

Indicazioni per lo studio e per gli esercizi per casa. Questo file di esercizi sarà aggiornato durante l'anno. In particolare in questa sezione comparirà a fine settimana una indicazione di quello che è stato fatto durante la settimana e la lista degli esercizi che si consiglia di svolgere per la successiva.

sabato 3 ottobre. Il materiale fatto questa settimana lo trovate nella prima nota del corso, la parte relativa ai richiami sugli insiemi.

Per casa potete fare gli esercizi 1.1, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7, 1.8, 1.9. In particolare provate a fare uno tra gli esercizi 1.6, e un paio tra gli esercizi 1.7, 1.8 e 1.9. Per esperienza, alcuni troveranno questi esercizi non facili ma e' utile averci provato almeno un po' prima di vedere la soluzione. Se trovate difficoltà provate a soffermarvi sul primo di questi esempi, quello dell'esercizio 1.7 e chiedetevi, come abbiamo fatto a lezione se 1 appartiene all'insieme, se 0 appartiene all'insieme e così via. Quando vi siete fatti un'idea provate a motivare la risposta.

sabato 9 ottobre. Gli argomenti di questa settimana li potete trovare nella nota sugli insiemi e nella prima nota sui numeri complessi. Potete fare gli esercizi da 4.1 a 4.6. L'esercizio 4.1 per noi sarà solo una curiosità, invece i cinque esercizi che seguono riguardano qualche calcolo sui numeri complessi e secondo me è importante prenderci un po' la mano.

sabato 16 ottobre. Gli argomenti trattati questa settimana li trovate nella seconda nota sui numeri complessi. Invito inoltre chi non ha familiarità con i polinomi a guardarsi anche la nota sui polinomi che saranno un oggetto importante in tutto il corso.

Potete fare uno qualsiasi degli esercizi sui numeri complessi della sezione 4. In particolare consiglio di provare a fare il 4.7, il 4.8, il 4.11, il 4.12 e il 4.14.

sabato 23 ottobre. Gli argomenti trattati questa settimana li trovate nella prima nota sulla geometria dello spazio.

Potete fare gli esercizi 5.1, 5.2, 5.3, 5.5, 5.9, 5.10, 5.11, 5.12.

sabato 30 ottobre. Gli argomenti trattati questa settimana li trovate nella prima nota sugli spazi vettoriali.

Potete fare i primi sette esercizi della sezione 6, l'esercizio 7.2 e il 7.3

sabato 6 novembre. Gli argomenti trattati questa settimana li trovate nella prima nota sugli spazi vettoriali e all'inizio della nota sulle matrici.

Potete fare qualsiasi esercizio della sezione 6 e della sezione 7. Consiglio di fare in modo particolare gli esercizi: 6.8, 6.11, 7.6, 7.7, 7.8 e 7.11.

sabato 13 novembre. Gli argomenti trattati questa settimana sono il prodotto tra matrici e le applicazioni lineari. Li trovate spiegati nella nota sulle matrici e nella prima parte della nota sulle applicazioni lineari.

Potete fare gli esercizi: 8.2, 8.4, 8.11, 8.13, 8.14, 8.15, 9.1, 9.2 e il punto (1) del 9.3.

In particolar modo consiglio di fare l'8.2, l'8.14, il 9.1, il 9.2 e l'(1) del 9.3.

sabato 20 novembre. Gli argomenti trattati questa settimana le trovate spiegati nella nota sulle applicazioni lineari.

Potete fare gli esercizi dal 9.3 al 9.8 e il primo punto del 9.9 e del 9.10. Potete fare anche i rimanenti esercizi della sezione 9, ma potreste trovarli più difficili.

Sarebbe molto importante fare il 9.7 e il 9.3.

sabato 27 novembre. Gli argomenti trattati questa settimana le trovate spiegati nell'ultima parte sulle applicazioni lineari e nella prima parte della nota sui sistemi lineari.

Consiglio di fare tutti gli esercizi della sezione 9 tranne il 9.12 e l'esercizio 10.3.

Secondo me sarebbe importante fare il 10.3, il 9.10 e il 9.8 (quest'ultimo per controllare quanto uno ha imparato a formalizzare). Correggero' a lezione sicuramente il 10.3 e il 9.11. Quest'ultimo è pure importante ma potrebbe risultare difficile rispetto agli altri che ho segnalato e per i quali abbiamo già visto esercizi simili. Se c'è tempo poi correggero' il 9.8, gli altri esercizi e' probabile che a lezione non verranno corretti.

Sabato 4 dicembre. Gli argomenti trattati questa settimana li trovate nella ultima parte delle note sui sistemi lineari e nella prima nota sulla dimensione.

Si possono fare gli esercizi 10.1, 10.2, 10.4, 10.5, 10.8, 11.3, 11.4.

Sabato 11 dicembre. Gli argomenti trattati questa settimana li trovate nella due note sulla dimensione e nella nota sulla descrizione di sottospazi.

Potete fare qualsiasi esercizio delle sezioni 10, 11 e 12, tranne il 12.9 e il 12.10. Consiglio di fare in particolar modo il 10.7, l'11.4 (se non lo avete già fatto), l'11.6, il 12.4, e il 12.13 (quest'ultimo forse risulterà più difficile).

Sabato 18 dicembre. Gli argomenti trattati questa settimana li trovate nella nota sul determinante e nella nota sulla descrizione di sottospazi.

Potete fare gli esercizi della sezione 13.

1. ESERCIZI SUI PREREQUISITI

Questi esercizi riguardano argomenti che nel corso sono stati solo velocemente richiamati durante la prima settimana e che il corso presuppone noti dalle superiori. Si tratta di qualche nozione di calcolo proposizionale, di insiemistica, di trigonometria e coordinate polari.

Esercizio 1.1. Scrivere il numero $1,2\overline{345}$ come frazione. Scrivere la frazione $11/7$ come numero con la virgola.

Esercizio 1.2. In una classe di Ingegneria meccanica di 200 studenti tutti hanno almeno dato un esame tra analisi, geometria e fisica al primo appello utile. 160 hanno dato analisi, 70 geometria, 60 fisica, 15 hanno dato analisi e geometria, ma non fisica e 25 analisi e fisica ma non geometria. Gli studenti che hanno dato sia geometria che fisica hanno dato anche analisi. Quanti sono gli studenti che hanno almeno due esami?

Esercizio 1.3. In una classe di Ingegneria meccanica di 250 studenti tutti hanno almeno dato un esame tra analisi, geometria e fisica al primo appello utile. 150 hanno dato analisi, 100 geometria, 75 fisica, e 15 tutti e tre gli esami. Gli studenti che hanno dato sia geometria che fisica hanno dato anche analisi. Quanti sono gli studenti che hanno almeno due esami?

Esercizio 1.4. Sia

$$A = \{1, 2, 3, 5\} \quad B = \{x \in \mathbb{N} : x^2 = 9 \text{ o } x^2 = 16\} \quad \text{e} \quad C = \{4, 6, 7\}$$

Si descrivano gli insiemi

$$A \setminus B \quad C \times (A \setminus B) \quad (A \times B) \cap (C \times B).$$

elencandone gli elementi.

