GEOMETRIA DEL PIANO E DELLO SPAZIO: II PARTE

VOGLIAMO ORA FAR VEDERE COME UTILIZZANDO LE PROPRIETÀ ALGEBRICHE DI SOMMA, MOLTIPLICAZIONE PER SCALARE E PRODOTTO SCALARE, POSSIAMO RIOTTENERE MOLTI RISULTATI DI GEOMETRIA SINTETICA IN MODO MOLTO SEMPLICE. QUESTA DISCUSSIONE SARÀ DIVISA IN 3 PARTI

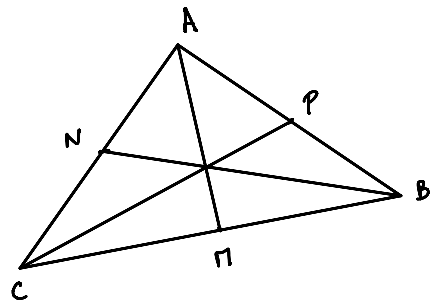
1) APPLICAZIONI AD ALCUNI PROBLEMI DI GEOMETRIA PIANA.
2) PROIEZIONI ORTOGONALI SU UN PIANO E SU UNA RETTA; SIMMETRIA RISPETTO AD UN PIANO.
3) OSSERVAZIONI SULLA DEFINIZIONE DI PARALLELISMO TRA RETTE NELLO SPAZIO.

SVILUPPEREMO QUESTI ARGOMENTI ATTRAVERSO LA RISOLUZIONE DI ALCUNI ESERCIZI, LIMITANDOCI ALLA DISCUSSIONE DI QUALCHE FORMULA GENERALE PER QUEI CASI CHE SARANNO PIÙ RILEVANTI PER LE PROSSIME LEZIONI.

NELLA NOTA SUCCESSIVA VEDREMO INOLTRE IL PRODOTTO VETTORIALE E COME CALCOLARE AREE DI TRIANGOLI E VOLUMI DI TETRAEDRI IN $\mathbb{R}^3$.

Dimostreremo ora alcuni teoremi di geometria che probabilmente molti di voi hanno già visto alle superiori, utilizzando le proprietà della somma, del prodotto per scalare e del prodotto scalare. Più degli enunciati stessi utilizzeremo questi risultati come esempio di come si possono utilizzare i concetti introdotti.

<u>Esempio 1</u> Sia ABC un triangolo non degenere e sia M il punto medio di BC, N di AC e P di AB. Allora i segmenti AM, BN, CP passano per il baricentro.



<u>dim</u>

Ricordiamo che il baricentro è

$$\frac{A+B+C}{3} = R$$

quindi voglio mostrare che $R = A + t\,\overrightarrow{AM}$ con $t \in [0,1]$. Sostituendo $M = \dfrac{B+C}{2}$ e $\overrightarrow{AM} = M - A$ ottengo

$$A + t\,\frac{B+C-2A}{2} = \frac{A+B+C}{3}$$

ovvero

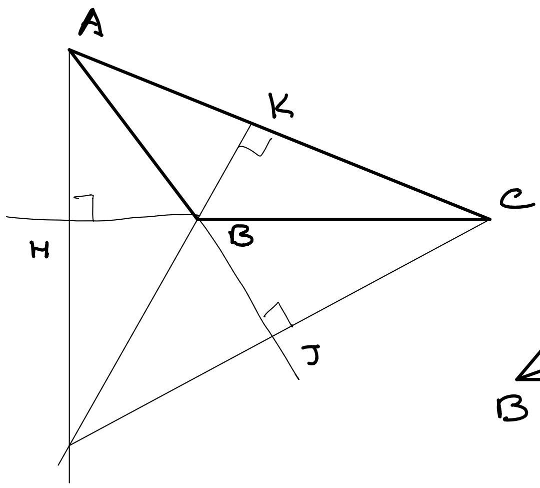
$$t\,\frac{B+C-2A}{2} = \frac{B+C-2A}{3}$$

