$

È diagonalizzabile per t

Domanda 3. Sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^5$ generato dai vettori $e_1 + e_5, e_2 + e_5, e_1 - e_2$ Sia $F : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^7$ tale che $N(F) \oplus W = \mathbb{R}^5$. Calcolare il rango di F

$rango(F) =$

Domanda 4. Sia u_1, u_2, u_3 una base di uno spazio vettoriale V e sia $v \in V$. Dire quali delle seguenti frasi sono vere (potrebbero essere anche tutte vere o tutte false):

A) Se $[v]_{u_1,u_2,u_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ allora u_1, u_2, v è una base di V;
B) I vettori u_1, u_2, u_3, v sono generatori dello spazio vettoriale V.

Le frasi vere sono

Domanda 5. Sia b un prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$ di segnatura $(1, 2, 0)$ Dire quali delle seguenti frasi sono vere (potrebbero essere anche tutte vere o tutte false):

A) Esiste un sottospazio di dimensione 2 sul quale b è definita negativa;
B) L'unico vettore isotropo è 0;

Le frasi vere sono

Domanda 6. Sia A una matrice 5×3 di rango 3 e siano v_1, v_2, v_3 le colonne di A. Dire quali delle seguenti frasi sono vere (potrebbero essere anche tutte vere o tutte false):

A) v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti;
B) Il sistema $A \cdot x = b$ ha soluzione per ogni b;
C) Il nucleo di L_A ha dimensione 3.

Le frasi vere sono

Compito di Geometria e algebra lineare di martedì 7 gennaio 2020: prima parte

Istruzioni: Avete 55 minuti di tempo a disposizione. Come prima cosa scrivete nome, cognome e matricola nello spazio qui sotto. Prima di consegnare il foglio trascrivetevi su un foglietto le risposte. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari, pena l'annullamento del compito.

Nome e cognome e matricola: ______________________________

Domanda 1. Sia $z = -3 + 3i$. Calcolare modulo e argomento di z.

$\|z\| =$ $\qquad\qquad$ $arg(z) =$

Domanda 2. Per quali $a \in \mathbb{R}$ la seguente applicazione è diagonalizzabile?

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 5+a & 0 \\ 0 & 0 & 5-a \end{pmatrix}$$

È diagonalizzabile per t

Domanda 3. Sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^5$ generato dai vettori $e_1 + e_5, e_2 + e_5, e_1 - e_2$. Sia $F : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^7$ tale che $N(F) \oplus W = \mathbb{R}^5$. Calcolare il rango di F

$rango(F) =$

Domanda 4. Sia u_1, u_2, u_3 una base di uno spazio vettoriale V e sia $v \in V$. Dire quali delle seguenti frasi sono vere (potrebbero essere anche tutte vere o tutte false):

A) I vettori u_1, u_2, u_3, v sono generatori dello spazio vettoriale V.
B) Se $[v]_{u_1,u_2,u_3} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ allora u_1, u_2, v è una base di V;

Le frasi vere sono

Domanda 5. Sia b un prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$ di segnatura $(1, 2, 0)$ Dire quali delle seguenti frasi sono vere (potrebbero essere anche tutte vere o tutte false):

A) L'unico vettore isotropo è 0;
B) Esiste un sottospazio di dimensione 2 sul quale b è definita negativa;

Le frasi vere sono

Domanda 6. Sia A una matrice 5×3 di rango 3 e siano v_1, v_2, v_3 le colonne di A. Dire quali delle seguenti frasi sono vere (potrebbero essere anche tutte vere o tutte false):

A) Il sistema $A \cdot x = b$ ha soluzione per ogni b;
B) v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti;
C) Il nucleo di L_A ha dimensione 3.

Le frasi vere sono

Compito del 7 gennaio 2020: seconda parte

Avete 2 ore 5 minuti di tempo a disposizione. Motivate le vostre risposte. Sarà valutata anche l'esposizione e non saranno corretti esercizi illeggibili. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari, pena l'annullamento del compito.

Esercizio 1. Siano V e W due $\mathbb{R}$ spazi vettoriali e sia $F : V \longrightarrow W$ un'applicazione $\mathbb{R}$-lineare.

a) Com'è definita l'immagine di F?
b) Si dimostri che l'immagine di F è un $\mathbb{R}$-sottospazio vettoriale.

Esercizio 2. Si determini la forma di Jordan della matrice

$$A = \begin{pmatrix} a-1 & 1 & a-2 \\ 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

al variare del parametro $a \in \mathbb{C}$.

Esercizio 3. Siano $p, q \subset \mathbb{R}^3$ le rette:

$$p = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ : t \in \mathbb{R} \right\} \qquad q = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ : t \in \mathbb{R} \right\} ,$$

sia r la retta passante per $(1, 0, 1)$ e $(3, 2, 3)$ e sia s la retta passante per $(1, 4, 0)$ e $(1, 4, 1)$.

a) Determinare una isometria $F(x) = Ax + b$ tale che $F(p) = r$ e $F(q)$ intersechi s
b) Esiste una isometria che porta p in r e q in s? Motivare la risposta.

Esercizio 4. Sia C la quadrica di $\mathbb{R}^3$ definita dall'equazione

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

Sia W il piano di $\mathbb{R}^3$ definito dall'equazione $x + y + z + 1 = 0$. Si determini il tipo di conica di $C \cap W$.

Compito di geometria e algebra lineare di lunedì 27 gennaio 2020: prima parte

Istruzioni: Avete 55 minuti di tempo a disposizione. Come prima cosa scrivete nome, cognome e matricola nello spazio qui sotto. Si è ammessi alla seconda parte se si risponde correttamente almeno a 4 domande. Si è ammessi con 6 se si risponde correttamente a tutte e 6 le domande, con 3 se si risponde correttamente a 5 e con 0 se si risponde correttamente a 4 domande. Prima di consegnare il foglio trascrivetevi su un foglietto le risposte. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari, pena l'annullamento del compito.

Nome e cognome e matricola: ______________________________

Domanda 1. Sia $z = \log_e \sqrt{2} + i\frac{3\pi}{4}$, calcolare e^z.

$e^z =$

Domanda 2. Sia $V = \mathbb{C}[t]_{\leqslant 2}$ e sia $f_1 = 1,\ f_2 = 1 + t^2,\ f_3 = t - t^2$ una base di V. Sia $F : V \longrightarrow V$ l'applicazione $F(p(t)) = p(t + 1)$. Si scriva la matrice associata ad F rispetto alla base f_1, f_2, f_3 in partenza e alla base standard in arrivo.

$[F]^{f_1,f_2,f_3}_{1,t,t^2} =$

Domanda 3. Sia $V = \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{C})$ e sia W il sottospazio di V delle matrici simmetriche. Sia $T : V \longrightarrow W$ una applicazione lineare suriettiva. Si calcoli la dimensione del nucleo di T.