Esercizio 1.5. Sia $A = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ e sia $B = \{x^2 : x \in A\}$. Si calcoli $\text{card}(B)$.

Esercizio 1.6. Siano A e B due sottoinsiemi dell'insieme C , ovvero contenuti in C . Sia

$$D = \{x \in C : \text{se } x \in A \text{ allora } x \in B\}$$

Capire chi è l'insieme D . Si faccia un disegno di A , B e C e si colori l'insieme D .

[provate a fissare x in C e cercate di capire se per quel dato x frase "se $x \in A$ allora $x \in B$ " sia vera o meno. Sulla correzione di questo esercizio ci soffermeremo.]

Esercizio 1.7. Si dia una descrizione più esplicita dei seguenti insiemi

$$\begin{aligned} &\{x \in \mathbb{R} : \forall y \in \mathbb{R}, x = xy\} \\ &\{x \in \mathbb{R} : \forall y \in \mathbb{R} \exists z \in \mathbb{R} \text{ tale che } x + y + z = 0\} \\ &\{x \in \mathbb{R} : \exists z \in \mathbb{R} \text{ tale che } \forall y \in \mathbb{R}, x + y + z = 0\} \end{aligned}$$

Esercizio 1.8. Si dia una descrizione più esplicita dei seguenti insiemi

$$\begin{aligned} &\{x \in \mathbb{R} : \forall y \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R}, y + xz = 0\} \\ &\{x \in \mathbb{R} : \forall y \in \mathbb{R}, \exists z \in \mathbb{R} \text{ tale che } y + xz = 0\} \\ &\{x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R}, \text{ tale che } \forall z \in \mathbb{R}, y + xz = 0\} \\ &\{x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R}, \exists z \in \mathbb{R} \text{ tale che } y + xz = 0\} \\ &\{x \in \mathbb{R} : \forall z \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} \text{ tale che } y + xz = 0\} \\ &\{x \in \mathbb{R} : \exists z \in \mathbb{R}, \text{ tale che } \forall y \in \mathbb{R} y + xz = 0\} \end{aligned}$$

Esercizio 1.9. Si dia una descrizione più esplicita dei seguenti insiemi

$$\begin{aligned} & \{x \in \mathbb{R} : \forall y \in \mathbb{R} \exists z \in \mathbb{R} \text{ tale che } xz = xzy^2\} \\ & \{x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} \text{ tale che } \forall z \in \mathbb{R}, xz = xzy^2\} \\ & \{x \in \mathbb{R} : \forall y \in \mathbb{R} \exists z \in \mathbb{R} \text{ tale che } xz = xy^2\} \\ & \{x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} \text{ tale che } \forall z \in \mathbb{R}, xz = xy^2\} \end{aligned}$$

Esercizio 1.10. Determinare le coordinate cartesiane dei punti che hanno le seguenti coordinate polari senza usare la calcolatrice

$$\rho = 5, \alpha = 3\pi/2 \quad \rho = 3, \alpha = 5\pi/4 \quad \rho = 2, \alpha = -\pi/3 \quad \rho = 4, \alpha = -\pi/6$$

Esercizio 1.11. Determinare le coordinate polari dei punti che hanno le seguenti coordinate cartesiane senza usare la calcolatrice

$$(-2, -2), \quad (3, -3\sqrt{3}), \quad (-1, 1)$$

Esercizio 1.12. Determinare le coordinate cartesiane dei punti che hanno le seguenti coordinate polari usando la calcolatrice

$$\rho = 5, \alpha = 1, 1 \quad \rho = 3, \alpha = \pi/7 \quad \rho = 2, \alpha = 2 \quad \rho = 4\sqrt{3}, \alpha = -\pi/9$$

Esercizio 1.13. Determinare le coordinate polari dei punti che hanno le seguenti coordinate cartesiane usando la calcolatrice

$$(-2, -3), \quad (3, 5), \quad (4, 1)$$

2. ESERCIZI SUI PREREQUISITI: CONCETTI DI BASE SULLE FUNZIONI

Queste esercizi riguardano alcuni concetti riguardanti le funzioni, che supponiamo noti dalle superiori, e che verranno richiamati più avanti nel corso. Altri esercizi simili, forse leggermente più semplici li trovate nella nota sui prerequisiti.

Esercizio 2.1. Sia \mathbb{R}_+ , l'insieme dei numeri reali maggiori o uguali a 0. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ definita da $f(x) = x^2$ e sia $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ definita dalla stessa formula $g(x) = x^2$. Dire se f e g sono iniettive o surgettive.

Esercizio 2.2. Sia $A = \{-1, 1, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Sia $f : A \rightarrow \mathbb{Z}$ definita da $f(n) = n^2 - 1$. Determinare l'immagine di f e calcolare $f^{-1}(B)$.

Esercizio 2.3. Dire quali tra le seguenti funzioni da \mathbb{R} a \mathbb{R} sono iniettive e quali surgettive.

$$f(x) = x^3 - x; \quad g(x) = x^4 - x^2 + 1; \quad h(x) = x + 7.$$

Per le funzioni che sono sia iniettive che surgettive determinare l'inversa.

Esercizio 2.4. Siano $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definite da $f(x) = x^2 + 4x$ e $g(x) = x^2 - 1$. Determinare l'immagine di f , di g e di $f \circ g$.

Esercizio 2.5. Siano $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ le funzioni $f(x) = x^2 - 2x - 3$, $g(x) = x^2 - 3$ e $h = f \circ g$. Sia $A = [-5, 5]$. Determinare $f^{-1}(A)$ e $h^{-1}(A)$.

Esercizio 2.6. Sia \mathbb{R}_+ , l'insieme dei numeri reali maggiori o uguali a 0. Sia $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ definita da $f(x) = x^2 + 2x$. Si dimostri che f è bigettiva e se ne calcoli l'inversa.

Esercizio 2.7. Sia $f : X \rightarrow Y$.

- Si dimostri che se f è bigettiva allora $f \circ f^{-1} = id_Y$ e $f^{-1} \circ f = id_X$.
- Viceversa si dimostri che se esistono $g, h : Y \rightarrow X$ tali che $f \circ g = id_Y$ e $h \circ f = id_X$ allora f è bigettiva e $g = h = f^{-1}$.
- Si dia un esempio di una funzione f che non sia bigettiva, per la quale esiste $g : Y \rightarrow X$ tale che $f \circ g = id_Y$.

Esercizio 2.8. Sia $f : X \rightarrow Y$ e sia $g : Y \rightarrow Z$. Si dimostri che se f e g sono bigettive, allora anche $g \circ f$ lo è e $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

Esercizio 2.9. Sia $f : X \rightarrow Y$ e sia $g : Y \rightarrow Z$. Si dimostri che

- se $g \circ f$ è iniettiva, allora f è iniettiva.
- se $g \circ f$ è surgettiva, allora g è surgettiva.
- fare un esempio in cui $g \circ f$ è bigettiva, ma f non è surgettiva e g non è iniettiva.

