BASI, GENERATORI, E VETTORI LINEARMENTE INDIPENDENTI

Vogliamo introdurre un sistema di coordinate su uno spazio vettoriale V similmente a come si introducono le coordinate nel piano o nello spazio. Il concetto che permette di fare questo in modo molto generale è quello di base. Prima di darne la definizione facciamo qualche osservazione per $\mathbb{R}^3$.

Sia $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ ed $e_3 = (0, 0, 1)$. Osserviamo che

$$(x_1, x_2, x_3) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$$

Quindi possiamo descrivere le coordinate usando $+, \cdot$ ed e_1, e_2 e e_3.

DEFINIZIONE Sia V uno spazio vettoriale su K e siano $v_1, \dots, v_n \in V$. Si dice che la lista $v_1, v_2, \dots, v_n$ è una base di V se per ogni $v \in V$ esistono univocamente determinati $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ tali che

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$$

Se $v_1 \dots v_n$ è una base di V e $v \in V$ e $\lambda_1 \dots \lambda_n \in K$ sono tali che $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ allora $\lambda_1 \dots \lambda_n$ si dicono le coordinate di v rispetto alla base $v_1 \dots v_n$ e si indicano con

$$[v]_{v_1 \dots v_n} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

Per alcune convenzioni notazionali che introduremo in seguito le coordinate di un punto rispetto ad una base si scrivono verticalmente.

Esempi

① $e_1 = (1, 0)$ $\quad e_2 = (0, 1)$ è una base di $\mathbb{R}^2$

infatti $\quad (x_1 ; x_2) = x_1 e_1 + x_2 e_2$

② $v_1 = (1, 1)$ $\quad v_2 = (1, -1)$ è una base di $\mathbb{R}^2$

Bisogna verificare che $\forall v \in \mathbb{R}^2 \ \exists_1 \ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tali che $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$.

Infatti sia $v = (a, b)$. Osserviamo che

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \lambda_1 (1,1) + \lambda_2 (1, -1)$$
$$= (\lambda_1 \ \lambda_1) + (\lambda_2 \ -\lambda_2) = (\lambda_1 + \lambda_2 ; \lambda_1 - \lambda_2)$$

Quindi $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$ se e solo se

$$\begin{cases} a = \lambda_1 + \lambda_2 \\ b = \lambda_1 - \lambda_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda_1 = a - \lambda_2 \\ b = a - \lambda_2 - \lambda_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_2 = \dfrac{a-b}{2} \\ \lambda_1 = \dfrac{a+b}{2} \end{cases}$$

quindi $v_1\ v_2$ è una base e

$$[(a,b)]_{v_1\ v_2} = \begin{pmatrix} \dfrac{a+b}{2} \\ \dfrac{a-b}{2} \end{pmatrix}$$

③ (Base canonica di K^n)

Se $e_1 = (1, 0, \dots 0)$ $e_2 = (0, 1, 0, \dots 0)$ …

… $e_n = (0; 0; \dots 0; 1)$

$e_1, \dots, e_n \in K^n$ e sono una base di K^n

Infatti

$$(x_1; \dots; x_n) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$$

④ (Base canonica di $K[t]_{\leq n}$)

Ricordiamo che $K[t]_{\leq n}$ è lo spazio vettoriale dei polinomi nella variabile t a coefficienti in K.

Una base di $K[t]_{\leq n}$ sono i polinomi

$f_1 = 1$ (il polinomio costante $= 1$)

$f_2 = t$

$f_3 = t^2$

…

$f_{n+1} = t^n$

Esercizio Determinare le coordinate di $f = 1 + 2t^2 - t^3 \in \mathbb{R}[t]_{\leq 3}$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}[t]_{\leq 3}$.

Svolgimento

$$f = 1 \cdot 1 + 0 \cdot t + 2t^2 - 1 \cdot t^3$$
$$= 1\, f_1 + 0\, f_2 + 2\, f_3 + (-1)\, f_4$$

quindi
$$[f]_{f_1 f_2 f_3 f_4} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

#

5) Si consideri $V = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0 \}$

V è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ ed in particolare è uno spazio vettoriale.

$$v_1 = (1, -1, 0) \qquad v_2 = (1, 0, -1)$$

sono due elementi di V. Dimostriamo che formano una base.