$\dim N(T) =$

Domanda 4. Sia V uno spazio vettoriale e siano $v_1, \ldots, v_5 \in V$. Dire quali delle seguenti frasi sono vere (potrebbero essere anche tutte vere o tutte false):

A) se $\dim V = 5$ e $v_1, \ldots, v_5$ sono generatori allora sono anche linearmente indipendenti;
B) se $v_1, \ldots, v_5$ sono linearmente indipendenti allora $v_1 + \cdots + v_5 \neq 0$.

Le frasi vere sono:

Domanda 5. Sia $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un'isometria lineare. Dire quali delle seguenti frasi sono vere (potrebbero essere anche tutte vere o tutte false):

A) Se $\det T = 1$ allora T è una rotazione.
B) Se $\det T = -1$ allora T è una riflessione rispetto ad un piano passante per l'origine.
C) Se $\det T = 1$ allora T è diagonalizzabile.

Le frasi vere sono:

Domanda 6. Sia $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una applicazione $\mathbb{R}$-lineare. Dire quali delle seguenti frasi sono vere (potrebbero essere anche tutte vere o tutte false):

A) Se $p_T(t) = -t^3$ allora $\dim N(T) \neq 0$.
B) Se $p_T(t) = -t^3 - t$ allora T è diagonalizzabile; .

Le frasi vere sono:

Compito di geometria e algebra lineare di lunedì 27 gennaio 2020: prima parte

Istruzioni: Avete 55 minuti di tempo a disposizione. Come prima cosa scrivete nome, cognome e matricola nello spazio qui sotto. Si è ammessi alla seconda parte se si risponde correttamente almeno a 4 domande. Si è ammessi con 6 se si risponde correttamente a tutte e 6 le domande, con 3 se si risponde correttamente a 5 e con 0 se si risponde correttamente a 4 domande. Prima di consegnare il foglio trascrivetevi su un foglietto le risposte. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari, pena l'annullamento del compito.

Nome e cognome e matricola: ______________________________

Domanda 1. Sia $z = \log_e \sqrt{2} - i\frac{\pi}{4}$, calcolare e^z.

$e^z =$

Domanda 2. Sia $V = \mathbb{C}[t]_{\leqslant 2}$ e sia $f_1 = 1,\ f_2 = 2 + t^2,\ f_3 = t + t^2$ una base di V. Sia $F : V \longrightarrow V$ l'applicazione $F(p(t)) = p(t + 1)$. Si scriva la matrice associata ad F rispetto alla base f_1, f_2, f_3 in partenza e alla base standard in arrivo.

$[F]^{f_1,f_2,f_3}_{1,t,t^2} =$

Domanda 3. Sia $V = \mathrm{Mat}_{3\times3}(\mathbb{C})$ e sia W il sottospazio di V delle matrici simmetriche. Sia $T : V \longrightarrow W$ una applicazione lineare suriettiva. Si calcoli la dimensione del nucleo di T.

$\dim N(T) =$

Domanda 4. Sia V uno spazio vettoriale siano $v_1, \ldots, v_4 \in V$. Dire quali delle seguenti frasi sono vere (potrebbero essere anche tutte vere o tutte false):

A) se $v_1, \ldots, v_4$ sono linearmente indipendenti allora $v_1 + \cdots + v_4 \neq 0$.
B) se $\dim V = 4$ e se $v_1, \ldots, v_4$ sono generatori allora sono linearmente indipendenti.

Le frasi vere sono:

Domanda 5. Sia $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un'isometria lineare. Dire quali delle seguenti frasi sono vere (potrebbero essere anche tutte vere o tutte false):

A) Se $\det T = -1$ allora T è una riflessione rispetto ad un piano passante per l'origine.
B) Se $\det T = 1$ allora T è diagonalizzabile.
C) Se $\det T = 1$ allora T è una rotazione.

Le frasi vere sono:

Domanda 6. Sia $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una applicazione $\mathbb{R}$-lineare. Dire quali delle seguenti frasi sono vere (potrebbero essere anche tutte vere o tutte false):

A) Se $p_T(t) = -t^3 - t$ allora T è diagonalizzabile; .
B) Se $p_T(t) = -t^3$ allora $\dim N(T) \neq 0$.

Le frasi vere sono:

Compito di geometria e algebra lineare di lunedì 27 gennaio 2020: prima parte

Istruzioni: Avete 55 minuti di tempo a disposizione. Come prima cosa scrivete nome, cognome e matricola nello spazio qui sotto. Si è ammessi alla seconda parte se si risponde correttamente almeno a 4 domande. Si è ammessi con 6 se si risponde correttamente a tutte e 6 le domande, con 3 se si risponde correttamente a 5 e con 0 se si risponde correttamente a 4 domande. Prima di consegnare il foglio trascrivetevi su un foglietto le risposte. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari, pena l'annullamento del compito.

Nome e cognome e matricola: ______________________________

Domanda 1. Sia $z = \log_e \sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}$, calcolare e^z.

$e^z =$

Domanda 2. Sia $V = \mathbb{C}[t]_{\leqslant 2}$ e sia $f_1 = 1,\ f_2 = 2 + t^2,\ f_3 = 2t + t^2$ una base di V. Sia $F : V \longrightarrow V$ l'applicazione $F(p(t)) = p(t-1)$. Si scriva la matrice associata ad F rispetto alla base f_1, f_2, f_3 in partenza e alla base standard in arrivo.

$[F]^{f_1,f_2,f_3}_{1,t,t^2} =$

Domanda 3. Sia $V = \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{C})$ e sia W il sottospazio di V delle matrici simmetriche. Sia $T : V \longrightarrow W$ una applicazione lineare suriettiva. Si calcoli la dimensione del nucleo di T.

$\dim N(T) =$

Domanda 4. Sia V uno spazio vettoriale e siano $v_1, \ldots, v_6 \in V$. Dire quali delle seguenti frasi sono vere (potrebbero essere anche tutte vere o tutte false):

A) se $v_1, \ldots, v_6$ sono linearmente indipendenti allora $v_1 + \cdots + v_6 \neq 0$.
B) se $\dim V = 6$ e se $v_1, \ldots, v_6$ sono generatori allora sono linearmente indipendenti.

Le frasi vere sono:

Domanda 5. Sia $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un'isometria lineare. Dire quali delle seguenti frasi sono vere (potrebbero essere anche tutte vere o tutte false):

A) Se $\det T = 1$ allora T è diagonalizzabile.
B) Se $\det T = 1$ allora T è una rotazione.
C) Se $\det T = -1$ allora T è una riflessione rispetto ad un piano passante per l'origine.