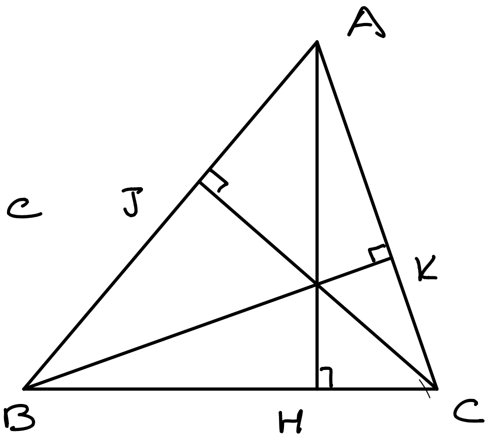
per $t = \dfrac{2}{3}$ si ottiene l'uguaglianza desiderata.

Similmente per il segmento BN e CP.

#

Esempio 2 Sia ABC un triangolo non degenere. Allora le rette contenenti le altezze passano per uno stesso punto





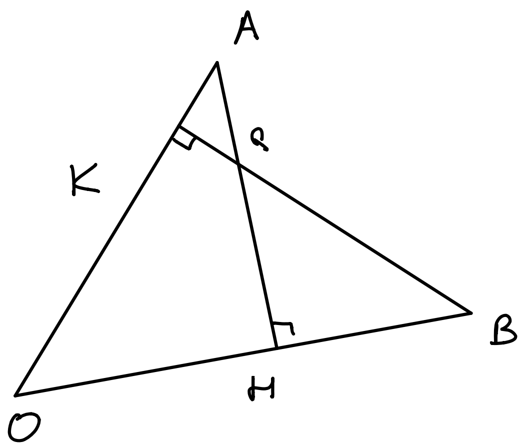
Nella figura il caso di un triangolo ottusangolo e il caso di un triangolo acutangolo.

dim.

Traslando possiamo supporre che $C = \underline{0}$ sia l'origine.

Osserviamo che l'altezza per A e quella per B non sono rette parallele perchè BC e AC non sono parallele. Allora AH e BK si incontrano in un punto P.

Dimostro che la retta per 0 e per P è ortogonale ad AB.



Traduciamo queste condizioni di ortogonalità in condizioni più algebriche

la retta AH ortogonale ad OB è come dire

la retta AP ortogonale ad OB ovvero

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \quad \text{ovvero}$$

$$(P-A)\cdot B = 0 \quad \text{ovvero}$$

$$P \cdot B = A \cdot B$$

Similmente BK ortogonale a OA è come dire

$$P \cdot A = A \cdot B$$

da queste due uguaglianze ottengo

$$P \cdot B = P \cdot A$$

ovvero

$$P \cdot (B - A) = 0 \quad \text{ovvero}$$

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

che è come dire OP ortogonale ad AB #

<u>Esempio 3</u>

Sia ABC un triangolo non degenere

Sia X il baricentro

Y l'ortocentro (l'intersezione delle altezze)

Z il circocentro (ovvero il centro del cerchio circoscritto al triangolo).

Allora X, Y, Z sono allineati.

dim Sappiamo che

- $X = \dfrac{A+B+C}{3}$

- Y è caratterizzato da

$$\overrightarrow{AY} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \qquad \overrightarrow{BY} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \qquad \overrightarrow{CY} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

ovvero

$$A \cdot \overrightarrow{BC} = Y \cdot \overrightarrow{BC} \qquad B \cdot \overrightarrow{AC} = Y \cdot \overrightarrow{AC} \qquad C \cdot \overrightarrow{AB} = Y \cdot \overrightarrow{AB}$$

- Z è caratterizzato da

$$\|A - Z\| = \|B - Z\| = \|C - Z\|$$

mostriamo che sulla retta XY c'è un punto che ha le proprietà che caratterizzano Z.