Sia $v = (a, b, c) \in V$ ovvero $a + b + c = 0$

Vogliamo vedere se esistono e se sono unici λ_1, λ_2 tali che

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \lambda_1 (1, -1, 0) + \lambda_2 (1, 0, -1)$$

ovvero

$$(a, b, c) = (\lambda_1 + \lambda_2, -\lambda_1, -\lambda_2)$$

quindi il nostro problema si traduce nello studiare le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} a = \lambda_1 + \lambda_2 \\ b = -\lambda_1 \\ c = -\lambda_2 \end{cases} \qquad \text{quando } a+b+c=0$$

Dalla 2ª e 3ª equazione ricaviamo λ_1 e λ_2 e sostituendo nella prima vediamo che il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} \lambda_1 = -b \\ \lambda_2 = -c \\ a = -b-c \end{cases}$$

l'ultima equazione è sempre verificata per via di $a+b+c=0$. Quindi otteniamo $\lambda_1 = -b$ e $\lambda_2 = -c$.

DEFINIZIONE Se V è un K-spazio vettoriale e se $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$, $v_1 \dots v_n \in V$, una espressione del tipo

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n$$

si dice una combinazione lineare di $v_1 \dots v_n$

VETTORI LIN. INDIP. E GENERATORI

Introduciamo ora due concetti più deboli rispetto a quello di base

DEFINIZIONE Sia V un K-spazio vettoriale e siano $v_1 \dots v_n \in V$. $v_1, \dots v_n$ si dicono dei generatori di V se $\forall v \in V$ esistono $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ tali che

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n.$$

La differenza rispetto ad una base è che in questo caso non si richiede che $\lambda_1 \dots \lambda_n$ siano unici.

__Esempio__ $V = \mathbb{R}^2$ $v_1 = (1,1)$ $v_2 = (1,0)$ $v_3 = (0,1)$

I vettori v_1 v_2 v_3 sono dei generatori di $\mathbb{R}^2$ ma non sono una base di V. Infatti se

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = \lambda_1 (1,1) + \lambda_2 (1,0) + \lambda_3 (0,1)$$
$$= (\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_3)$$

Quindi per verificare che v_1 v_2 v_3 sono una base dobbiamo verificare che $\forall\ v = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ $\exists\ \lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3$ tali che

$$(a,b) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = (\lambda_1 + \lambda_2 ; \lambda_1 + \lambda_3)$$

ovvero che il sistema

$$\begin{cases} a = \lambda_1 + \lambda_2 \\ b = \lambda_1 + \lambda_3 \end{cases}$$

nelle variabili $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ha soluzione comunque siano fissati a e b.

Osserviamo che il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} \lambda_2 = a - \lambda_1 \\ \lambda_3 = b - \lambda_1 \end{cases}$$

quindi io posso assegnare a λ_1 un valore a piacere e ricavare λ_2 e λ_3. Quindi $\forall\ a, b$ esistono infiniti valori di λ_1 λ_2 λ_3 tali che

$$(a,b) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$$

Il fatto che esistono ci dice che v_1 v_2 v_3 sono generatori, il fatto che non siano unici ci dice che non sono una base.

La definizione di vettori lin. indipendenti si concentra invece sull'aspetto dell'unicità di $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ anche se viene sottolineato un caso particolare.

DEFINIZIONE Sia V un K-spazio vettoriale e siano $v_1 \dots v_n \in V$. $v_1 \dots v_n$ si dicono lin. indipendenti se

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0$$

implica $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.

$v_1 \dots v_n$ si dicono lin. dipendenti se non sono lin. indipendenti, ovvero se $\exists\ \lambda_1 \dots \lambda_n$ non tutti nulli tali che

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0$$

Esempio $V = \mathbb{R}^3$

$v_1 = (1, 1, 1)$ e $v_2 = (1, 0, 1)$ sono lin. indipendenti

Infatti se

$$(0,0,0) = \lambda_1(1,1,1) + \lambda_2(1,0,1) = (\lambda_1+\lambda_2, \lambda_1, \lambda_1+\lambda_2)$$

ricavo $\lambda_1 = \lambda_1 + \lambda_2 = 0$ da cui $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Esercizio Dimostrare che v_1, v_2 dell'esercizio precedente non sono una base.