Le frasi vere sono:

Domanda 6. Sia $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una applicazione $\mathbb{R}$-lineare. Dire quali delle seguenti frasi sono vere (potrebbero essere anche tutte vere o tutte false):

A) Se $p_T(t) = -t^3$ allora $\dim N(T) \neq 0$.
B) Se $p_T(t) = -t^3 - t$ allora T è diagonalizzabile; .

Le frasi vere sono:

Compito del 27 gennaio 2020: seconda parte

Avete 2 ore e 5 minuti di tempo a disposizione. Motivate le vostre risposte. Sarà valutata anche l'esposizione e non saranno corretti esercizi illeggibili. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari, pena l'annullamento del compito.

Esercizio 1. Sia V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale. Sia b un prodotto scalare su V e $F : V \longrightarrow V$ un'applicazione lineare.

a) Cosa vuol dire che F è autoaggiunta rispetto a b: dare la definizione.
b) Sia W un sottospazio di V tale che $F(W) \subset W$ e sia F autoaggiunta. Dimostrare che $F(W^\perp) \subset W^\perp$.

Esercizio 2. Siano A e B le matrici seguenti.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcolare la dimensione di $Im(L_A) + N(L_B)$.

Esercizio 3. Siano r e s due rette di $\mathbb{R}^3$ passanti per l'origine che formano un angolo di $\pi/6$. Siano R ed S le rotazioni rispettivamente attorno ad r e attorno ad s di π.

a) Si dimostri che $R \circ S$ è una rotazione e se ne determini l'asse;
b) Si calcoli l'angolo di rotazione.

Esercizio 4. Sia $V = \mathbb{R}[t]_{\leqslant 3}$ e sia $b : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ il prodotto scalare:

$$b(f, g) = f(0)g(0) - 2f(1)g(1) + f(2)g(-1) + f(-1)g(2).$$

Calcolarne la segnatura.

Compitino di Geometria e algebra lineare di venerdì 14 febbraio 2020: prima parte

Istruzioni: Avete 45 minuti di tempo a disposizione. Come prima cosa scrivete nome, cognome e matricola nello spazio qui sotto. Inserite le risposte, senza motivazione, negli appositi riquadri. Prima di consegnare il foglio trascrivetevi su un foglietto le risposte. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari, pena l'annullamento del compito.

Nome e cognome e matricola: ____________________

Domanda 1. Sia $A = (1, 0, 0)$, $B = (1, 1, 1)$ e $C = (1, 2, 3)$. Calcolare il coseno dell'angolo $\widehat{BAC}$.

$\cos \widehat{BAC} =$

Domanda 2. Sia $T : \mathrm{Mat}_{3\times5}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}^6$ una applicazione $\mathbb{C}$-lineare surgettiva. Sia U un sottospazio di $\mathrm{Mat}_{3\times5}(\mathbb{C})$ di dimensione 7. Sapendo che $N(T) + U = \mathrm{Mat}_{3\times5}(\mathbb{C})$ calcolare $\dim N(T) \cap U$.

$\dim N(T) \cap U =$

Domanda 3. Sia $F : \mathbb{R}[t]_{\leqslant 2} \longrightarrow \mathbb{R}[t]_{\leqslant 2}$ l'applicazione lineare $F(p(t)) = t\, p(0) + p(t+1)$, scrivere la matrice associata a F rispetto alla base $1, 1+t, t^2$ in partenza e standard in arrivo.

$[F]^{1,1+t,t^2}_{1,t,t^2} =$

Domanda 4. Sia A una matrice 4×6 di rango 4. Dire quali delle seguenti frasi sono vere (potrebbero essere anche tutte vere o tutte false):

A) Il sistema $A \cdot x = b$ ha soluzione per ogni $b \in \mathbb{R}^4$;
B) L'applicazione L_A è iniettiva;
C) La trasposta di A ha rango 6.

Le frasi vere sono

Domanda 5. Sia $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una applicazione lineare e u_1, u_2, u_3 una base di $\mathbb{R}^3$ e sia A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Dire quali delle seguenti frasi sono vere (potrebbero essere anche tutte vere o tutte false).

A) Se $[F]_{e_1,e_2}^{u_1,u_2,u_3} = A$ allora $F(e_2 + e_3) = 5\, e_1 + 2\, e_2$;
B) Se $[F]_{e_1,e_2}^{u_1,u_2,u_3} = A$ allora il rango di F è 2;
C) Se $[F]_{e_1,e_2}^{u_1,u_2,u_3} = A$ allora $e_1 + e_2$ appartiene all'immagine di F;

Le frasi vere sono

Domanda 6. Sia $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una applicazione lineare. Dire quali delle seguenti frasi sono vere (potrebbero essere anche tutte vere o tutte false):

A) Se v è un autovettore di F allora v è un autovettore di F^2;
B) Se 2 è un autovalore di F allora 4 è un autovalore di $2F$;
C) Se $\det F = 0$ allora 1 è un autovalore di F.

Le frasi vere sono

Compitino di Geometria e algebra lineare di venerdì 14 febbraio 2020: prima parte

Istruzioni: Avete 45 minuti di tempo a disposizione. Come prima cosa scrivete nome, cognome e matricola nello spazio qui sotto. Inserite le risposte, senza motivazione, negli appositi riquadri. Prima di consegnare il foglio trascrivetevi su un foglietto le risposte. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari, pena l'annullamento del compito.

Nome e cognome e matricola: ____________________

Domanda 1. Sia $A = (0, 1, 0)$, $B = (1, 1, 1)$ e $C = (1, 2, 3)$. Calcolare il coseno dell'angolo $\widehat{BAC}$.

$\cos \widehat{BAC} =$

Domanda 2. Sia $T : \mathrm{Mat}_{3\times5}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}^5$ una applicazione $\mathbb{C}$-lineare surgettiva. Sia U un sottospazio di $\mathrm{Mat}_{3\times5}(\mathbb{C})$ di dimensione 7. Sapendo che $N(T) + U = \mathrm{Mat}_{3\times5}(\mathbb{C})$ calcolare $\dim N(T) \cap U$.

$\dim N(T) \cap U =$

Domanda 3. Sia $F : \mathbb{R}[t]_{\leqslant 2} \longrightarrow \mathbb{R}[t]_{\leqslant 2}$ l'applicazione lineare $F(p(t)) = t^2\, p(0) + p(t+1)$, scrivere la matrice associata a F rispetto alla base $1, 1+t, t^2$ in partenza e standard in arrivo.

$[F]_{1,t,t^2}^{1,1+t,t^2} =$

Domanda 4. Sia $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una applicazione lineare e u_1, u_2, u_3 una base di $\mathbb{R}^3$ e sia A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Dire quali delle seguenti frasi sono vere (potrebbero essere anche tutte vere o tutte false).

