Compitino di Geometria e algebra lineare dell'11 febbraio: prima parte

Istruzioni: Avete 35 minuti di tempo a disposizione. Come prima cosa scrivete nome, cognome e matricola su questo foglio. Prima di consegnare il foglio trascrivetevi su un foglietto le risposte. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari, pena l'annullamento del compito. Dovete scrivere la risposta senza nessuna spiegazione negli appositi spazi. Per essere ammessi alla seconda parte bisogna rispondere correttamente ad almeno 4 domande.

Domanda 1. Sia $z = \log_e 2 + i\frac{\pi}{3}$. Calcolare e^z.

Risposta: $e^z =$

Domanda 2. Sia A la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Si calcoli il determinante di A^3.

Risposta: $Det(A^3) =$

Domanda 3. Sia π il piano $x + 2y - z = 0$, P il punto $(1, 1, 1)$ e Q la proiezione ortogonale di P su π.

Risposta: $Q =$

Domanda 4. Si consideri l'applicazione lineare $F : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3$ definita da

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y + z \\ y + z \\ x - z \end{pmatrix}$$

Si scriva la matrice associata ad F rispetto alla base $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (1, 0, 1)$ e $v_3 = (0, 1, 1)$ in partenza e standard in arrivo.

Risposta: $[F]^{v_1,v_2,v_3}_{e_1,e_2,e_3} =$

Domanda 5. Sia $U \subset \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ un sottospazio di dimensione 4. Sia $F : \mathrm{Mat}_{3\times 3} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una applicazione lineare surgettiva. Sapendo che l'intersezione tra U e $N(F)$ ha dimensione 3 calcolare la dimensione di $U + N(F)$.

Risposta: $\dim(U + N(F)) =$

Compitino di Geometria e algebra lineare dell'11 febbraio: prima parte

Istruzioni: Avete 35 minuti di tempo a disposizione. Come prima cosa scrivete nome, cognome e matricola su questo foglio. Prima di consegnare il foglio trascrivetevi su un foglietto le risposte. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari, pena l'annullamento del compito. Dovete scrivere la risposta senza nessuna spiegazione negli appositi spazi. Per essere ammessi alla seconda parte bisogna rispondere correttamente ad almeno 4 domande.

Domanda 1. Sia $z = \log_e 2 + i\frac{\pi}{4}$. Calcolare e^z.

Risposta: $e^z =$

Domanda 2. Sia A la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Si calcoli il determinante di A^3.

Risposta: $Det(A^3) =$

Domanda 3. Sia π il piano $x - y + 2z = 0$, P il punto $(1, 1, 1)$ e Q la proiezione ortogonale di P su π.

Risposta: $Q =$

Domanda 4. Sia $V = \mathbb{C}[x]_{\leqslant 2}$. Si consideri l'applicazione lineare $F : \mathbb{C}^3 \longrightarrow V$ definita da

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y + z \\ x + y - z \\ x + z \end{pmatrix}$$

Si scriva la matrice associata ad F rispetto alla base $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (1, 0, 1)$ e $v_3 = (0, 1, 1)$ in partenza e standard in arrivo.

Risposta: $[F]^{v_1,v_2,v_3}_{e_1,e_2,e_3} =$

Domanda 5. Sia $U \subset \mathrm{Mat}_{2\times 4}(\mathbb{R})$ un sottospazio di dimensione 5. Sia $F : \mathrm{Mat}_{2\times 4} \longrightarrow \mathbb{R}^4$ una applicazione lineare surgettiva. Sapendo che l'intersezione tra U e $N(F)$ ha dimensione 3 calcolare la dimensione di $U + N(F)$.

Risposta: $\dim(U + N(F)) =$

Compitino di Geometria e algebra lineare dell'11 febbraio: prima parte

Istruzioni: Avete 35 minuti di tempo a disposizione. Come prima cosa scrivete nome, cognome e matricola su questo foglio. Prima di consegnare il foglio trascrivetevi su un foglietto le risposte. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari, pena l'annullamento del compito. Dovete scrivere la risposta senza nessuna spiegazione negli appositi spazi. Per essere ammessi alla seconda parte bisogna rispondere correttamente ad almeno 4 domande.

Domanda 1. Sia $z = \log_e 2 + i\frac{\pi}{6}$. Calcolare e^z.