Dimostriamo ora alcune proprietà di vettori lin indipendenti e generatori.

PROPOSIZIONE Sia V un K-spazio vettoriale e siano $v_1, \dots v_n \in V$ lin. indipendenti. Se

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_n$$

allora $\lambda_1 = \mu_1 \quad \dots \quad \lambda_n = \mu_n$.

dim. Se $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n$ portando tutto da una parte ricavo

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n - \mu_1 v_1 - \mu_2 v_2 \dots - \mu_n v_n = 0$$

da cui raggruppando gli addendi con la stessa v_i

$$(\lambda_1 - \mu_1) v_1 + (\lambda_2 - \mu_2) v_2 + \dots + (\lambda_n - \mu_n) v_n = 0.$$

Infine poiché $v_1 \dots v_n$ sono lin. indip. ricavo

$$\lambda_1 - \mu_1 = \lambda_2 - \mu_2 = \dots = \lambda_n - \mu_n = 0$$

ovvero $\lambda_1 = \mu_1 \quad \lambda_2 = \mu_2 \quad \lambda_n = \mu_n$ #

PROPOSIZIONE

Sia V un K-spazio vettoriale e siano $v_1, \dots v_n \in V$.
$v_1 \dots v_n$ è una base se e solo se $v_1 \dots v_n$ sono lin. indipendenti e sono dei generatori di V

dim

$\boxed{\Rightarrow}$ Supponiamo che siano una base, allora sono sicuramente dei generatori perché ogni vettore si scrive come combinazione lineare di $v_1 \dots v_n$.
Dimostriamo anche che sono lin. indipendenti. Sia

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0_V = 0 \cdot v_1 + \dots + 0 \cdot v_n$$

Poiché $v_1 \dots v_n$ sono una base 0_V si scrive in modo unico come combinazione lineare

di $v_1 \dots v_n$, quindi $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$

$\boxed{\Leftarrow}$ Supponiamo adesso che $v_1 \dots v_n$ siano lin indip. e generatori di V. Sia $v \in V$, poiché $v_1 \dots v_n$ sono generatori esistono $\lambda_1 \dots \lambda_n$ tali che

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$$

Inoltre poiché sono lin. indip. per la proposizione precedente $\lambda_1 \dots \lambda_n$ sono univocamente determinati #

PRODOSIZIONE

Sia V un K spazio vettoriale e siano $v_1 \dots v_n \in V$. $v_1 \dots v_n$ sono lin. dipendenti se e solo se $\exists\, i$ ed esistono $\lambda_1, \dots \check{\lambda}_i \dots \lambda_n$ tali che

$$v_i = \lambda_1 v_1 + \dots + \check{\lambda_i v_i} + \dots + \lambda_n v_n$$

NOTAZIONE Se ho una lista $i_1 \dots i_m$, allora indico con $i_1 \dots \check{i_e} \dots i_m$ la stessa lista lista privata di i_e.

dim della proposizione

$\boxed{\Rightarrow}$ Siano $v_1 \dots v_n$ lin dipendenti. Allora esistono $\mu_1 \dots \mu_n$ non tutti nulli tali che

$$\mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n = 0$$

Sia $\mu_i \neq 0$ allora

$$\mu_i v_i = -\mu_1 v_1 - \mu_2 v_2 \quad \overset{\vee}{-\mu_i v_i} \quad -\mu_n v_n$$

da cui

$$v_i = -\frac{\mu_1}{\mu_i} v_1 - \frac{\mu_2}{\mu_i} v_2 \cdots \overset{\vee}{-\frac{\mu_i}{\mu_i} v_i} \quad -\frac{\mu_n}{\mu_i} v_n$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Se $v_i = \lambda_1 v_1 + \cdots + \overset{\vee}{\lambda_i v_i} + \cdots + \lambda_n v_n$ allora

$$-\lambda_1 v_1 - \lambda_2 v_2 \quad -\lambda_{i-1} v_{i-1} + v_i - \lambda_{i+1} v_{i+1} \quad -\lambda_n v_n = 0$$

e il coeff di v_i è $\neq 0$. Quindi $v_1 \dots v_n$ sono lin. dipendenti.