A) Se $[F]_{e_1,e_2}^{u_1,u_2,u_3} = A$ allora il rango di F è 2;
B) Se $[F]_{e_1,e_2}^{u_1,u_2,u_3} = A$ allora $e_1 + e_2$ appartiene all'immagine di F;
C) Se $[F]_{e_1,e_2}^{u_1,u_2,u_3} = A$ allora $F(e_2 + e_3) = 5\, e_1 + 2\, e_2$;

Le frasi vere sono

Domanda 5. Sia A una matrice 4×6 di rango 4. Dire quali delle seguenti frasi sono vere (potrebbero essere anche tutte vere o tutte false):

A) L'applicazione L_A è iniettiva;
B) Il sistema $A \cdot x = b$ ha soluzione per ogni $b \in \mathbb{R}^4$;
C) La trasposta di A ha rango 6.

Le frasi vere sono

Domanda 6. Sia $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una applicazione lineare. Dire quali delle seguenti frasi sono vere (potrebbero essere anche tutte vere o tutte false):

A) Se 2 è un autovalore di F allora 4 è un autovalore di $2F$;
B) Se $\det F = 0$ allora 1 è un autovalore di F;
C) Se v è un autovettore di F allora v è un autovettore di F^2.

Le frasi vere sono

Compitino di Geometria e algebra lineare di venerdì 14 febbraio 2020: prima parte

Istruzioni: Avete 45 minuti di tempo a disposizione. Come prima cosa scrivete nome, cognome e matricola nello spazio qui sotto. Inserite le risposte, senza motivazione, negli appositi riquadri. Prima di consegnare il foglio trascrivetevi su un foglietto le risposte. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari, pena l'annullamento del compito.

Nome e cognome e matricola: ______________________

Domanda 1. Sia $A = (0, 0, 1)$, $B = (1, 1, 1)$ e $C = (1, 0, 3)$. Calcolare il coseno dell'angolo $\widehat{BAC}$.

$\cos \widehat{BAC} =$

Domanda 2. Sia $T : \mathrm{Mat}_{3\times5}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}^4$ una applicazione $\mathbb{C}$-lineare surgettiva. Sia U un sottospazio di $\mathrm{Mat}_{3\times5}(\mathbb{C})$ di dimensione 7. Sapendo che $N(T) + U = \mathrm{Mat}_{3\times5}(\mathbb{C})$ calcolare $\dim N(T) \cap U$.

$\dim N(T) \cap U =$

Domanda 3. Sia $F : \mathbb{R}[t]_{\leqslant 2} \longrightarrow \mathbb{R}[t]_{\leqslant 2}$ l'applicazione lineare $F(p(t)) = t\,p(0) + p(t-1)$, scrivere la matrice associata a F rispetto alla base $1, 1+t, t^2$ in partenza e standard in arrivo.

$[F]^{1,1+t,t^2}_{1,t,t^2} =$

Domanda 4. Sia $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una applicazione lineare e u_1, u_2, u_3 una base di $\mathbb{R}^3$ e sia A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Dire quali delle seguenti frasi sono vere (potrebbero essere anche tutte vere o tutte false).

A) Se $[F]_{e_1,e_2}^{u_1,u_2,u_3} = A$ allora $F(e_2 + e_3) = 5\,e_1 + 2\,e_2$;
B) Se $[F]_{e_1,e_2}^{u_1,u_2,u_3} = A$ allora il rango di F è 2;
C) Se $[F]_{e_1,e_2}^{u_1,u_2,u_3} = A$ allora $e_1 + e_2$ appartiene all'immagine di F;

Le frasi vere sono

Domanda 5. Sia $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una applicazione lineare. Dire quali delle seguenti frasi sono vere (potrebbero essere anche tutte vere o tutte false):

A) Se v è un autovettore di F allora v è un autovettore di F^2;
B) Se 2 è un autovalore di F allora 4 è un autovalore di $2F$;
C) Se $\det F = 0$ allora 1 è un autovalore di F.

Le frasi vere sono

Domanda 6. Sia A una matrice 4×6 di rango 4. Dire quali delle seguenti frasi sono vere (potrebbero essere anche tutte vere o tutte false):

A) Il sistema $A \cdot x = b$ ha soluzione per ogni $b \in \mathbb{R}^4$;
B) L'applicazione L_A è iniettiva;
C) La trasposta di A ha rango 6.

Le frasi vere sono

Compitino di Geometria e algebra lineare di venerdì 14 febbraio 2020: prima parte

Istruzioni: Avete 45 minuti di tempo a disposizione. Come prima cosa scrivete nome, cognome e matricola nello spazio qui sotto. Inserite le risposte, senza motivazione, negli appositi riquadri. Prima di consegnare il foglio trascrivetevi su un foglietto le risposte. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari, pena l'annullamento del compito.

Nome e cognome e matricola: ________________________________

Domanda 1. Sia $A = (1, 1, 0)$, $B = (1, 1, 1)$ e $C = (2, 1, 3)$. Calcolare il coseno dell'angolo $\widehat{BAC}$.

$\cos \widehat{BAC} =$

Domanda 2. Sia $T : \mathrm{Mat}_{3\times 5}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}^3$ una applicazione $\mathbb{C}$-lineare surgettiva. Sia U un sottospazio di $\mathrm{Mat}_{3\times 5}(\mathbb{C})$ di dimensione 7. Sapendo che $N(T) + U = \mathrm{Mat}_{3\times 5}(\mathbb{C})$ calcolare $\dim N(T) \cap U$.

$\dim N(T) \cap U =$

Domanda 3. Sia $F : \mathbb{R}[t]_{\leqslant 2} \longrightarrow \mathbb{R}[t]_{\leqslant 2}$ l'applicazione lineare $F(p(t)) = t^2\,p(0) + p(t-1)$, scrivere la matrice associata a F rispetto alla base $1, 1+t, t^2$ in partenza e standard in arrivo.

$[F]_{1,t,t^2}^{1,1+t,t^2} =$

Domanda 4. Sia A una matrice 4×6 di rango 4. Dire quali delle seguenti frasi sono vere (potrebbero essere anche tutte vere o tutte false):

A) L'applicazione L_A è iniettiva;
B) Il sistema $A \cdot x = b$ ha soluzione per ogni $b \in \mathbb{R}^4$;
C) La trasposta di A ha rango 6.

Le frasi vere sono

Domanda 5. Sia $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una applicazione lineare e u_1, u_2, u_3 una base di $\mathbb{R}^3$ e sia A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Dire quali delle seguenti frasi sono vere (potrebbero essere anche tutte vere o tutte false).