Sia $P = Y + t\,\overrightarrow{YX}$ e imponiamo le condizioni

$$\|A - P\| = \|B - P\| = \|C - P\|$$

imponiamo prima $\|A-P\| = \|B-P\|$ che riscriviamo come $\|A-P\|^2 = \|B-P\|^2$. Utilizzando che $\|u\|^2 = u \cdot u$ e la bilinearità del prodotto scalare otteniamo:

$$\|A\|^2 + \|P\|^2 - 2A \cdot P = \|B\|^2 + \|P\|^2 - 2B \cdot P$$

ovvero

$$\|B\|^2 - \|A\|^2 = 2P \cdot \overrightarrow{AB}$$

sostituendo $P = Y + t\,\overrightarrow{YX} = tX + (1-t)Y$ e usando $Y \cdot \overrightarrow{AB} = C \cdot \overrightarrow{AB}$

e $X = (A+B+C)/3$ ottengo

$$\|B\|^2 - \|A\|^2 = 2t\,\frac{A+B+C}{3} \cdot \overrightarrow{AB} + 2(1-t)\,C \cdot \overrightarrow{AB}$$

e svolgendo i conti

$$\|B\|^2 - \|A\|^2 - 2C \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{2}{3} \cdot t \left(\|B\|^2 - \|A\|^2 - 2C \cdot \overrightarrow{AB}\right)$$

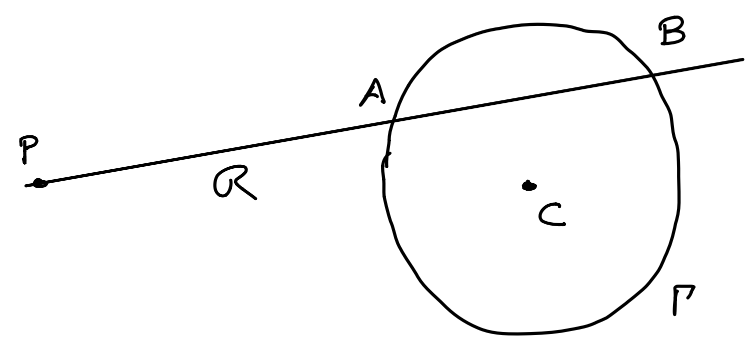
quindi prendendo $t = \frac{3}{2}$ l'uguaglianza è verificata.
Lo stesso identico conto mostra che per $t = \frac{3}{2}$ abbiamo anche $\| B - P \| = \| C - P \|$ e quindi

$$Z = Y + \frac{3}{2} \overrightarrow{XY}$$

#

Esempio 4

Sia P un punto esterno ad una circonferenza Γ di raggio R e sia d la distanza di P dal centro della circonferenza. Se tracciamo una retta $\mathcal{R}$ passante per P e che interseca Γ e indichiamo con A e B le intersezioni di $\mathcal{R}$ e Γ allora



$$\mathrm{dist}(P,A) \cdot \mathrm{dist}(P,B) = d^2 - R^2$$

(L'affermazione è vera anche nel caso $\mathcal{R}$ tangente nel qual caso nella formula si prende $A = B$)

dim Sia C il centro del cerchio
Traslando la figura possiamo supporre che $P = 0$.
Quindi $B = \lambda A$. Poiché A e B sono punti di Γ abbiamo

$$\| A - C \|^2 = R^2 \quad \text{e} \quad \| B - C \|^2 = R^2$$

Dalla prima equazione usando $\| C \|^2 = d^2$ ottengo

$$\| A \|^2 - 2 \, A \cdot C + d^2 - R^2 = 0$$

e della seconda

$$\lambda^2 \|A\|^2 - 2\lambda\, A\cdot C + d^2 - R^2 = 0$$

quindi l'equazione

$$t^2 \|A\|^2 - 2t\, A\cdot C + d^2 - R^2 = 0$$

ha come radici $t_1 = 1$ e $t_2 = \lambda$.