3. ESERCIZI VARI

Questi esercizi non sono su un argomento specifico trattato nel corso, né sono esercizi su argomenti che il corso presuppone noti dalle superiori. Sono esempi di piccoli ragionamenti matematici. Nessun esercizio richiede delle conoscenze specifiche, ma tutti gli esercizi richiedono un po' di pazienza e tenacia, in alcuni all'inizio non è chiaro come procedere ma non ci si deve lasciar scoraggiare.

Esercizio 3.1. Supponiamo di aver colorato ogni lato e ogni diagonale di un esagono di rosso o blu. Si dimostri che esiste un triangolo tutto colorato di rosso o un triangolo tutto colorato di blu.

Esercizio 3.2. Un cavallo si muove su una scacchiera 8×8 partendo da un angolo della scacchiera. Può passare per tutte le caselle della scacchiera una e una sola volta e terminare nell'angolo opposto da quello da cui è partito?

Esercizio 3.3. Due bambini giocano con delle monete e due buste. Partono con 100 monete in una busta e 99 in un'altra. Il primo giocatore butta le monete di una busta e divide le monete rimanenti nelle due buste facendo sì che ogni busta contenga almeno una moneta e passa le buste all'altro giocatore. Il gioco continua con i due giocatori che si alternano. Vince chi riesce a dare all'altro due sacchetti con una moneta. Uno dei due giocatori ha una strategia vincente?

Esercizio 3.4. Due bambini giocano sul tavolo di casa che è perfettamente rettangolare. Hanno a disposizione una pila di piatti circolari tutti uguali. I due giocatori dispongono, alternandosi, un piatto sul tavolo in una zona libera, ovvero senza che questo sia sovrapposto in nessun modo ai piatti precedenti. Perde il primo giocatore che non riesce a mettere il piatto o il cui piatto cade. All'inizio il tavolo è vuoto. Il primo giocatore ha una strategia vincente. Quale?

Esercizio 3.5. Si dimostri che esistono infiniti numeri primi procedendo nel seguente modo: si supponga per assurdo che siano in numero finito e che siano p_1, \dots, p_n si consideri il numero $m = p_1 \cdot \dots \cdot p_n + 1$ e si osservi che questo numero non è divisibile per nessuno dei numeri primi p_1, \dots, p_n .

4. NUMERI COMPLESSI

Esercizio 4.1. Si definisca un campo che ha soli due elementi. [questo esercizio non ha nessuna importanza per il proseguo del corso, rimarrà come una curiosità]

Esercizio 4.2. Calcolare $(1 + i)^2$. Calcolare $(3 + 4i) \cdot (3 - 2i)$.

Esercizio 4.3. Sia $z = 3 + 4i$ e $w = 7 - 3i$. Calcolare \bar{z}/w e $z \cdot \bar{w}$.

Esercizio 4.4. Verificare che per ogni $z \in \mathbb{C}$ si ha $\bar{\bar{z}} = z$.

Esercizio 4.5. Calcolare le radici quadrate complesse dei seguenti numeri:

$$37, \quad -169, \quad 9i, \quad -\frac{3}{4} + i, \quad 3 + 7i.$$

(ogni tanto vi verranno dei numeracci)

Esercizio 4.6. Risolvere le seguenti equazioni dove z è un numero complesso

$$(1 + i)z + 14 = 0, \quad z^2 + 5z + 10 = 0, \quad (1 + i)z^2 + \sqrt{3}z - \frac{1}{2} - \frac{i}{2} = 0$$

(ogni tanto vi verranno dei numeracci)

Esercizio 4.7. Calcolare le radici quarte di -16 (ovvero gli z tali che $z^4 = -16$). Calcolare le radici ottave di 1 (ovvero gli z tali che $z^8 = 1$). [utilizzare le coordinate polari].

Esercizio 4.8. Determinare tutti i numeri complessi z tali che $z^4 = \bar{z}^3$.

Esercizio 4.9. Determinare tutti i numeri complessi z tali che

$$\frac{z - i}{z + i}$$

è un numero reale.

Esercizio 4.10. Determinare tutti i numeri complessi z tali che

$$\frac{|z - i|}{|z + i|} = 2.$$

Esercizio 4.11. Determinare tutti i numeri complessi z tali che $e^z = e$.

Esercizio 4.12. Risolvere le seguenti equazioni, dove $z \in \mathbb{C}$:

$$(z - \bar{z})^3 = i \quad z^2 + (i - 1)z - i = 0 \quad z^3 = iz\bar{z}$$

Esercizio 4.13 (Daddi). Si determini il valore del parametro reale k in modo che l'equazione $z^2 + (3 + ki)z = 8 - 9i$ abbia, tra le sue soluzioni, il numero complesso $2 - i$. Si determini poi l'altra soluzione dell'equazione.

Esercizio 4.14. Risolvere l'equazione $e^{3z} + 5e^{2z} + 7e^z = 0$.

Esercizio 4.15 (Daddi). Si disegni nel piano complesso l'insieme rappresentato dal sistema

$$\begin{cases} |\operatorname{Im}(z - 2 + 4i)| \leq 1 \\ |z - 1 + 3i| > 3. \end{cases}$$

Esercizio 4.16. Sia $w = e^{\frac{2\pi i}{n}}$, allora $w^{n-1} + w^{n-2} + \dots + w + 1 = 0$.

Esercizio 4.17. Si trovi una formula per l'ennesimo termine della successione x_n definita nel modo seguente:

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_{n+1} = 2x_n - 2x_{n-1}.$$

5. GEOMETRIA DEL PIANO E DELLO SPAZIO

Esercizio 5.1. Siano dati i punti $p = (1, 2, 3)$, $q = (0, 1, -2)$, $r = (-2, 1, 1)$. Calcolare

$$p + 3q - r \quad 3p - 2q + r$$

Esercizio 5.2. Siano dati i punti $p = (1, 2, 3)$, $q = (0, 1, -2)$, $r = (-2, 1, 1)$, $s = (1, 1, 1)$. Calcolare il baricentro dei quattro punti.

Esercizio 5.3. Siano dati i punti $p = (2, 3)$, $q = (0, 1)$, $r = (-2, 1)$, $s = (1, 1)$. Calcolare l'intersezione tra le rette pq e rs .

Esercizio 5.4 (Lombardo). Sia dato un quadrilatero convesso $abcd$ nel piano. Si dimostri che esiste un punto comune ai segmenti congiungenti i punti medi dei lati opposti e al segmento congiungente i punti medi delle due diagonali. Di che punto si tratta?

Esercizio 5.5. Siano dati i punti $p = (1, 2, 3)$, $q = (0, 1, -2)$, $r = (-2, 1, 1)$. Calcolare lunghezza dei lati, perimetro e angoli del triangolo pqr . [per gli angoli usare la calcolatrice].

Esercizio 5.6. Sia abc un triangolo non degenere. Si dimostri che le tre altezze si incontrano in uno stesso punto.