A) Se $[F]_{e_1,e_2}^{u_1,u_2,u_3} = A$ allora $F(e_2 + e_3) = 5\,e_1 + 2\,e_2$;
B) Se $[F]_{e_1,e_2}^{u_1,u_2,u_3} = A$ allora il rango di F è 2;
C) Se $[F]_{e_1,e_2}^{u_1,u_2,u_3} = A$ allora $e_1 + e_2$ appartiene all'immagine di F;

Le frasi vere sono

Domanda 6. Sia $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una applicazione lineare. Dire quali delle seguenti frasi sono vere (potrebbero essere anche tutte vere o tutte false):

A) Se $\det F = 0$ allora 1 è un autovalore di F;
B) Se v è un autovettore di F allora v è un autovettore di F^2;
C) Se 2 è un autovalore di F allora 4 è un autovalore di $2F$.

Le frasi vere sono

Compitino di Geometria e algebra lineare di venerdì 14 febbraio 2020: seconda parte

Istruzioni: Avete 2 ore e 15 minuti di tempo a disposizione. Motivate le vostre risposte. Sarà valutata anche l'esposizione e non saranno corretti esercizi illeggibili. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari, pena l'annullamento del compito.

Esercizio 1. Sia V un K-spazio vettoriale e siano $v_1, v_2, v_3 \in V$.

a) cosa vuol dire che v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti? Dare la definizione.
b) sia $F : K^3 \longrightarrow V$ l'applicazione lineare $F(x, y, z) = xv_1 + yv_2 + zv_3$. Si dimostri che se v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti allora F è iniettiva.

Esercizio 2. Si risolva la seguente equazione con $z \in \mathbb{C}$.

$$z^2 + (1 - i)z + 2 - 2i = 0 .$$

Esercizio 3. Sia $E = \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C})$. Sia A la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

e sia $F : E \longrightarrow E$ l'applicazione lineare definita da $F(X) = AX - XA$. Si determini $\mathrm{Im}(F) \cap N(F)$.

Esercizio 4. Siano A, B le seguenti matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} .$$

Sia $U = N(L_A)$ e $W = \mathrm{Im}(L_B)$ e siano $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ e $G : W \longrightarrow \mathbb{R}^3$ le applicazioni lineari

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \text{se} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in U \qquad \text{e} \qquad G\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ z \\ w \end{pmatrix} \qquad \text{se} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in W .$$

a) Determinare $U \cap W$;
b) Dire se esiste una applicazione lineare $L : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $L(v) = F(v)$ se $v \in U$ e $L(v) = -G(v)$ se $v \in W$.
c) Mostrare che esiste una unica applicazione lineare $L : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $L(v) = F(v)$ se $v \in U$ e $L(v) = G(v)$ se $v \in W$.

Compito di Geometria e algebra lineare di lunedì 17 febbraio 2020: prima parte

Istruzioni: Avete 55 minuti di tempo a disposizione. Come prima cosa scrivete nome, cognome. Prima di consegnare il foglio trascrivetevi su un foglietto le risposte. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari, pena l'annullamento del compito.

Nome e cognome: ______________________________

Domanda 1. Sia $z = 3 + 3i$ e $w = 1 + 3i$. Calcolare z/w. Scriverlo in forma cartesiana.

$z/w =$

Domanda 2. Sia $F : \mathbb{R}[t]_{\leqslant 3} \longrightarrow \mathbb{R}[t]_{\leqslant 2}$ l'applicazione lineare

$$F(p) = p(1)t^2 + p'(t+1) .$$

Si scriva la matrice associata a F rispetto alle basi standard in partenza e in arrivo.

$[F]^{1,t,t^2,t^3}_{1,t,t^2}$

Domanda 3. Sia W il piano di $\mathbb{R}^3$ definito dall'equazione $x + 2y + z = 0$. Sia $P = (1, 1, 1)$ e sia Q il suo simmetrico rispetto al piano W. Determinare le coordinate di Q.

$Q =$

Domanda 4. Siano U e W due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^5$. Dire quali delle seguenti frasi sono vere:

A) Se $\dim U = 3$ e $U \cap W = \{0\}$ allora $\dim W \leqslant 2$.
B) Se $\dim U = 3$ e $\dim W = 3$ allora $\dim U \cap W \geqslant 2$.

Le frasi vere sono

Domanda 5. Sia F una isometria affine di $\mathbb{R}^3$ che fissa l'origine. Dire quali delle seguenti frasi sono vere (potrebbero essere anche tutte vere o tutte false):

A) F è una applicazione lineare.
B) $F \circ F$ è una isometria affine.

Le frasi vere sono

Domanda 6. Sia $F : V \longrightarrow W$ una applicazione lineare e siano $u, v \in V$. Dire quali delle seguenti frasi sono vere (potrebbero essere anche tutte vere o tutte false):

A) Se u e v sono linearmente dipendenti allora $F(u)$ e $F(v)$ sono linearmente dipendenti.
B) Se u e v sono linearmente indipendenti allora $F(u)$ e $F(v)$ sono linearmente indipendenti.
C) Se $F(u)$ e $F(v)$ sono linearmente indipendenti allora u e v sono lineramente indipendenti

Le frasi vere sono

Compito di Geometria e algebra lineare di lunedì 17 febbraio 2020: seconda parte

Istruzioni: I fogli per svolgere gli esercizi vi saranno forniti. Consegnate solo la bella e il foglio con gli esercizi e motivate sempre le vostre risposte. Sarà valutata anche l'esposizione e non saranno corretti esercizi illeggibili. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrici, cellulari, pena l'annullamento del compito. Avete a disposizione 2 ore e 15 di tempo.

Esercizio 1. Sia $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare.

a) Cosa vuol dire che F è diagonalizzabile?
b) Sia F la proiezione ortogonale su un piano W passante per l'origine. Dimostrare che è diagonalizzabile.

Esercizio 2. Sia $E = \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ e sia

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si consideri l'applicazione lineare $F : E \longrightarrow E$ definita da $F(X) = GXG^{-1}$. Determinare la forma di Jordan di F.

Esercizio 3. Sia $A = (0, 0, 0)$, $B = (4, 4, 0)$, $C = (0, 3, 3)$, $D = (4, -1, -1)$.Determinare una isometria $F(x) = Gx + b$ che porta il triangolo ABC nel triangolo ABD. (Determinare G e b).

Esercizio 4. Sia A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sia $g(x, y) = x^t Ay$ il prodotto scalare associato su $\mathbb{R}^3$.

a) Si determini una base di $\mathbb{R}^3$ che sia ortogonale rispetto al prodotto scalare g.
b) Si determini una matrice M di determinante non nullo tale che MAM^t sia diagonale.