in particolare $t_1 \cdot t_2 = \dfrac{d^2 - R^2}{\|A\|^2}$ ovvero

$$\lambda = \frac{d^2 - R^2}{\|A\|^2}$$

quindi

$$\operatorname{dist}(P, A) \cdot \operatorname{dist}(P, B) = \|A\| \cdot \|\lambda A\| =$$

$$= \lambda \|A\|^2 = d^2 - R^2$$

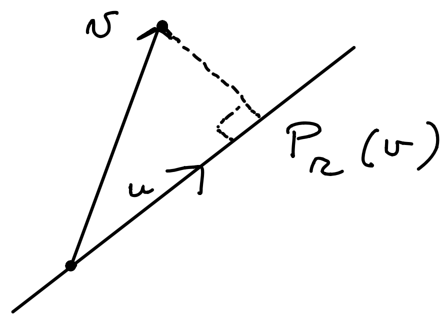
#

Proiezioni ortogonali e simmetrie

Vogliamo trovare un modo di descrivere la proiezione ortogonale di un punto su una retta o su un piano.

Consideriamo la retta

$$r = \mathbb{R}u + q.$$



con $q, u \in \mathbb{R}^3$ e $u \neq 0$.

Se $v \in \mathbb{R}^3$ indichiamo con

$$P_r(v)$$

la proiezione ortogonale di v su r. Vogliamo calcolare $P_r(v)$.

Facciamo prima il caso $q = 0$.

Il punto $w = P_r(u)$ è caratterizzato da due proprietà

1) $w \in r$
2) il segmento che unisce v a w è ortogonale a u

Traduciamo matematicamente queste proprietà:

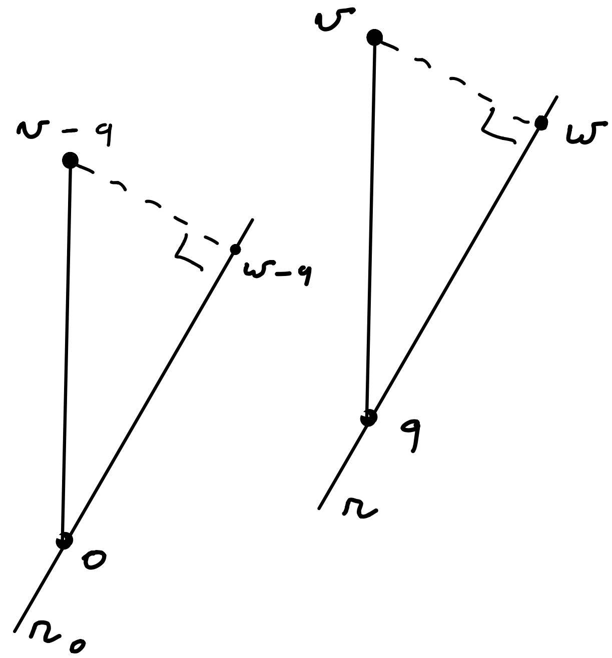
1) $w = tu$ con $t \in \mathbb{R}$
2) $(v - w) \cdot u = 0$

sostituendo 1) in 2) trovo $(v - tu) \cdot u = 0$

ovvero $v \cdot u = t \|u\|^2$ da cui $t = \dfrac{v \cdot u}{\|u\|^2}$

Quindi $\boxed{P_r(v) = \dfrac{v \cdot u}{\|u\|^2} u}$

Se $q \neq 0$ si può procedere analogamente ottenendo delle equazioni solo leggermente più complicate. Alternativamente possiamo traslare tutto di $-q$.



Allora

r si trasforma in $r_0 = \mathbb{R}u$

q si trasforma nell'origine

il triangolo rettangolo $v\,w\,q$, nel triangolo rettangolo $0, w-q, v-q$.