Esercizio 5.7. Sia abc un triangolo non degenere. Sia p l'intersezione delle altezze (ortocentro), q l'intersezione delle mediane (baricentro) e r il centro del triangolo circoscritto (circocentro). Si dimostri che p, q, r giacciono su una stessa retta. [di questo esercizi trovate la soluzione sulle note]

Esercizio 5.8. Da un punto P esterno ad una circonferenza si tracci una retta che interseca il cerchio e siano A e B i due punti di intersezione (eventualmente coincidenti se la retta è tangente alla circonferenza). Si dimostri che

$$\operatorname{dist}(A, P) \operatorname{dist}(B, P) = d^2 - r^2$$

dove d è la distanza di P dal centro della circonferenza e r è il raggio della circonferenza.

Esercizio 5.9. Siano dati i punti $p = (1, 2, 3)$, $q = (0, 1, -2)$. Calcolare la proiezione di q sulla retta Op e la distanza di q da tale retta.

Esercizio 5.10. Siano dati i punti $p = (1, 2, 3)$, $q = (0, 1, -2)$, $r = (-2, 1, 1)$. Calcolare la proiezione di r sulla retta pq e la distanza di r da tale retta.

Esercizio 5.11. Sia π piano $x + y + z = 0$. Si calcoli la proiezione di $p = (1, 2, 3)$ su π e la distanza di p da π . Si calcoli inoltre il simmetrico di p rispetto a π .

Esercizio 5.12. Sia π piano $x + y + z = 1$. Si calcoli la proiezione di $p = (1, 2, 3)$ su π e la distanza di p da π . Si calcoli inoltre il simmetrico di p rispetto a tale piano.

Esercizio 5.13. Sia Π il piano di equazioni $ax + by + cz = d$. Si determini una formula per la distanza di un punto di coordinate (α, β, γ) da Π .

6. SPAZI E SOTTOSPAZI VETTORIALI

Esercizio 6.1. Si completi la dimostrazione che K^n è un K spazio vettoriale.

Esercizio 6.2. Si completi la dimostrazione che $\mathcal{F}(X, K)$ è un K spazio vettoriale.

Esercizio 6.3. Si considerino i seguenti sottoinsiemi dello spazio vettoriale \mathbb{R}^2 . Quali sono sottospazi vettoriali?

$$\begin{aligned} T &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3x + 4y = 0\} \\ U &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3x + 4y = 1\} \\ V &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \\ W &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 0\} \\ X &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = -1\} \\ Y &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \text{ e } y \geq 0\} \\ Z &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4xy + 4y^2 = 0\} \end{aligned}$$

Nei casi in cui è un sottospazio si devono verificare le tre proprietà che caratterizzano i sottospazi, nei casi in cui non è un sottospazio basta fare un esempio che mostra che almeno una di queste proprietà fallisce. [Si, No, No, Si, No, No, Si]

Esercizio 6.4. Si considerino i seguenti sottoinsiemi dello spazio vettoriale $\mathcal{F}(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$. Quali sono sottospazi vettoriali?

$$\begin{aligned} U &= \{f(x) \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}, \mathbb{R}) : f(1) = 0 \text{ e } f(2) = 0\} \\ W &= \{f(x) \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}, \mathbb{R}) : f(1)f(2) = 0\} \\ X &= \{f(x) \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}, \mathbb{R}) : f(-x) = f(x) \text{ per ogni } x \in \mathbb{Z}\} \\ Y &= \{f(x) \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}, \mathbb{R}) : f(x+1) = 2f(x) \text{ per ogni } x \in \mathbb{Z}\} \\ Z &= \{f(x) \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}, \mathbb{R}) : f(x+1) = f(x) + 1 \text{ per ogni } x \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

Nei casi in cui è un sottospazio si devono verificare le tre proprietà che caratterizzano i sottospazi, nei casi in cui non è un sottospazio basta fare un esempio che mostra che almeno una di queste proprietà fallisce. [Si, No, Si, Si, No]

Esercizio 6.5. Sia $V, +_V, \cdot_V, 0_V$ il seguente spazio vettoriale su \mathbb{R} : come insieme $V = \mathbb{R}^+$, $0_V = 1$ e somma e prodotto sono definite nel modo seguente

$$x +_V y = xy \quad \lambda \cdot_V x = x^\lambda$$

per $x, y \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Verificare che è uno spazio vettoriale su \mathbb{R} .

Esercizio 6.6. Siano U e W due spazi vettoriali e sia $V = U \times W$. Su V definisco O , somma e prodotto per scalare nel seguente modo:

$$(u, w) + (u', w') = (u + u', w + w') \quad \lambda \cdot (u, w) = (\lambda u, \lambda w) \quad 0 = (0, 0)$$

per ogni $u, u' \in U$, $w, w' \in W$ e $\lambda \in K$. Si verifichi che V è uno spazio vettoriale.

Esercizio 6.7. Si dimostri che se U e W sono due sottospazi vettoriali dello spazio vettoriale V allora $U \cap W$ è un sottospazio vettoriale di V .

Esercizio 6.8. Sia \mathcal{R} una retta passante per l'origine di \mathbb{R}^3 e sia Π il piano ortogonale a \mathcal{R} passante per l'origine. Si determini $\mathcal{R} \cap \Pi$ e $\mathcal{R} + \Pi$.

Esercizio 6.9. Dimostrare che gli unici sottospazi di \mathbb{R}^2 sono $\{0\}$ le rette per l'origine e tutto \mathbb{R}^2 .

Esercizio 6.10. Sia V uno spazio vettoriale su K . Allora $0 \cdot v = 0_V$ per ogni $v \in V$ e $\lambda \cdot 0_V = 0_V$ per ogni $\lambda \in K$.

Esercizio 6.11. Siano U e W due sottospazi dello spazio vettoriale V . Si dimostri che se $U \cup W$ è un sottospazio vettoriale di V allora $U \subset W$ o $W \subset U$.

7. BASI, GENERATORI E VETTORI LINEARMENTE INDIPENDENTI

Esercizio 7.1. Nello spazio vettoriale \mathbb{R}^3 si considerino le seguenti liste di vettori:

$$\begin{aligned} u_1 &= (1, 1, 1) & u_2 &= (1, 0, 0) & u_3 &= (0, 1, 0) & u_4 &= (0, 0, 1) \\ v_1 &= (1, 1, 1) & v_2 &= (1, 1, 0) \\ w_1 &= (1, 1, 1) & w_2 &= (1, 1, 0) & w_3 &= (1, -1, 0) \end{aligned}$$

Si dimostri u_1, u_2, u_3, u_4 sono generatori ma non sono linearmente indipendenti, che v_1, v_2 sono linearmente indipendenti ma non sono generatori e che w_1, w_2, w_3 è una base.

Esercizio 7.2. Trovare una base del sottospazio $x - y + 3z = 0$ di \mathbb{C}^3 . Scrivere le coordinate di $(1, 4, 1)$ rispetto alla base scelta.