SOTTOSPAZIO VETTORIALE GENERATO

DEFINIZIONE Sia V un K-spazio vettoriale e siano $v_1, \dots v_n \in V$ allora il sottospazio vettoriale generato da $v_1 \dots v_n$ è

$$\operatorname{Span}(v_1, \dots, v_n) = \{ \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n : \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K \}$$

Più in generale se $X \subset V$ è un sottoinsieme di V il sottospazio vettoriale generato da X è

$$\operatorname{Span}(X) = \{ \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n : \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K \text{ e } v_1, v_2 \dots v_n \in X \}$$

Per convenzione $\operatorname{Span}(\emptyset) = \{ 0_V \}$.

Dimostreremo nella prossima proposizione che il sottospazio vettoriale generato è effettivamente un sottospazio vettoriale di V e che è il più piccolo sottospazio vettoriale di V contenente $v_1 \dots v_n$ (nel caso di $\operatorname{Span}(v_1 \dots v_n)$ e X nel caso generale)

Esempio

1. Se $v_1 \dots v_n$ sono generatori di V allora $\mathrm{Span}(v_1 \dots v_n) = V$

2. Se $v \in V$ $\mathrm{Span}(v) = Kv$

3. Se $X = \{v_1 \dots v_n\}$ $\mathrm{Span}(X) = \mathrm{Span}(v_1 \dots v_n)$

4. Se $X \supset Y$ allora $\mathrm{Span}\, X \supset \mathrm{Span}\, Y$

5. Se $X = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$ allora $\mathrm{Span}\, X = \mathbb{R}^2$. Infatti $X \ni e_1, e_2$

PROPOSIZIONE Sia V un K-spazio vettoriale e siano $v_1 \dots v_n \in V$. Allora

1) $\mathrm{Span}(v_1 \dots v_n)$ è un sottospazio vettoriale di V
2) Se W è un sottospazio vettoriale di V e $v_1, \dots, v_n \in W$ allora $W \supset \mathrm{Span}(v_1 \dots v_n)$

dim

1) • $0_V \in \mathrm{Span}$ infatti $0_V = 0v_1 + \dots + 0v_n$

• Se $u, v \in \mathrm{Span}(v_1 \dots v_n)$ allora

$$u = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$$

$$v = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n$$

e $u + v = (\lambda_1 + \mu_1) v_1 + \dots + (\lambda_n + \mu_n) v_n \in \mathrm{Span}(v_1 \dots v_n)$

- Se $u \in \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_n)$ e $\lambda \in K$ allora
  $$u = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$$
  e $\lambda u = (\lambda \lambda_1) v_1 + \dots + (\lambda \lambda_n) v_n \in \mathrm{Span}(v_1 - v_n)$

2) Voglio mostrare che se $v \in \mathrm{Span}(v_1 - v_n)$ allora $v \in W$.
Sia $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$
Poiché $v_1 \dots v_n \in W$ e W è sottospazio otteniamo
$\lambda_1 v_1, \dots, \lambda_n v_n \in W$ per la III proprietà di sottosp.
e quindi $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \in W$ per la II proprietà dei sottospazi.

#

<u>Esercizio</u> Dimostrare il risultato analogo al precedente per $\mathrm{Span}(X)$.

INTERSEZIONE E SOMMA DI SOTTOSPAZI

<u>PROPOSIZIONE</u>

Se U e W sono sottospazi dello spazio vettoriale V allora $U \cap W$ è un sottospazio.

<u>dim.</u>

- $0_V \in U \cap W$.
  Infatti $0_V \in U$ e $0_V \in W$ perché sono sottospazi, quindi $0_V \in U \cap W$
- Se $u \in U \cap W$ e $v \in U \cap W$ allora $u + v \in U \cap W$
  infatti da $u \in U$ e $v \in U$ ricavo $u + v \in U$ perché U è un sottospazio.

Similmente ricavo $u+v \in W$ e quindi $u+v \in U \cap W$.