In particolare $w-q$ è la proiezione ortogonale di $v-q$ su r_0. Quindi

$$w - q = \frac{(v-q)\cdot u}{\|u\|^2}\, u$$

ovvero

$$P_r(v) = w = \frac{(v-q)\cdot u}{\|u\|^2}\, u + q$$

<u>Esercizio</u> Dare una dimostrazione della formula appena trovata

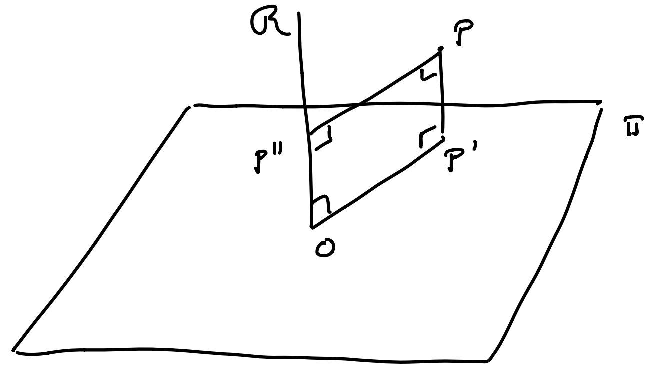
Consideriamo adesso il caso della proiezione ortogonale su un piano. Come nel caso delle rette facciamo prima il caso di un piano passante per l'origine nel quale le notazioni sono un pò più leggere

Sia u un vettore diverso da zero e sia

$$\Pi = \{ v \in \mathbb{R}^3 : \quad v \cdot u = 0 \}$$

il piano ortogonale alla retta $\mathcal{R} = \mathbb{R}u$.

Sia $P \in \mathbb{R}^3$. Sia P' la sua proiezione su Π e P'' la sua proiezione su $\mathcal{R}$.



Il quadrilatero $O\,P'\,P\,P''$ è un rettangolo infatti:

la retta PP' è parallela a $\mathcal{R}$ e quindi $O\,P'\,P\,P''$ sono su uno stesso piano

$\mathcal{R}$ è ortogonale a Π e quindi $P''\,O\,P'$ è retto

PP' è ortogonale a Π e quindi $O\,P'\,P$ è retto

PP'' è ortogonale a $\mathcal{R}$ e quindi $P\,P''\,O$ è retto

PP' è parallela a $\mathcal{R}$ e quindi anche $P'\,P\,P''$ è retto

allora $\quad P' + P'' = P$

ove $\quad P' = \pi_{\mathcal{R}}(P) = \dfrac{P \cdot u}{\|u\|^2}\, u$

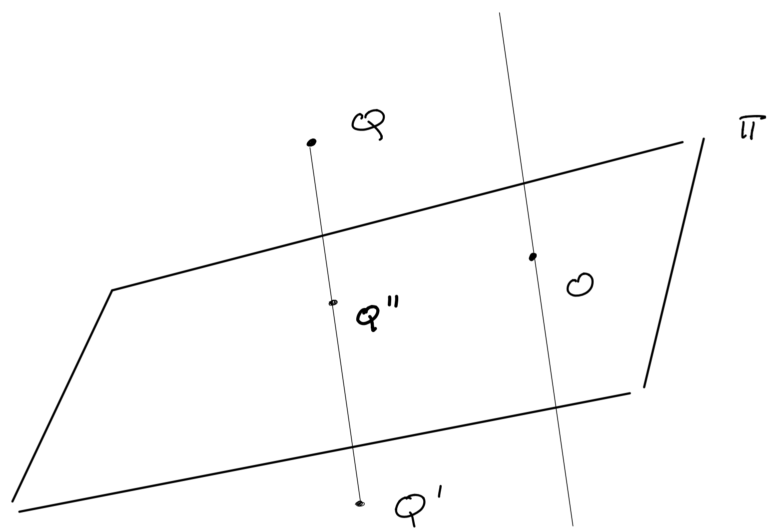
quindi la proiezione $P_\Pi(P) = P'' = P - P'$ è uguale a

$$\boxed{P_\Pi(P) = P - \frac{P \cdot u}{\|u\|^2}\, u}$$

Esercizio Calcolare la proiezione ortogonale di $(1, 2, 3)$ sul piano $x + y + z = 1$

Esercizio Calcolare la proiezione di $(1, -1, 2)$ sulla retta passante per $(1, 1, 1)$ e $(1, 3, 2)$.

