Compito di geometria e algebra lineare del 27 giugno 2022

Istruzioni: Avete 2 ore e 30' di tempo. Non è sufficiente dare la risposta giusta, dovete fornire delle giiustificazioni. Durante lo svolgimento non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari né altri oggetti elettronici, pena l'annullamento del compito. Buon lavoro!

Esercizio 1. [9 punti] Siano $v_1, v_2, v_3 \in V$ vettori in uno spazio vettoriale. Sia $f\colon V \to W$ una funzione lineare.

(1) È sempre vero che se v_1, v_2, v_3 sono indipendenti allora $f(v_1), f(v_2), f(v_3)$ sono indipendenti?
(2) È sempre vero che se v_1, v_2, v_3 sono dipendenti allora $f(v_1), f(v_2), f(v_3)$ sono dipendenti?

In entrambi i casi, se la risposta è positiva dovete dimostrarlo, e se è negativa dovete descrivere un controesempio.

Esercizio 2. [9 punti] Considera la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

dipendente da tre parametri reali $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(1) Per quali valori di a, b, c l'endomorfismo $L_A\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dato da
$$L_A(x) = Ax$$
è diagonalizzabile?
(2) Sia $M(2)$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate reali 2×2. Per quali valori l'endomorfismo $L_A\colon M(2) \longrightarrow M(2)$ dato da
$$L_A(X) = AX$$
è diagonalizzabile?

Esercizio 3. [9 punti] Calcola il determinante e la segnatura della matrice seguente:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Più in generale, per ogni $n \geqslant 1$ considera la matrice $(2n) \times (2n)$ seguente:

$$S_{2n} = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix}$$

dove 0_n e I_n sono rispettivamente la matrice nulla e la matrice identità, entrambe $n \times n$. Calcola il determinante e la segnatura di S_{2n} al variare di n.

Esercizio 4. [9 punti] Considera nello spazio la retta r passante per i punti $(3, 1, 1)$ e $(-7, 1, 1)$ e la retta s passante per il punto $(0, 2, 2)$ e parallela alla retta vettoriale $\text{Span}(1, 0, 1)$.

Costruisci una isometria $f(x) = Ax + b$ tale che $f(r) = s$.

Soluzioni

Esercizio 1.

(1) No. Ad esempio, non accade se $V = W = \mathbb{R}^3$, v_1, v_2, v_3 è la base canonica, e $f = L_A$ con A la matrice nulla. Ci sono numerosi altri controesempi. Ad esempio se la dimensione di W è minore o uguale a due non è mai vero.
(2) Sì. Per definizione, i tre vettori sono dipendenti se esiste una combinazione lineare nulla $av_1 + bv_2 + cv_3 = 0$ con coefficienti a, b, c non tutti nulli. Applicando f e usando la linearità si ottiene $af(v_1) + bf(v_2) + cf(v_3) = 0$ e quindi anche $f(v_1), f(v_2), f(v_3)$ sono dipendenti.

Esercizio 2.

(1) La matrice è triangolare e quindi gli autovalori sono a e c. Se sono distinti è diagonalizzabile. Se coincidono, troviamo un solo autovalore $a = c$ con molteplicità algebrica 2, e si vede che la molteplicità geometrica è 2 solo quando $b = 0$. Riassumendo, la matrice è diagonalizzabile se e solo se $a \neq c$ oppure $a = c$ e $b = 0$.
(2) La matrice associata alla base canonica è una matrice 4×4, triangolare e con valori a, c, a, c sulla diagonale. Ragionando similmente a sopra si ottiene lo stesso risultato.

Esercizio 3. La matrice ha determinante 1. Le segnature possibili sono quindi $(4,0,0)$, $(2,2,0)$, $(0,4,0)$. Poiché la traccia è nulla, l'unica possibile è $(2,2,0)$.

In generale, si dimostra per induzione su n che il determinante di S_{2n} è $(-1)^n$ e la segnatura è $(n,n,0)$. Il caso $n=1$ è facile. Supponiamo dimostrato il caso $n-1$ e dimostriamo il caso n. Per dimostrare che il determinante è $(-1)^n$ in realtà l'induzione non serve: basta notare che scambiando n colonne opportune si ottiene la matrice identià, e ricordando che ogni scambio cambia il segno del determinante.

Per quanto riguarda la segnatura, notiamo che cancellando due opportune coppie di righe e colonne troviamo che $S_{2(n-1)}$ è sottomatrice di S_{2n}. Per ipotesi induttiva sappiamo che la segnatura della sottomatrice $S_{2(n-1)}$ è $(n-1,n-1,0)$. Quindi la segnatura della matrice S_{2n} deve essere una di queste:

$$(n+1,n-1,0), \quad (n,n,0), \quad (n-1,n+1,0).$$

L'unica compatibile con il segno del determinante è la seconda.

Esercizio 4. Le giaciture delle due rette sono entrambe contenute nel piano $y=0$ e formano un angolo di $\pi/4$. Quindi per mandare la giacitura di r in quella di s è sufficiente ruotare intorno all'asse y di questo angolo, con la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}.$$

Per trovare b è sufficiente imporre che $f(x) = Ax + b$ mandi un punto di r in un punto di s. Ad esempio questo funziona:

$$b = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 1 \\ 2 - \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}.$$

Più geometricamente, possiamo costruire una rototraslazione con asse perpendicolare alle due rette, parallelo all'asse y e trovare un risultato analogo (la b che funziona non è unica).