Soluzioni compito 7 gennaio 2020 prima parte: versione 1

Domanda 1. $\|z\| = 2\sqrt{2}$, $arg(z) = -\pi/4$;

Domanda 2. $a \neq \pm 2$;

Domanda 3. $rango(F) = 2$;

Domanda 4. B

Domanda 5. A

Domanda 6. A

Soluzioni compito 7 gennaio 2020 prima parte: versione 2

Domanda 1. $\|z\| = 3\sqrt{2}$, $arg(z) = 3\pi/4$;

Domanda 2. $a \neq \pm 5$;

Domanda 3. $rango(F) = 2$;

Domanda 4. A

Domanda 5. B

Domanda 6. B

Soluzioni compito 7 gennaio 2020 seconda parte

Esercizio 1. a)

$$Im(F) = \{F(v) \,:\, v \in V\}$$

oppure anche $Im(F) = \{w \in W \,:\, \text{esiste } v \in V \text{ tale che } F(v) = w\}$.

b)Sia $U = \mathrm{Im}(F)$. Dobbiamo verificare le tre proprietà che caratterizzano i sottospazi vettoriali.

1) $0 \in U$. Infatti $0 \in V$ e $F(0) = 0$ poiché F è lineare. Quindi $O \in U$.

2) Se $w_1, w_2 \in U$ allora $w_1 + w_2 \in U$. Infatti siano v_1 e $v_2 \in V$ tali che $F(v_1) = w_1$ e $F(v_2) = w_2$. Allora $w_1 + w_2 = F(v_1 + v_2)$ poiché F è lineare. Quindi $w_1 + w_2 \in U$.

3) Se $w \in U$ λ in $\mathbb{R}$ allora $\lambda v \in U$. Infatti siano $v \in V$ tale che $F(v) = w$. Allora $\lambda w = F(\lambda v)$ poiché F è lineare. Quindi $\lambda w \in U$.

Esercizio 2. Il polinomio caratteristico della matrice A è uguale a

$$p_A(t) = (a-t)(t^2 - (a+1) + a) = (a-t)(a-t)(1-t)$$

Se $a \neq 1$ questo polinomio caratteristico ha l'autovalore a con molteplicità algebrica 2 e l'autovalore 1 con molteplicità algebrica 1. Calcoliamo la molteplicità geometrica di a. Dobbiamo calcolare la dimesione del nucleo della matrice

$$A - aI = \begin{pmatrix} -1 & 1 & a-2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2-a \end{pmatrix}$$

Questa matrice ha rango 2 e quindi la molteplicià geometrica di a è 1. Quindi c'è un unico blocco di Jordan relativo ad a e la forma di Jordan della matrice è:

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se invece $a = 1$ abbiamo che 1 ha molteplicità algebrica 3. La molteplcitità geometrica è data dalla dimensione del nucleo della matrice

$$A - aI = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e quindi è 1. Quindi per $a = 1$ la matrice ha un unico blocco di Jordan e la forma di Jordan è la seguente.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3. a) Osserviamo che le due rette p e r sono parallele, infatti hanno entrambe direzione $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

Quindi se Q è un punto di r e P è un punto di p e $u = Q - P$ la traslazione τ_u porta p in r. Scegliamo P e Q in modo che l'intersezione tra $\tau_u(q)$ e s sia non vuota. Fissiamo

$$P = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix}1+a\\a\\1+a\end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad u = \begin{pmatrix}a\\a-2\\a-2\end{pmatrix}$$

Quindi

$$\tau_u(q) = \left\{ \begin{pmatrix}2+a\\a\\a\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \ : \ t \in \mathbb{R} \right\}, \qquad s = \left\{ \begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \ : \ s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Quindi cerchiamo a in modo che esistano s, t tali che

$$\begin{pmatrix}2+a+t\\a\\a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\4\\s\end{pmatrix}.$$

otteniamo $a = 4$, $s = 4$ e $t = -5$. Quindi la traslazione τ_u con $u = \begin{pmatrix}4\\2\\2\end{pmatrix}$ ha le prorietà richieste.

b) Non esiste una isometria che porta p in r e q in s. Infatti le due coppie di rette hanno distanza diversa. Per calcolare la distanza tra le due rette posso usare formula vista a lezione:

$$dist(AB, CD) = \frac{|\det\begin{pmatrix}B-A & D-C & C-A\end{pmatrix}|}{\|(B-A)\times(D-C)\|}.$$

In particolare la distanza tra p e q è uguale a

$$d = \frac{|det\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\1 & 0 & 0\\1 & 0 & 1\end{pmatrix}|}{\|\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

mentre la distanza tra s e r è uguale a

$$d = \frac{|det\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\1 & 0 & 4\\1 & 1 & -1\end{pmatrix}|}{\|\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\|} = 2\sqrt{2}$$

Esercizio 4. Per studiare il tipo di conica di C posso studiare le segnatura del prodotto scalare associato alla matrice

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

e della sua restrizione al piano all'infinito ovvero al piano U di equazione $x + y + z = 0$. La segnatura del prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$ è $(2, 1, 0)$. Se come base di U scegliamo $(1, -1, 0)$ e $(0, 1, -1)$ la matrice associata alla restrizione è

$$\begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$$

che ha segnatura $(1, 1, 0)$. Quindi si tratta di un'iperbole.

Soluzioni del compito del 27 gennaio: prima parte, I versione

Domanda 1. $e^z = -1 + i$

Domanda 2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Domanda 3. $\dim N(T) = 3$

Domanda 4. A,B

Domanda 5. A

Domanda 6. A

Soluzioni del compito del 27 gennaio: prima parte, I versione

Domanda 1. $e^z = 1 - i$

Domanda 2. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Domanda 3. $\dim N(T) = 3$

Domanda 4. A,B

Domanda 5. C

Domanda 6. B

Soluzioni del compito del 27 gennaio: prima parte, I versione

Domanda 1. $e^z = 1 + i$

Domanda 2. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Domanda 3. $\dim N(T) = 3$

Domanda 4. A,B

Domanda 5. B

Domanda 6. A

Soluzioni del compito del 27 gennaio: seconda parte

Esercizio 1. a) F è autoaggiunta rispetto a b se e solo se per ogni $u, v \in V$ vale

$$b\big(F(u), v\big) = b\big(u, F(v)\big) \ .$$

b) Sia $u \in W^\perp$ per dimostrare che $F(u) \in W^\perp$ verifico che $b(F(u), w) = 0$ per ogni $w \in W$. Infatti

$$b\big(F(u), w\big) b\big(u, F(w)\big) = 0$$

dove l'ultima uguaglianza è dovuta al fatto che $u \in W^\perp$ e $F(W) \subset W$.