Esercizio 7.3. Si dimostri che i seguenti polinomi sono una base di $\mathbb{C}[t]_{\leq 2}$: $f_1(t) = \frac{1}{2}(t-1)(t-2)$, $f_2(t) = \frac{1}{2}t(t-1)$, $f_3(t) = -t(t-2)$. Sia $f = t^2$, scrivere le coordinate di f rispetto a f_1, f_2, f_3 . Se f è un polinomio qualsiasi quali sono le coordinate di f rispetto alla base f_1, f_2, f_3 . (C'è un modo molto sintetico ed efficace per farlo)

Esercizio 7.4. Sia X un insieme finito e K un campo e sia $V = \mathcal{F}_K(X)$ lo spazio vettoriale delle funzioni da X in K definito in classe. Per ogni $x \in X$ sia δ_x la funzione definita nel modo seguente:

$$\delta_x(y) = \begin{cases} 1 & \text{se } y = x; \\ 0 & \text{se } y \neq x. \end{cases}$$

Dimostrare che se x_1, \dots, x_n sono gli elementi di X allora $\delta_{x_1}, \dots, \delta_{x_n}$ è una base di $\mathcal{F}_K(X)$.

Esercizio 7.5. Sia V uno spazio vettoriale V su K . Siano $u, v \in V$ e sia v diverso da zero. Dimostrare che u e v sono linearmente dipendenti se e solo se esiste $\lambda \in K$ tale che $u = \lambda v$.

Esercizio 7.6. Sia v_1, v_2, v_3, v_4 una base di uno spazio vettoriale V . Dimostrare che per ogni v in V i vettori v_1, v_2, v_3, v_4, v generano V ma non sono linearmente indipendenti.

Esercizio 7.7. Sia v_1, v_2, v_3, v_4 una base di uno spazio vettoriale V e sia $U = \text{Span}(v_1, v_2)$ e $W = \text{Span}(v_3, v_4)$. Determinare $U \cap W$ e $U + W$.

Esercizio 7.8. Siano $u_1, \dots, u_h, w_1, \dots, w_k$ e sia $U = \text{Span}(u_1, \dots, u_h)$ e sia $W = \text{Span}(w_1, \dots, w_k)$. Allora $U + W$ è generato da $u_1, \dots, u_h, w_1, \dots, w_k$. [Se aiuta sostituire h e k con 2 e 3]

Esercizio 7.9. Sia U e W due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V . Siano $u_1, u_2 \in U$ e $w_1, w_2 \in W$. Dimostrare che se $U \cap W = \{0\}$ e u_1, u_2 sono linearmente indipendenti e w_1, w_2 sono linearmente indipendenti allora u_1, u_2, w_1, w_2 sono linearmente indipendenti.

Esercizio 7.10. Siano $v_1, \dots, v_n \in V$ dei vettori linearmente indipendenti. Sia $v \in V$. Dimostrare che v_1, \dots, v_n, v sono linearmente indipendenti se e solo se $v \notin \text{Span}\{v_1, \dots, v_n\}$.

Esercizio 7.11. Si considerino i vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si verifichi che sono una base di \mathbb{R}^4 e si calcolino le coordinate dei seguenti vettori rispetto a questa base:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 7.12. Siano \mathcal{R} e \mathcal{S} due rette parallele non coincidenti nel piano e siano P e Q due punti distinti in \mathcal{R} . Sia V un punto non in \mathcal{R} e siano A e B le intersezioni delle rette VP e VQ con \mathcal{S} . Sia C l'intersezione delle rette PB e QA e sia M l'intersezione di \mathcal{R} con VC . Allora M è il punto medio di PQ .

8. MATRICI

Esercizio 8.1. Descrivere una base dello spazio vettoriale delle matrici 2×2 a coefficienti reali.

Esercizio 8.2. Siano date le seguenti matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -8 & -5 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 7 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(1) Calcolare

$$L_A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad L_D \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad L_G \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(2) Calcolare i prodotti $A \cdot A$, $B \cdot C$.

(3) Si può eseguire il prodotto $A \cdot D$? E il prodotto $D \cdot A$? calcolare quello dei due che si può eseguire.

(4) Calcolare $AB - BA$ e $BC - CB$.

(5) Calcolare $D \cdot G$ e $G^2 + G = G \cdot G + G$.

(6) Calcolare A^{101} .

(7) Calcolare $H \cdot G$ e $G \cdot H$.

(8) se M è una matrice $m \times 3$ e N è una matrice $3 \times n$ descrivere il prodotto $H \cdot N$ e $M \cdot H$.

Esercizio 8.3. È vero che se A e B sono matrici 2×2 e $A \cdot B = 0$ allora $A = 0$ o $B = 0$. Dimostrare che è vero o esibire un controesempio.

Esercizio 8.4. Siano $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tali che $ad - bc \neq 0$. Si considerino le matrici

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Si dimostri che $A \cdot B = B \cdot A = I_2$.

Esercizio 8.5. (1) Si dimostri che se A è una matrice 3×2 a coefficienti reali e non nulla, allora $\text{Tr}(A \cdot A^t) > 0$.

(2) Si dimostri che se A è una matrice $m \times n$ a coefficienti reali e non nulla allora $\text{Tr}(A \cdot A^t) > 0$.

Esercizio 8.6. Si consideri la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Si calcoli $\text{Tr}(A^{1001})$.

Definizione. Una matrice quadrata A si dice simmetrica se è simmetrica rispetto alla diagonale ovvero se $A^t = A$. Si dice invece antisimmetrica se $A^t = -A$. Indichiamo con Matsim_n l'insieme delle matrici simmetriche $n \times n$ e con Matant_n quello delle matrici antisimmetriche $n \times n$.

Esercizio 8.7. Si dimostri che Matsim_n è un sottospazio vettoriale di $\text{Mat}_{n \times n}$. Se ne determini una base nel caso di $n = 2$.

Esercizio 8.8. Si dimostri che Matant_n è un sottospazio vettoriale di $\text{Mat}_{n \times n}$. Se ne determini una base nel caso di $n = 3$.

Esercizio 8.9. Sia $K = \mathbb{R}$ o $K = \mathbb{C}$.

(1) Si determini $\text{Matsim}_n \cap \text{Matant}_n$.

(2) Si determini $\text{Matsim}_2 + \text{Matant}_2$.

(3) Si dimostri che $\text{Matsim}_n + \text{Matant}_n = \text{Mat}_{n \times n}$.

Esercizio 8.10. Sia A una matrice $m \times h$ e B una matrice $h \times n$. Si dimostri che

(1) $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$.

(2) Se inoltre $m = n$ vale $\text{Tr}(A \cdot B) = \text{Tr}(B \cdot A)$.

Esercizio 8.11. Sia data la matrice a coefficienti complessi:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

e supponiamo che esista una matrice 2×2 , B tale che $A \cdot B = I_2$. Si dimostri che $ad - bc \neq 0$ e che B è uguale alla matrice scritta nell'esercizio 8.4

Esercizio 8.12. Sia A una matrice $m \times m$ invertibile. Dimostrare che A^t è invertibile e che $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

Esercizio 8.13. Siano A e B due matrici $m \times m$ invertibili. Dimostrare che AB è invertibile e che $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Esercizio 8.14. Sia

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}$$

e sia B una matrice $3 \times m$ e C una matrice $m \times 3$. Calcolare $A \cdot B$ e $C \cdot A$. [Obiettivo dell'esercizio è capire che in questo caso il risultato è molto facile da descrivere. Se si hanno dei dubbi provare con $m = 2$ e B e C matrici concrete a vostra scelta per iniziare a farsi un'idea.]