Risposta: $e^z =$

Domanda 2. Sia A la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Si calcoli il determinante di A^3.

Risposta: $Det(A^3) =$

Domanda 3. Sia π il piano $2x - y + z = 0$, P il punto $(1,1,1)$ e Q la proiezione ortogonale di P su π.

Risposta: $Q =$

Domanda 4. Sia $V = \mathbb{C}[x]_{\leqslant 2}$. Si consideri l'applicazione lineare $F : \mathbb{C}^3 \longrightarrow V$ definita da

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y+z \\ x+y+z \\ y+z \end{pmatrix}$$

Si scriva la matrice associata ad F rispetto alla base $v_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (1,0,1)$ e $v_3 = (0,1,1)$ in partenza e standard in arrivo.

Risposta: $[F]^{v_1,v_2,v_3}_{e_1,e_2,e_3} =$

Domanda 5. Sia $U \subset \mathrm{Mat}_{3\times 4}(\mathbb{R})$ un sottospazio di dimensione 5. Sia $F : \mathrm{Mat}_{3\times 4} \longrightarrow \mathbb{R}^6$ una applicazione lineare surgettiva. Sapendo che l'intersezione tra U e $N(F)$ ha dimensione 3 calcolare la dimensione di $U + N(F)$.

Risposta: $\dim(U + N(F)) =$

Compitino di Geometria e algebra lineare di venerdì 11 febbraio 2022: seconda parte

Istruzioni: Avete 2 ore e 20 di tempo a disposizione. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari, pena l'annullamento del compito.

Esercizio 1.

a) Si enunci il teorema della dimensione.
b) Sia A una matrice 3×3 a coefficienti reali. Si dimostri che se $N(L_A) = N(L_{A^2})$ allora $\mathrm{Im}(L_A)\cap N(L_A) = \{0\}$ e $N(L_A) + \mathrm{Im}(L_A) = \mathbb{R}^3$.

Esercizio 2. Sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ definito dalle equazioni

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - 2\,x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

e sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ definito generato dai vettori

$$w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Si dia una parametrizzazione di $U + W$.
b) Si dia una descrizione cartesiana di $U \cap W$.

Esercizio 3. Sia $E = \mathbb{C}[t]_{\leqslant 2}$ e sia U il sottospazio di E dei polinomi p tali che $p(1) = 0$. Sia $F = \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ e sia V il sottospazio di F delle matrici della forma $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)$. Sia $T : U \longrightarrow V$ l'applicazione lineare definita da

$$T(p) = \begin{pmatrix} p(2) & p(3) \\ 0 & p(0) \end{pmatrix}$$

Sia inoltre $S_k : E \longrightarrow F$ una applicazione lineare tale che

$$S_k(p) = T(p) \quad \text{per ogni } p \in U \quad \text{e} \quad S_k(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1+k \\ k^2 - 1 & -(1+k)/2 \end{pmatrix}$$

a) Si scelga una base di U e una di W e si scriva la matrice associata a T rispetto a queste basi.
b) Si determini il rango di S_k al variare di $k \in \mathbb{C}$

1. Soluzioni prima parte prima versione $z = \log_e 2 + i\pi/3$

Domanda 1. $1 + i\sqrt{3}$

Domanda 2. 8

Domanda 3. $(2/3, 1/3, 4/3)$

Domanda 4. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Domanda 5. 7

2. Soluzioni seconda parte seconda versione $z = \log_e 2 + i\pi/4$

Domanda 1. $\sqrt{2} + i\sqrt{2}$

Domanda 2. 27

Domanda 3. $(2/3, 4/3, 1/3)$

Domanda 4. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Domanda 5. 6

3. Soluzioni seconda parte terza versione $z = \log_e 2 + i\pi/6$

Domanda 1. $\sqrt{3} + i$

Domanda 2. -1

Domanda 3. $(1/3, 4/3, 2/3)$

Domanda 4. $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Domanda 5. 8

Esercizio 1. a) Il teorema della dimensione afferma che se $F : V \longrightarrow W$ è una applicazione lineare e V è uno spazio vettoriale di dimensione finita allora