Esercizio 2. Riducendo a scalini le matrici A e B otteniamo

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -10 \end{pmatrix} .$$

Quindi A e B hanno rango 3, $\dim Im(L_A) = 3$ e le prime tre colonne v_1, v_2, v_3 della matrice A sono una base di $Im(L_A)$ e $\dim N(L_B) = 2$. Se $v = xv_1 + yv_2 + zv_3$ è un elemento di $Im(L_A)$ allora $v \in N(L_B)$ se e solo se

$$xL_B(v_1) + yL_B(v_2) + zL_B(v_3) = L_B(v) = 0 ,$$

ovvero se

$$\begin{cases} 36x - 11y - 25z = 0; \\ 6\,x - 6\,y = 0; \\ 2\,x + y - 3\,z = 0. \end{cases}$$

Questo sistema ha rango 2. Ne deduciamo che le soluzioni del sistema hanno dimensione 1 ovvero che l'intersezione tra $Im(L_A)$ e $N(L_B)$ ha dimensione 1. Dalla formula di Grassmann ricaviamo che $Im(L_A) + N(L_B)$ ha dimensione 4.

Esercizio 3. R e S sono due applicazioni lineari di determinante uno, quindi anche la loro composizione lo è, in particolare $R \circ S$ è una isometria lineare di $\mathbb{R}^3$ di determinante 1 e quindi una rotazione. Osserviamo che se u è un vettore ortogonale sia a r che a s abbiamo $R(u) = S(u) = -u$ e quindi $R \circ S(u) = u$. Quindi l'asse di rotazione è la retta ℓ ortogonale sia a r che a s passante per l'origine. Per determinare l'angolo di rotazione studiamo la restrizione di $R \circ S$ al piano W ortogonale a ℓ ovvero al piano generato da r e da s. La restrizione di R a questo piano è una riflessione rispetto alla retta r e la restrizione di S a questo piano è una riflessione rispetto alla retta s. La composizione di due riflessioni di questo tipo è una rotazione di angolo il doppio dell'angolo tra le due rette ovvero, nel nostro caso, di angolo $\pi/3$. Questa è una affermazione che abbiamo già visto a lezione, si può verificare geometricamente oppure moltiplicando le due matrici di riflessione in questione.

Alternativamente si poteva scegliere una base ortonormale u_1, u_2, u_3 tale che u_1 è una base di s e u_1, u_2 è una base del piano W generato da r e s e possiamo anche assumere (cambiando il segno di u_1, u_2) che r sia generato da $(\sqrt{3}u_1 + u_2)/2$. In questa base abbiamo

$$[R]_{\underline{u}}^{\underline{u}} = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad [S]_{\underline{u}}^{\underline{u}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e la loro composizione è

$$[R \circ S]_{\underline{u}}^{\underline{u}} = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è quindi una rotazione di angolo $\pi/3$ attorno all'asse $\mathbb{R}u_3$ ovvero alla retta ortogonale a r e a s.

Esercizio 4. Consideriamo la base f_0, f_1, f_2, f_{-1} di V in cui f_0 è il polinomio che si annulla in 1, 2 e -1 e vale 1 in 0, e similmente sono definiti gli altri polinomi. Basi di questo tipo le abbiamo usate spesso. Per esempio $f_0 = (t-1)(t-2)(t+1)/2$ e $f_1 = -t(t-2)(t+1)/2$. Rispetto a questa base la matrice associata a b è

$$[b]_{f_0, f_1, f_2, f_{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Il polinomio caratteristico di questa matrice è $(\lambda - 1)(\lambda + 2)(\lambda^2 - 1)$ e quindi la segnatura è $(2, 2, 0)$.

1. Soluzioni alla prima parte del compitino del 14 febbraio 2020: prima versione

Domanda 1. $\cos \widehat{BAC} = \frac{5}{\sqrt{26}}$.

Domanda 2. $\dim N(T) \cap U = 1$.

Domanda 3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Domanda 4. A

Domanda 5. B,C

Domanda 6. A,B

2. Soluzioni alla prima parte del compitino del 14 febbraio 2020: seconda versione

Domanda 1. $\cos \widehat{BAC} = \frac{4}{\sqrt{22}}$.

Domanda 2. $\dim N(T) \cap U = 2$.

Domanda 3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Domanda 4. A,B

Domanda 5. B

Domanda 6. A,C

3. Soluzioni alla prima parte del compitino del 14 febbraio 2020: terza versione

Domanda 1. $\cos \widehat{BAC} = \frac{1}{\sqrt{10}}$.

Domanda 2. $\dim N(T) \cap U = 3$.

Domanda 3. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Domanda 4. B,C

Domanda 5. A,B

Domanda 6. A

4. Soluzioni alla prima parte del compitino del 14 febbraio 2020: quarta versione

Domanda 1. $\cos \widehat{BAC} = \frac{3}{\sqrt{10}}$.

Domanda 2. $\dim N(T) \cap U = 4$.

Domanda 3. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Domanda 4. B

Domanda 5. B,C

Domanda 6. B,C

5. Soluzioni alla seconda parte del compitino del 14 febbraio 2020

Soluzione esercizio 1. a) v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti se presi $a, b, c \in K$ tali che $av_1 + bv_2 + cv_3 = 0$ allora $a = b = c = 0$.

b) Basta dimostrare che $N(F)$ è zero. Sia $(x, y, z) \in N(F)$ allora $xv_1 + yv_2 + zv + 3 = 0$, ma essendo v_1, v_2, v_3 linearmente indipendenti questo implica $x = y = z = 0$. Quindi $(0, 0, 0)$ è l'unico elemento di $N(F)$.

Soluzione esercizio 2. Calcoliamo il delta dell'equazione di secondo grado. Otteniamo
$$\Delta = (1-i)^2 - 8 + 8i = -8 + 6i \ .$$
Calcoliamo le radici quadrate del delta. Ovvero cerchiamo $a + bi$ con $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $(a+bi)^2 = -8+6i$. Otteniamo il sistema
$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -8 \\ ab = 6 \end{cases}$$
sostituendo $b = a/3$ nella prima equazione otteniamo $a^4 + 8a^2 - 9 = 0$. Ponendo $c = a^2$ otteniamo che c è un numero positivo che risolve l'equazione $c^2 + 8c - 9 = 0$. Risolvendo questa equazione di secondo grado ricaviamo $c = 1$. Quindi le radici di Δ sono $1 + 3i$ e $-1 - 3i$. Quindi
$$z = \frac{i - 1 \pm (1+3i)}{2} \ .$$
Le soluzioni sono quindi $z = 2i$ e $z = -1 - i$.

Soluzione esercizio 3. Risolviamo questo esercizio in due modi (non molto dissimili l'uno dall'altro a dire il vero).