Definizione. Una matrice quadrata $\ell \times \ell$, $A = (a_{ij})$ si dice diagonale se tutte le entrate fuori dalla diagonale sono zero. Un esempio tipico è la matrice A dell'esercizio precedente.

Una matrice quadrata $\ell \times \ell$, $A = (a_{ij})$ si dice triangolare superiore se tutte le entrate sotto la diagonale sono zero. Un esempio tipico è la matrice A dell'esercizio 8.2 o dell'esercizio 8.6

Esercizio 8.15. Dimostrare che il prodotto di due matrici triangolari è triangolare. [Se si ha poca dimestichezza con gli indici fare il caso di matrici 3×3 .]

9. APPLICAZIONI LINEARI

Esercizio 9.1. Quali delle seguenti applicazioni da \mathbb{R}^3 a \mathbb{R}^2 è una applicazione lineare?

$$\begin{aligned} f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3z + y \\ 5y \end{pmatrix} & g \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 + z \\ x \end{pmatrix} & h \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x + y + z \\ 1 \end{pmatrix} & k \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ x - y \end{pmatrix} \\ a \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} e^x \\ 0 \end{pmatrix} & b \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} e^x - e^y \\ z + x \end{pmatrix} & c \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ x^2 \end{pmatrix} & d \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} |x| \\ |y| \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Esercizio 9.2. Sia $V = \mathbb{C}[t]$ e siano $G : V \rightarrow V$, $G : V \rightarrow \mathbb{C}^3$ e $H : \mathbb{C}^3 \rightarrow V$ definite nel modo seguente:

$$F(p(t)) = (t^2 - 5t)p(t) \quad G(p(t)) = \begin{pmatrix} p(1) \\ p(3) \\ p(7) \end{pmatrix} \quad H \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x(t-1) + y(t-3) + z(t-7) + (t-8)$$

- (1) dire quali tra F, G, H sono lineari.
- (2) dire quali tra F, G, H sono iniettive?
- (3) dire quali tra F, G, H sono surgettive?
- (4) Determinare $G \circ H$ e $F \circ H$.

Esercizio 9.3. Sia $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da

$$F \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + y + z \\ 2x + y \\ x + z \\ x + y - z \end{pmatrix}$$

- (1) Si determini una matrice A tale che $F = L_A$;
- (2) Si dica quali dei seguenti punti sono nel nucleo:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(3) Si dica quali dei seguenti punti sono nell'immagine:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 9.4. Sia $F : \mathbb{C}[t] \rightarrow \mathbb{C}[t]$ l'applicazione lineare definita da $F(f) = f'$ la derivata rispetto a t di f . Si determini il nucleo e l'immagine.

Esercizio 9.5. Sia $V = \mathbb{C}[t]_{\leq 3}$ e sia $F : V \rightarrow V$ definita da $F(p(t)) = p'(t) + p(t+1)$. Si verifichi che è una applicazione lineare e si calcoli la matrice associata a F rispetto alla base standard di V in partenza e in arrivo.

Esercizio 9.6. Sia $V = \text{Mat}_{2 \times 3}$ e $W = \text{Mat}_{2 \times 2}$. Sia inoltre

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Sia $R_A : V \rightarrow W$ l'applicazione definita da $R_A(X) = X \cdot A$. Si dimostri che R_A è lineare e se ne calcoli la matrice associata rispetto alla basi standard in arrivo e in partenza.

Esercizio 9.7. Sia W il piano di \mathbb{R}^3 definito da $x + y - 2z = 0$ e sia $F : W \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'applicazione definita da

$$F \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 3z \\ x - y \end{pmatrix} \quad \text{per ogni} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in W$$

Si scelga una base di W e si scriva la matrice associata a F rispetto a questa base in partenza e alla base standard in arrivo.

Esercizio 9.8. Sia $F : V \rightarrow W$ una applicazione lineare e siano $v_1, \dots, v_n \in V$. Si dimostri che

- (1) se F è iniettiva e v_1, \dots, v_n sono linearmente indipendenti allora anche $F(v_1), \dots, F(v_n)$ sono linearmente indipendenti.
- (2) se F è surgettiva e v_1, \dots, v_n sono generatori allora $F(v_1), \dots, F(v_n)$ sono generatori.
- (3) se F è bigettiva e v_1, \dots, v_n è una base, allora $F(v_1), \dots, F(v_n)$ sono una base.

Esercizio 9.9 (Compito luglio 2017). Sia W il sottospazio di \mathbb{R}^3 definito dall'equazione $2x + z = 0$, sia E lo spazio vettoriale delle matrici 2×2 e sia $T : W \rightarrow E$ l'applicazione lineare definita da

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x + 2z \end{pmatrix} \quad \text{per ogni} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in W.$$

Sia inoltre $S : \mathbb{R}^3 \rightarrow E$ l'applicazione lineare definita da

$$S \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{per ogni} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in W \quad \text{e} \quad S \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) scegliere una base di W e una di E e scrivere la matrice associata a T rispetto a queste basi.
- b) scrivere la matrice associata ad S rispetto alla basi standard di \mathbb{R}^3 ed E .

Esercizio 9.10 (Compitino febbraio 2017). Sia W il sottospazio di \mathbb{R}^3 definito dall'equazione $x + y + z = 0$ e sia V il sottospazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 3 che si annullano in 1: $V = \{p(t) \in \mathbb{R}[t]_{\leq 3} : p(1) = 0\}$. Sia $F : W \rightarrow V$ l'applicazione lineare definita da

$$F \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x + 2yt + zt^2 + (x+z)t^3$$

(per esempio $F(1, -1, 0)$ è il polinomio $1 - 2t + t^3$)

- a) Si scelga una base di W e una di V e si scriva la matrice associata a F rispetto a queste basi.

b) Sia $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}[t]_{\leq 3}$ l'applicazione lineare tale che

$$G \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 + t \quad \text{e} \quad G \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{se} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in W.$$

Scrivere la matrice associata a G rispetto alle basi standard di \mathbb{R}^3 e $\mathbb{R}[t]_{\leq 3}$.

Esercizio 9.11. Sia data la seguente matrice 2×2 :

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

- (1) si determini un vettore non nullo v_1 di \mathbb{R}^2 tale che $L_M(v_1) = 2v_1$;
- (2) si determini un vettore non nullo v_2 di \mathbb{R}^2 tale che $L_M(v_2) = 3v_2$;
- (3) si calcoli M^{100} .

Esercizio 9.12 (Compito 5 giugno 2017). Sia $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare che ha come matrice associata rispetto alla base canonica la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- a) Dire se esistono due basi u_1, u_2, u_3 e v_1, v_2, v_3 di \mathbb{R}^3 tale che $[F]_{v_1, v_2, v_3}^{u_1, u_2, u_3}$ è diagonale.
- b) Dire se esiste una base v_1, v_2, v_3 di \mathbb{R}^3 tale che $[F]_{v_1, v_2, v_3}^{e_1, e_2, e_3}$ è diagonale.