$$\dim V = \dim N(F) + \dim \mathrm{Im}(F)$$

b) Sia $v \in N(L_A) \cap \mathrm{Im}(L_A)$. Quindi $A \cdot v = 0$ e esiste w tale che $A \cdot w = v$. In particolare $A^2 \cdot w = 0$. Dall'ipotesi $N(L_A) = N(L_{A^2})$ ricaviamo quindi $A \cdot w = 0$ e quindi $v = 0$. Questo dimostra $N(L_A) \cap \mathrm{Im}(L_A) = \{0\}$. Osserviamo inoltre che per il teorema della dimensione $\dim N(L_A) + \dim \mathrm{Im}(L_A) = 3$, quindi, utilizzando che $\dim N(L_A) \cap \mathrm{Im}(L_A) = 0$, dalla formula di Grassmann ricaviamo $\dim \big(N(L_A) + \mathrm{Im}(L_A)\big) = 3$ e quindi $N(L_A) + \mathrm{Im}(L_A) = \mathbb{C}^3$.

Soluzione esercizio 2. Osserviamo che i vettori che generano W sono linearmente indipendenti e che il sistema che definisce W ha rango 2, quindi anche $\dim W = \dim U = 2$. Inoltre osserviamo che il sistema che definisce U è gia in forma a scalini e quindi è immediato scrivere una sua base:

$$u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Possiamo ricavare delle equazioni di W vedendo quando il sistema $xw_1 + yw_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ ha soluzione. Riducendo a scalini la matrice del sistema completo associato

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & | & x_1 \\ 1 & 1 & | & x_2 \\ -1 & 0 & | & x_3 \\ 0 & 1 & | & x_4 \end{pmatrix}$$

otteniamo che W è definito dalle equazioni $x_1 = x_4$ e $x_1 = x_2 + x_3$.

a) un vettore di W è della forma $w = aw_1 + bw_2$. Questo vettore è un vettore di $U \cap W$ se le sue coordinate risolvono le due equazioni che definiscono U. Sostituendo troviamo

$$-a + b - 2b = 0 \qquad a + a + b + b = 0$$

ovvero l'unica condizione $a = -b$. Ne ricaviamo che l'intersezione ha dimensione uno e che è l'insieme dei vettori

$$t(w_2 - w_1) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ t \\ t \end{pmatrix}.$$

Quindi le equazioni che definiscono $U \cap W$ sono

$$x_2 = 0 \qquad x_1 = x_4 \qquad x_3 = x_4,$$

b) Dal punto precedente, per la formula di Grassmann, ricaviamo che $U + W$ ha dimensione 3. Osserviamo inoltre che $w_1 \notin U$ infatti non risolve l'equazione, $x_2 - x_2 + x_4 = 0$ quindi i vettori

$$u_1, \ u_2, \ w_1$$

sono linearmente indipendenti ed essendo tre sono una base di $U + W$. In particolare l'applicazione

$$\begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix} \mapsto ru_1 + su_2 + tu_3 = \begin{pmatrix} -r + 2s \\ r - s + t \\ r - t \\ s + t \end{pmatrix}$$

è una parametrizzazione di $U + W$.

Soluzione esercizio 3. a) Una base di U sono i polinomi $t-1, t^2-1$ e una base di V sono le matrici E_{11}, E_{12}, E_{22}. Abbiamo

$$[T]^{t-1,t^2-1}_{E_{11},E_{12},E_{22}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 8 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Questa matrice ha rango 2.

b) Osserviamo che l'immagine di S_k contiene l'immagine di T. Ne ricaviamo che

$$2 = rango(T) \leqslant rango(S_k) \leqslant \dim E = 3.$$

Se $k \neq \pm 1$ osserviamo che $S_k(t) \notin V$, quindi l'immagine di S è più grande dell'immagine di T e ricaviamo $rango(S_k) = 3$.

Se $k = 1$ ricaviamo che l'immagine di S_k è generata dall'immagine di T e dalla matrice $S_1(t)$ ovvero

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

che è uguale a $T(t-1)$ quindi l'immagine di S_1 è uguale all'immagine di T. Quindi $rango(S_1) = 2$.

Infine se $k = -1$ ricaviamo che l'immagine di S_k è generata dall'immagine di T e dalla matrice $S_{-1}(t)$ ovvero

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Bisogna controllare se questa matrice è nell'immagine di T. Ma se $p \in U$ e $T(p) = A$ allora $p(1) = p(0) = p(3) = 0$. Ma p è un polinomio di grado al massimo 2 e quindi $p = 0$. Quindi in questo caso $rango(S_{-1}) = 3$.