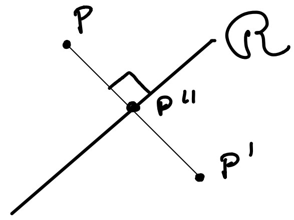
In modo simile a quanto fatto per le proiezioni ortogonali, possiamo usare il prodotto scalare per descrivere in modo semplice il simmetrico di un punto rispetto ad un piano o ad una retta.
Ricordiamo che se π è un piano e $Q \in \mathbb{R}^3$ il simmetrico di Q rispetto a π è un punto Q' di $\mathbb{R}^3$, tale che QQ' è ortogonale a π e detto Q'' l'intersezione tra la retta QQ' e π, Q'' è il punto medio tra Q e Q' ovvero $\overrightarrow{QQ''} = \overrightarrow{Q''Q'}$



Osserviamo che Q'' è la proiezione ortogonale di Q su π, quindi lo sappiamo calcolare. Dalla relazione $\overrightarrow{QQ''} = \overrightarrow{Q''Q'}$ ricaviamo $Q'' - Q = Q' - Q''$ quindi

$$Q' = -Q + 2Q'' = -Q + 2P_{\pi}(Q)$$

La definizione di simmetrico rispetto ad una retta R è del tutto analoga. Se $P \in \mathbb{R}^3$ allora il simmetrico di P rispetto a $\mathcal{R}$ è un punto P' tale che la retta PP' interseca in un punto P'' la retta $\mathcal{R}$ e PP' e $\mathcal{R}$ sono ortogonali e P'' è il punto medio tra P e P'.



Come nel caso del simmetrico rispetto ad un piano, abbiamo che P'' è la proiezione ortogonale di P su $\mathcal{R}$ e che

$$P' = -P + 2\,P_{\mathcal{R}}(P)$$

Nel caso di un piano passante per l'origine rendiamo più esplicita la formula ottenuta, perché ci capiterà di usarla spesso in futuro.
Sia $u \neq 0$ un elemento di $\mathbb{R}^3$ e sia

$$\Pi = \{ v \in \mathbb{R}^3 : u \cdot v = 0 \}$$

Allora dato $Q \in \mathbb{R}^3$, il simmetrico Q', di Q rispetto al piano Π è, come abbiamo visto,

$$Q' = -Q + 2\,P_\Pi(Q),$$

ovvero, usando la formula per la proiezione ottenuta in precedenza ($P_\Pi(Q) = Q - \frac{u \cdot Q}{\|u\|^2} u$) otteniamo

$$\boxed{Q' = Q - 2\,\frac{u \cdot Q}{\|u\|^2}\, u}$$

<u>Esercizio</u> Calcolare il simmetrico di $P=(1,1,1)$ rispetto al piano $x+2y+z=0$

<u>Svolgimento</u>

Sia $u=(1,2,1)$, allora il piano in questione è il piano dei punti v tali che $u\cdot v=0$. Applicando le formule appena trovate otteniamo che il simmetrico è il punto

$$P-2\,\frac{u\cdot P}{\|u\|^2}\,u=(1,1,1)-2\,\frac{1+2+1}{6}\,(1,2,1)$$

$$=(1,1,1)-\frac{4}{3}(1,2,1)=\left(-\frac{1}{3};-\frac{4}{3};-\frac{1}{3}\right)$$

#

<u>Esercizio</u>

Sia $P=(1,3,2)$ e Π il piano $x+2y+3z=$
Calcolare il simmetrico di P rispetto al piano Π

<u>Aiuto per lo svolgimento</u> L'esercizio è molto simile al precedente. La differenza principale è che il piano Π di questo esercizio non passa per l'origine. Come in altri casi, possiamo ricondurci alla situazione in cui il pianno passa per l'origine, traslando il piano e il punto di partenza.