10. SISTEMI LINEARI

Esercizio 10.1. Si consideri il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} 2x_2 + 2x_3 + 6x_4 + x_5 = 7 \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 + 11x_4 = 4 \\ x_1 + 3x_3 + 4x_4 + x_5 = 4 \end{cases}$$

- (1) Scrivere la matrice e la matrice completa associate al sistema lineare
- (2) Ridurre la matrice a scalini.
- (3) Calcolare il rango della matrice associata e della matrice completa
- (4) Descrivere le soluzioni del sistema

Esercizio 10.2. Si consideri il seguente sistema lineare al variare del parametro $c \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 6x_4 = 13 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 = c^2 + 4 \\ x_2 + 3x_3 + x_4 = c^2 \\ x_1 + 2x_3 + 3x_4 = 7 \end{cases}$$

- (1) calcolare il rango della matrice associata al sistema
- (2) calcolare il rango della matrice completa associata al sistema
- (3) per quali c il sistema ha soluzione? e quando ha soluzione quante soluzioni ha?

Esercizio 10.3. Sia A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Si determini una base di $N(L_A)$.

Esercizio 10.4. Sia A una matrice $m \times n$. Si dimostri che esiste una matrice B tale che $AB = Id$ se e solo se $\text{rango}(A) = m$ [molto simile al caso delle matrici invertibili fatto in classe]

Esercizio 10.5. Si calcoli l'inversa, se esiste, delle seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -5 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 11 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Esercizio 10.6. Si considerino i seguenti vettori in \mathbb{R}^3 :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Sia $W = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$. Si determini una base di W , e si calcoli la dimensione di W e si descriva W tramite equazioni. Dire tra i seguenti vettori quali stanno in W :

$$w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3/2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad w_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Per i vettori w_i che stanno in W si determinino le coordinate rispetto alla base scelta

Esercizio 10.7. Si considerino i seguenti vettori in \mathbb{C}^5 :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Sia $W = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$. Si determini una base di W , e si calcoli la dimensione di W e si descriva W tramite equazioni. Dire tra i seguenti vettori quali stanno in W :

$$w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad w_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad w_3 = \begin{pmatrix} -1+i \\ 2i+1 \\ -1 \\ 1+i \\ 2i \end{pmatrix}$$

Esercizio 10.8 (Compitino febbraio 2016). Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a 2. Al variare del parametro reale k si consideri l'applicazione lineare $L_k : V \rightarrow V$ definita da

$$L_k(p(t)) = p(t+1) - kp(t)$$

per ogni polinomio $p(t)$.

- Si scelga una base di V e si determini la matrice associata ad L_k rispetto a tale base;
- Si determini il rango di L_k al variare del parametro k ;
- Sia $f(t)$ il polinomio $f(t) = t^2 + 1$ si determini al variare di k se esistono polinomi $p(t)$ tali che $L_k(p(t)) = f(t)$.

11. TEOREMA FONDAMENTALE, DIMENSIONE

Esercizio 11.1. Sia $u = (1, 2, 3)$ e sia $U = \mathbb{R}u$. Sia W il piano $3x - z = 0$. Trovare una base v_1, v_2, v_3 di \mathbb{R}^3 tale che

- v_1 è una base di U ,
- v_1, v_2 è una base di W .

Esercizio 11.2. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e sia $W_1 \subset W_2 \subset \dots \subset W_n$ una successione di sottospazi di V tali che $\dim W_i = i$. Dimostrare che esiste una base v_1, \dots, v_n di V tale che per ogni i , i vettori v_1, \dots, v_i sono una base di W_i .

Esercizio 11.3. Siano U e W due spazi vettoriali di dimensione finita e sia $V = U \times W$ lo spazio vettoriale descritto nell'esercizio 6.6. Dimostrare che $\dim V = \dim U + \dim W$.

Esercizio 11.4. Sia v_1, \dots, v_n una base di V e siano $u_1, \dots, u_n \in V$. Allora u_1, \dots, u_n sono una base di V se e solo se la matrice le cui colonne sono

$$[u_1]_{v_1, \dots, v_n}, \dots, [u_n]_{v_1, \dots, v_n}$$

è invertibile.

Esercizio 11.5. Esiste una applicazione lineare da \mathbb{R}^5 a \mathbb{R}^2 iniettiva? e una surgettiva?

Esercizio 11.6 (Comпитino febbraio 2017). a) Si enunci il teorema della dimensione.

b) Esistono due applicazioni lineari

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

tali che la loro composizione $g \circ f$ sia iniettiva? Motivare la risposta.

Esercizio 11.7. Siano $F: U \longrightarrow V$ e $G: V \longrightarrow W$ due applicazioni lineari. Si dimostri che $\text{rango } G \circ F \leq \text{rango } F$ e che $\text{rango } G \circ F \leq \text{rango } G$.

12. DESCRIZIONE DI SOTTOSPAZI, SOMMA E INTERSEZIONE DI SOTTOSPAZI

Esercizio 12.1. Sia W il sottospazio di \mathbb{R}^4 descritto dalle equazioni:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \quad x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0.$$

Descrivere W in forma parametrica.

Esercizio 12.2. Sia W il sottospazio di \mathbb{R}^5 generato dai vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

si descriva W in forma parametrica e in forma cartesiana.

Esercizio 12.3. Sia W il sottospazio di \mathbb{R}^3 il sottospazio descritto dalla parametrizzazione $F: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$F \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3s + t \\ t - s \\ 2t + 3s \end{pmatrix}$$

- (1) si verifichi che F è una parametrizzazione (cioè che F è iniettiva);
- (2) si determini una base di W ;
- (3) si descriva W in forma cartesiana.

Esercizio 12.4. Sia A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 8 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

si descrivano $\text{Im } L_A$ e $N(L_A)$ in forma parametrica e in forma cartesiana.

Esercizio 12.5 (I compito 2015-2016). Siano U e W due sottospazi vettoriali di \mathbb{R}^8 . Sia $\dim U = 3$ e $\dim W = 5$. Quale delle seguenti affermazioni è sicuramente vera?

- A) $\dim(U + W) = 8$ qualsiasi siano U e W .
- B) $\dim(U \cap W) = 2$ qualsiasi siano U e W .
- C) Se $U \cap W$ è diverso da zero allora $\dim(U + W) = 8$.
- D) Se $\dim(U \cap W) = 3$ allora $U \subset W$.
- E) Se $\dim U + W = 8$ allora $\dim(U \cap W) = 3$.

Esercizio 12.6 (Compito luglio 2017). Sia $T: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^5$ una applicazione lineare con $\dim N(T) = 1$ e sia W un sottospazio di \mathbb{R}^5 di dimensione 4

- a) dimostrare che $W \cap \text{Im}(T) \neq 0$;
- b) quali sono le possibili dimensioni di $W \cap \text{Im}(T) \neq 0$? motivare la risposta

Esercizio 12.7 (Compito 6 giugno 2016). Siano V e W due sottospazi di dimensione 3 di \mathbb{R}^4 . Quali sono le possibili dimensioni del sottospazio $V \cap W$? Motiva la risposta in modo completo.

Esercizio 12.8. Siano U e W due sottospazi di V . Si dimostri che se $U \cup W$ è un sottospazio allora $U \subset W$ o $W \subset U$.

