Compito di geometria e algebra lineare del 12 settembre 2022

Istruzioni: Avete 2 ore e 30' di tempo. Non è sufficiente dare la risposta giusta, dovete fornire delle giiustificazioni. Durante lo svolgimento non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari né altri oggetti elettronici, pena l'annullamento del compito. Buon lavoro!

Esercizio 1. [9 punti] Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

(1) Sia $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un endomorfismo. Se n è pari, f ha almeno un autovettore.
(2) Sia $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un endomorfismo. Se n è dispari, f ha almeno un autovettore.
(3) Ogni endomorfismo $f\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ ha almeno un autovettore.

In tutti i casi, se la frase è vera devi dimostrarlo, se è falsa devi fornire un controesempio.

Esercizio 2. [9 punti] Considera i sottospazi in $\mathbb{R}^4$ dati da

$$U = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$W = \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + 7x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_3 - 11x_4 = 0 \end{array} \right.$$

(1) Determina la dimensione di $U + W$.
(2) Costruisci una matrice 4×4 non nulla A tale che l'immagine dell'endomorfismo $L_A\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ sia contenuta sia in U che in W.

Esercizio 3. [9 punti] Considera la matrice simmetrica seguente, dipendente da un parametro $t \in \mathbb{R}$:

$$S = \begin{pmatrix} t & 0 & 1 & 0 \\ 0 & t & 0 & 1 \\ 1 & 0 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & t \end{pmatrix}.$$

Determina la segnatura di S al variare di $t \in \mathbb{R}$.

Esercizio 4. [9 punti] Considera nello spazio $\mathbb{R}^3$ la retta

$$r = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 1+t \\ -1 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$$

ed il piano π di equazione $y = 2$.

(1) Descrivi una isometria $f(x) = Ax + b$ con punti fissi tale che $f(r)$ non interseca π.
(2) Descrivi una isometria $f(x) = Ax + b$ senza punti fissi tale che $f(r)$ non interseca π.

Soluzioni

Esercizio 1. Le affermazioni (1) e (3) sono vere perché il polinomio caratteristico ha sempre almeno una radice. L'affermazione (2) è falsa, basta prendere una rotazione i $\mathbb{R}^2$ di angolo diverso da 0 e π.

Esercizio 2. Scrivendo il vettore generico di U come $(t+2u, t, -u, t+u)$ e inserendolo nelle equazioni di W si vede che $U \cap W$ è una retta generata da $(-1, 1, 1, 0)$. Quindi per Grassmann $U + W$ ha dimensione $2 + 2 - 1 = 3$.

Un endomorfismo richiesto è ad esempio dato dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3. Il polinomio caratteristico è $((t-\lambda)^2-1)^2$ e ha radici $\lambda = t \pm 1$, ciascuna con molteplicità due. Quindi la segnatura è $(4,0,0)$ per $t > 1$, $(2,0,2)$ per $t = 1$, $(2,2,0)$ per $-1 < t < 1$, $(0,2,2)$ per $t = -1$ e $(0,4,0)$ per $t < -1$.

In alternativa si può usare il metodo di Jacobi e ottenere la successione $1, t, t^2, t(t^2-1), (t^2-1)^2$ che funziona tranne nei casi $t = -1, 0, 1$, che vanno analizzati separatamente. Ad esempio nel caso $t = -1$ la matrice ha rango 2 e la sottomatrice quadrata in alto a sinistra ha segnatura $(0,2,0)$, quindi l'unica possibilità è $(2,2,0)$.

Esercizio 4. Retta e piano si intersecano con angolo $\pi/4$ nel punto $(1,2,-1)$. Facendo un disegno si vede che una isometria con punti fissi è una rotazione oraria di angolo $\pi/4$ intorno alla retta

$$r' = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ t \end{pmatrix} \right\}.$$

Cambiando coordinate e riportando in quelle originali, si ottiene questo:

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ 1-\sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Per ottenere una isometria senza punti fissi basta aggiungere una traslazione lungo la direzione dell'asse, quindi ad esempio

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ 1-\sqrt{2}/2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$