Primo modo: Sia
$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} .$$
Allora
$$F(X) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 2a+c & 2b+d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a+2b & b \\ c+2d & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2b & 0 \\ 2a-2d & 2b \end{pmatrix}$$
Quindi $N(F)$ è dato dalle equazioni $b = 0$ e $a = d$, ovvero $N(F)$ sono le matrici della forma
$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix} .$$
L'immagine di F ha quindi dimensione 2 sono matrici della forma
$$\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & -x \end{pmatrix} .$$
Quindi l'immagine di F sono tutte le matrici di questo tipo. L'intersezione è quindi data dalle matrici della forma
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix} .$$

Secondo modo: Consideriamo la base standard di E data dalle matrici $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$, indichiamola con $\mathcal{E}$. La matrice associata ad F in questa base è
$$[F]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$
Ne ricaviamo subito che il nucleo è generato da $E_{11} + E_{22}$ e E_{21} e l'immagine da E_{21} e $E_{11} - E_{22}$. Si conclude poi come nell'altro modo.

Soluzione esercizio 4. a) Riducendo la matrice B ricaviamo che B ha rango 3 e quindi che le tre colonne della matrice B che indichiamo con v_1, v_2, v_3 sono una base di W. Dalla riduzione di A ricaviamo che A ha rango 2. Ne deduciamo che U ha dimensione 2. Per determinare l'intersezione consideriamo un vettore $v = xv_1 + yv_2 + zv_3$ di W e imponiamo che sia nel nucleo di $L(A)$. Otteniamo
$$L_A(v) = xL_A(v_1) + yL_A(v_2) + zL_A(v_3) = AB \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$
Ne ricaviamo Ricaviamo $y = 0$ e $x = z$. Quindi il nucleo è generato dal vettore
$$v_0 = (v_1 + v_3)/3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) una tale applicazione non esiste perche' dovrebbe soddisfare contemporaneamente

$$L(v_0) = F(v_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad e \qquad L(v_0) = -G(v_0) = -\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) Osserviamo che $F(v_0) = G(v_0)$. Sia v_0, w_2, w_3 una base di W e sia u_4 in $U \smallsetminus W$ (un tale vettore esiste perche' U ha dimensione 2 e l'intersezione ha dimensione 1). Allora v_0, w_2, w_3, u_4 è una base di $\mathbb{R}^4$ e v_0, u_4 è una base di U. Una applicazione lineare è univocamente determinata dal valore che assume su una base il valore che assume su una base può essere assegnato a piacere. Se una tale applicazione esistesse in particolare avremmo

$$L(v_0) = G(v_0) = F(v) \qquad L(w_2) = G(w_2) \qquad L(w_3) = G(w_3) \qquad L(u) = F(u)$$

In particolare L è unica. Inoltre poiche' su una base di W, L coindide con G, abbiamo $L(w) = G(w)$ per ogni w in W e, poiche' su una base di U, L coindide con F, abbiamo $L(u) = F(u)$ per ogni u in U.

6. Soluzioni prima parte del compito del 17 febbraio 2020

Domanda 1. $\frac{6}{5} - \frac{3}{5}i$

Domanda 2. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Domanda 3. $Q = (-1/3, -5/3, -1/3)$.

Domanda 4. A.

Domanda 5. A,B.

Domanda 6. A,C.

7. Soluzioni seconda parte del compito del 17 febbraio 2020

Esercizio 1. a) F è diagonalizzabile se esiste una base di autovettori.

b) Sia v_1, v_2 una base di W e sia $v_3 \neq 0$ un vettore ortogonale a W. Allora v_1, v_2, v_3 è una base di $\mathbb{R}^3$ e $F(v_1) = v_1$, $F(v_2) = v_2$ e $F(v_3) = 0$ quindi è una base di autovettori.

Esercizio 2. La matrice associata a F rispetto alla base standard di E è la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il suo polinomio caratteristico è $(t-1)^4$. Inoltre il rango di $A - I$ è uguale a 2 e $(A-I)^2$ non è zero. Quindi la forma di Jordan è la seguente

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3. a) I due triangoli hanno un lato in comune e inoltre la distanza di $dist(A, C) = dist(A, D) = \sqrt{18}$ e $dist(B, C) = dist(B, D) = \sqrt{26}$. Possiamo quindi scegliere una qualsiasi isometria che lascia fissi i punti della retta AB e porta C in D. Va bene sia una rotazione attorno alla retta AB dell'opportuno angolo che una simmetria rispetto ad un piano che contiene la retta AB ortogonale al segmento CD. Scegliamo la seconda opzione per la quale i calcoli si possono ipotizzare più semplici. Sia $\mathbb{R}u$ la retta ortogonale al piano rispetto al quale effettuiamo la simmetria che indicheremo con R. Avremo

$$D = C - 2\frac{u \cdot C}{u \cdot u}u.$$

Quindi u sarà un multiplo di $D - C = (4, -4, -4)$. Scegliamo $u = (1, -1, -1)$. In effetti B è sulla retta ortogonale a $\mathbb{R}u$ e quindi è fissato dalla simmetria e $R(C) = D$ come volevamo. Abbiamo

$$R(x, y, z) = (x, y, z) - 2\frac{x - y - z}{3}(1, -1, -1)$$

Quindi la matrice G associata a R rispetto alla base standard è

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

mentre $b = 0$

Esercizio 4. Sia g il prodotto scalare associato alla matrice A. Sia $v_1 = e_1$. L'ortogonale a v_1 rispetto al prodotto scalare g è dato dall'equazione

$$x + 2y = 0 \ .$$

Scegliamo allora $v_2 = e_3$. L'ortogonale a v_1 e v_2 rispetto al prodotto scalare g è dato dalle equazioni

$$x + 2y = 0 \qquad \text{e} \qquad -3y + z = 0$$

Se scegliamo $y = 1$ otteniamo che $v_3 = -2e_1 + e_2 + 3e_3$ è ortogonale rispetto a g sia a v_1 che v_2. Nella base v_1, v_2, v_3 la matrice associata a g è diagonale, ovvero

$$[g]_{v_1,v_2,v_3} = \left([Id]^{v_1,v_2,v_3}_{e_1,e_2,e_3}\right)^t [g]_{e_1,e_2,e_3} [Id]^{v_1,v_2,v_3}_{e_1,e_2,e_3} = M\,A\,M^t$$

con $M = \left([Id]^{v_1,v_2,v_3}_{e_1,e_2,e_3}\right)^t$ è una matrice diagonale. Essendo M la matrice associata ad un cambiamento di base ha sicuramente determinante non nullo. Infine

$$M = \left([Id]^{v_1,v_2,v_3}_{e_1,e_2,e_3}\right)^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$