Esercizio 12.9. Siano U, V, W dei sottospazi dello spazio vettoriale E in somma diretta. Sia u_1, \dots, u_a una base di U , v_1, \dots, v_b una base di V , w_1, \dots, w_c una base di W . Dimostrare che $u_1, \dots, u_a, v_1, \dots, v_b, w_1, \dots, w_c$ è una base di $U + V + W$. [La dimostrazione è del tutto analoga a quella fatta in classe nel caso di due soli sottospazi]

Esercizio 12.10. Sia $W = \{x \in \mathbb{C}^5 : x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0\}$. Si trovino tre sottospazi X e Y e Z diversi da zero, di W tali che $W = X \oplus Y \oplus Z$.

Esercizio 12.11. Sia $V = \mathbb{R}^4$ e sia X, Y, Z dei sottospazi di dimensione 3 di V . Sia $a = \dim X \cap Y$, $b = \dim X \cap Z$, $c = \dim Y \cap Z$ e $d = \dim X \cap Y \cap Z$.

- (1) si dimostri che $a = 2$ o 3 ;
- (2) si dimostri che non può essere $d = 0$;
- (3) di esibiscano X, Y, Z tali che $d = 2$;
- (4) di esibiscano X, Y, Z tali che $d = 1$;
- (5) si descrivano tutte le quadruple (a, b, c, d) che si possono ottenere al variare di X, Y, Z .

Esercizio 12.12 (Compitino di algebra lineare del 26 febbraio 2018). Sia U il sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^4 generato dai vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sia V il sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^4 delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 4x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 11x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

- a) Calcolare la dimensione di U e V .
- b) Calcolare la dimensione di $U + V$ e $U \cap V$.

Esercizio 12.13. Si considerino i seguenti vettori di \mathbb{R}^5 :

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad w_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Sia U il sottospazio di \mathbb{R}^5 generato da u_1, u_2, u_3 e W il sottospazio generato da w_1, w_2, w_3 .

- (1) Si descriva una base di $U + W$;
- (2) Si descriva una base di $U \cap W$;
- (3) Si descriva $U + W$ in forma cartesiana;
- (4) Si descriva $U \cap W$ in forma cartesiana.

13. DETERMINANTI

Esercizio 13.1. Calcolare il determinante delle seguenti matrici, riducendole a scalini:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 3 & 5 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 7 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Esercizio 13.2. Calcolare il determinante delle seguenti matrici applicando la formula di Laplace

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Esercizio 13.3. Sia $V = \mathbb{C}[t]_{\leq n-1}$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a $n-1$ e siano $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$. Si consideri la seguente applicazione lineare $F : V \rightarrow \mathbb{C}^n$

$$F(p(t)) = (p(\lambda_1), p(\lambda_2), \dots, p(\lambda_n))$$

Si dimostri che è iniettiva se e solo se i numeri λ_i sono distinti. Se ne deduca che

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{n-2} & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^{n-2} & \lambda_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \lambda_i & \lambda_i^2 & \dots & \lambda_i^{n-2} & \lambda_i^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \dots & \lambda_n^{n-2} & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} = 0$$

se e solo se due dei numeri λ_i sono uguali.

Esercizio 13.4 (I compito 2016). Sia B la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Sia $E = \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici 2×2 a coefficienti reali. Sia $T : E \rightarrow E$ l'applicazione definita da $T(X) = B \cdot X$. Si calcoli il determinante di T .

Esercizio 13.5. Sia M la matrice a blocchi:

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

con A matrice $p \times p$, D matrice $q \times q$ e B matrice $p \times q$. Dimostrare che $\det M = \det A \cdot \det D$ seguendo i seguenti passi:

- (1) Dimostrare che se A non è invertibile allora non lo è neppure M e quindi $\det M = 0$;
- (2) Se A è invertibile dimostrare che

$$M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A^{-1}B \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

e applicare il teorema di Binet.

- (3) Calcolare i determinanti delle tre matrici che compaiono nella formula precedente.

14. AUTOVALORI, AUTOVETTORI E DIAGONALIZZABILITÀ

Esercizio 14.1. Sia V uno spazio vettoriale complesso. Sia $F : V \rightarrow V$ una applicazione lineare tale che $F^4 = Id$. Si dimostri che se λ è un autovalore di F allora $\lambda^4 = 1$

Esercizio 14.2. Sia $F : V \rightarrow V$ una applicazione lineare e sia $\sqrt{2}$ un autovalore di F . Si dimostri che 6 è un autovalore di $F^4 + F^2$.

Esercizio 14.3. Si calcolino gli autovalori delle applicazioni L_A associate alle seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 14.4. Sia $F : V \rightarrow V$ una applicazione diagonalizzabile. Si dimostri che F^2 è diagonalizzabile e che $2F$ è diagonalizzabile.

Esercizio 14.5. Sia A una matrice 5×5 triangolare superiore che ha lungo la diagonale tutte le entrate uguali a 2. Si dimostri che A è diagonalizzabile se e solo se $A = 2I$.

Esercizio 14.6. Si calcoli A^{100} per

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Esercizio 14.7 (Compito 9 gennaio 2017). Sia V uno spazio vettoriale sui numeri complessi di dimensione finita e sia $F : V \rightarrow V$ una applicazione lineare.

- a) Sia λ un autovalore di F . Si dia la definizione di molteplicità geometrica e molteplicità algebrica di λ rispetto a F .

- b) Supponiamo che $\dim V = 4$. Si dimostri che se la molteplicità geometrica di 2 è uguale a 4 allora $F = 2Id$.

Esercizio 14.8. Sia V uno spazio vettoriale e sia $F : V \rightarrow V$ tale che $F^2 = F$. Dimostrare che F è diagonalizzabile. [Dimostrare che $V_0 \oplus V_1 = V$ direttamente]

Esercizio 14.9 (I compito 2017). Sia A la matrice 13×13 con tutte le entrate uguali a 1.

- Si determini una base del nucleo di L_A .
- Si determini un autovettore con autovalore diverso da zero (si provi ad indovinare!).
- Si determini una base di autovettori per L_A e si calcoli il polinomio caratteristico di L_A .

Esercizio 14.10. Sia $V = \mathbb{C}[x]_{\leq 2}$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 2 a coefficienti complessi. Si consideri l'applicazione lineare $F : V \rightarrow V$ definita nel seguente modo:

$$F(p(t)) = p(0)x^2 + p'(x)$$

- Si determinino gli autovalori di F .
- Si determini una base di autovettori.
- Si calcoli F^{15}

Esercizio 14.11. Costruisci una matrice A di taglia 3×3 tale che l'applicazione $L_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ soddisfi entrambe le proprietà seguenti:

- l'immagine di L_A è il piano definito da $x + y = 0$;
- l'endomorfismo L_A non è diagonalizzabile.

Esercizio 14.12 (II compito 2016). Determinare per quali valori $t \in \mathbb{R}$ la matrice seguente è diagonalizzabile:

$$\begin{pmatrix} t-1 & 2t & t \\ 0 & t-1 & 0 \\ 2 & t+2 & 1 \end{pmatrix}.$$