Compito di geometria e algebra lineare del 6 giugno 2022

Istruzioni: Avete 2 ore e 30' di tempo. Non è sufficiente dare la risposta giusta, dovete fornire delle giiustificazioni. Durante lo svolgimento non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari né altri oggetti elettronici, pena l'annullamento del compito. Buon lavoro!

Esercizio 1. [9 punti]

(1) Enuncia il teorema della dimensione.
(2) Siano $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ e $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ due funzioni lineari.
  (a) È possibile che la composizione $f \circ g$ sia iniettiva?
  (b) È possibile che la composizione $g \circ f$ sia iniettiva?
  In entrambe le domande, se la risposta è "no" dovete dimostrarlo, se è "si" dovete costruire un esempio in cui la composizione è effettivamente iniettiva.

Esercizio 2. [9 punti] Considera i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$U = \text{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\1\end{pmatrix}\right), \qquad W = \begin{cases} 2x_1 - x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 &= 0 \end{cases}$$

(1) Calcola le dimensioni di $U \cap W$ e $U + W$.
(2) Costruisci una funzione lineare $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ suriettiva tale che $f(v) = 0$ per ogni $v \in U$ e per ogni $v \in W$.

Esercizio 3. [9 punti] Sia $V = M(n)$ lo spazio vettoriale delle matrici reali $n \times n$.

(1) L'endomorfismo $f\colon V \to V$, $f(A) = -A$ è diagonalizzabile?
(2) L'endomorfismo $f\colon V \to V$, $f(A) = {}^{t}A$ è diagonalizzabile?

In entrambi i casi la risposta va motivata. Nel punto (2), se non ti riesce il caso n generale studia i casi $n = 2$ e $n = 3$.

Esercizio 4. [9 punti] Consideriamo nello spazio il piano $\pi = \{z = 1\}$ e la retta r passante per i punti $(2, 1, 0)$ e $(0, 1, -2)$.

(1) Costruisci una isometria $f(x) = Ax + b$ tale che $f(r) \subset \pi$ e f non abbia punti fissi.
(2) Costruisci una isometria $f(x) = Ax + b$ tale che $f(r) \subset \pi$ e f abbia punti fissi.

Soluzioni

Esercizio 1.

(1) Fatto a lezione
(2) (a) g non può essere iniettiva perché la dimensione del codominio è minore di quella del dominio: il teorema della dimensione ci darebbe $3 = \dim \text{Im} g + \dim \text{Ker} g$ ma $\text{Im} g \leqslant 2$ porta a $\dim \text{Ker} g \geqslant 1$. Se g non è iniettiva, neanche $f \circ g$ può essere iniettiva.
  (b) $g \circ f$ può essere iniettiva. Ad esempio basta rappresentare f e g come la moltiplicazione a sinistra per le matrici seguenti:

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

Esercizio 2. Si trova che $U \cap W$ è una retta generata dal vettore $(1, 0, 2, -1)$. Quindi $\dim U \cap W = 1$ e per Grassmann $\dim(U + W) = 3$. Per costruire f è sufficiente prendere una base v_1, v_2, v_3 di $U + W$ e costruire una $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4$ non nulla tale che $f(v_i) = 0$ per ogni i. Ad esempio si prende

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\2\\-1\end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

La funzione $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = -3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4$ funziona.

Esercizio 3.

(1) La funzione f manda ogni matrice A in $-A$. Quindi qualsiasi matrice non nulla è un autovettore con autovalore -1. Una qualsiasi base di matrici (ad esempio quella canonica) è una base di autovettori. Quindi f è diagonalizzabile.

(2) Diamo tre soluzioni diverse.

(a) Se prendiamo la base canonica $E_{i,j}$ notiamo che $f(E_{i,j}) = E_{j,i}$. Notiamo che la matrice associata a f rispetto alla base canonica è simmetrica e quindi diagonalizzabile per il teorema spettrale (è utile scrivere i casi $n = 2$ e $n = 3$ per farsi una idea del fatto che la matrice associata viene simmetrica).

(b) Una base esplicita di autovettori è data dalle matrici
$$E_{ii}, \quad E_{ij} + E_{ji}, \quad E_{ij} - E_{ji}.$$
Queste hanno autovalore rispettivamente $1, 1, -1$.

(c) Lo spazio $M(n)$ si decompone in somma diretta come $S(n) \oplus A(n)$ dove $S(n)$ sono le matrici simmetriche e $A(n)$ le antisimmetriche. La funzione f lascia invariante sia $S(n)$ che $A(n)$, e gli elementi di $S(n)$ e $A(n)$ sono autovettori con autovalore 1 e -1. Quindi $S(n)$ e $A(n)$ sono proprio gli autospazi di f. Lo spazio $M(n)$ si decompone in autospazi e allora f è diagonalizzabile.

Esercizio 4. Facendo un disegno si vede che retta e piano si intersecano in $P = (3, 1, 1)$ con un angolo di $\pi/4$. È possibile mandare r in π in vari modi: ad esempio con una rotazione di $\pi/4$ intorno alla retta passante per P e parallela a y, seguita da una traslazione parallela a π. In questo modo si ottiene
$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 + \sqrt{2} \end{pmatrix}$$
dove a, b sono arbitrari. Si ottengono punti fissi precisamente quando $b = 1$.