- Se $u \in U \cap W$ e $\lambda \in K$ allora $\lambda u \in U \cap W$.
  Infatti da $u \in U$ e U sottospazio ricavo $\lambda u \in U$
  da $u \in W$ e W sottospazio ricavo $\lambda u \in W$
  quindi $\lambda u \in U \cap W$ #

L'intersezione di sottospazi è quindi sempre un sottospazio.
L'unione invece non è detto che sia un sottospazio

Esempio $V = \mathbb{R}^2$.

$$U = \{ (t, 0) : t \in \mathbb{R} \}$$
$$W = \{ (0, t) : t \in \mathbb{R} \}$$

U e W sono sottospazi ma $U \cup W$ non è un sottospazio, infatti $e_1 \in U \cup W$, $e_2 \in U \cup W$ ma $e_1 + e_2 \notin U \cup W$

DEFINIZIONE

Siano U, W due sottospazi vettoriali allora definiamo

$$U + W = \{ u+w : u \in U, w \in W \}$$

Più in generale se $U_1, \dots, U_n$ sono sottospazi vett

$$U_1 + \dots + U_n = \{ u_1 + u_2 + \dots + u_n : u_1 \in U_1, \dots, u_n \in U_n \}$$

PROPOSIZIONE Sia V un K-spazio vettoriale e siano U, W due sottospazi vettoriali. Allora

1) $U + W$ è un sottospazio vettoriale e $U + W \supset U \cup W$

2) Se Z è un sottospazio vettoriale e $Z \supset U, W$ allora $Z \supset U + W$

3) $U + W = \text{Span}(U \cup W)$

dim

1) • $0_V \in U + W$ infatti $0_V = 0_V + 0_V$ e $0_V \in U \cap W$

• Se $v_1 \in U + W$ e $v_2 \in U + W$ allora $v_1 + v_2 \in U + W$

infatti $v_1 = u_1 + w_1$ con $u_1 \in U$ e $w_1 \in W$

$v_2 = u_2 + w_2$ con $u_2 \in U$ e $w_2 \in W$

quindi $v_1 + v_2 = (u_1 + u_2) + (w_1 + w_2)$ e

$u_1 + u_2 \in U$ e $w_1 + w_2 \in W$. Quindi $v_1 + v_2 \in U + W$.

• Se $v \in U + W$ e $\lambda \in K$ allora $\lambda v \in U + W$

infatti $v = u + w$ con $u \in U$ e $w \in W$, quindi

$\lambda v = \lambda u + \lambda w$ con $\lambda u \in U$ e $\lambda w \in W$.

Quindi $\lambda v \in U + W$.

inoltre se $u \in U$ allora $u = u + 0_V \in U + W$

e se $w \in W$ allora $w = 0_V + w \in U + W$

quindi $U + W \supset U \cup W$.

2) Se $Z \supset U, W$ allora $\forall u \in U$ e $\forall w \in W$

si ha $u \in Z$ e $w \in Z$ da cui $u + w \in Z$.

Quindi $U + W \subset Z$.

3) 1) e 2) dimostrano che $U + W$ è il più piccolo sottospazio che contiene $U \cup W$ e

quindi è $\mathrm{Span}(U \cup W)$ #

<u>Esercizio</u> Dimostrare l'analogo della proposizione precedente nel caso di n sottospazi vettoriali.

<u>Esercizio</u> Se $u_1, \dots u_l$ generano U e $w_1, \dots w_m$ generano W allora $u_1, \dots u_l$ $v_1, \dots v_m$ generano $U + W$

<u>Esercizio</u> Se $U \cup W$ è un sottospazio allora $U \supset W$ o $W \supset U$.

Svolgiamo il terzo di questi esercizi.

Supponiamo che $U \not\supset W$ allora $\exists\, w \in W \setminus U$.

Dimostro che $W \supset U$. Infatti se $u \in U \subset U \cup W$ allora $u + w \in U \cup W$ (perché è un sottospazio). Ora se $u + w \in U$ ricavo che $w = u + w - u \in U$ che è contro l'ipotesi $w \in W \setminus U$.

Quindi $u + w \in W$ e quindi $u = u + w - w \in W$. #