Osserviamo che $R=(1,1,1)\in\Pi$ (qualsiasi altro punto di Π sarebbe andato bene). Consideriamo la traslazione T_{-R} e sia $\pi' = T_{-R}(\pi)$. In particolare π' è un piano passante per l'origine. Calcoliamo l'equazione di π' in due modi.

1° modo π è un piano ortogonale alla retta $R + \mathbb{R}u$ con $u = (1,2,3)$ quindi π' è un piano ortogonale alla retta $\mathbb{R}u$. Pertanto π' ha equazione

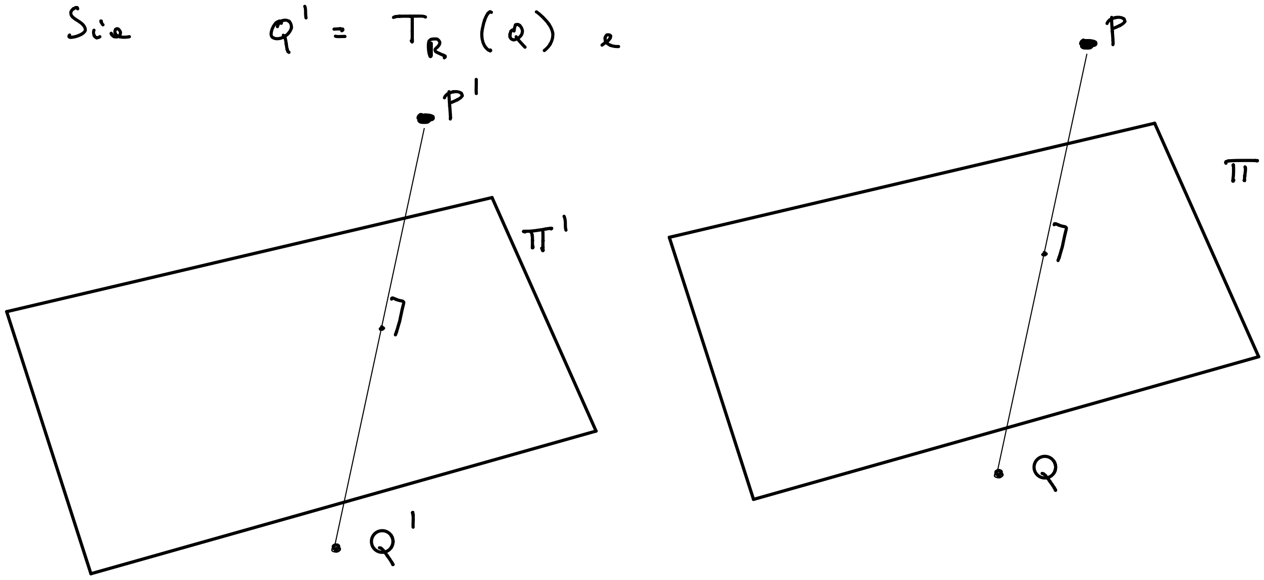
$$x + 2y + 3z = 0$$

2° modo π' è l'insieme dei punti (x,y,z) tali che $T_R(x,y,z) \in \pi$ ovvero l'insieme dei punti (x,y,z) tali che $(x+1, y+1, z+1) \in \pi$ ovvero $x+1 + 2(y+1) + 3(z+1) = 6$ e semplificando si ottiene di nuovo $x + 2y + 3z = 0$.

Quindi π' lo sappiamo calcolare. In ogni caso è il piano per l'origine ortogonale a $\mathbb{R}u$ con $u = (1,2,3)$.

Sia ora Q il simmetrico di P rispetto al piano π.

Sia $Q' = T_R(Q)$ e



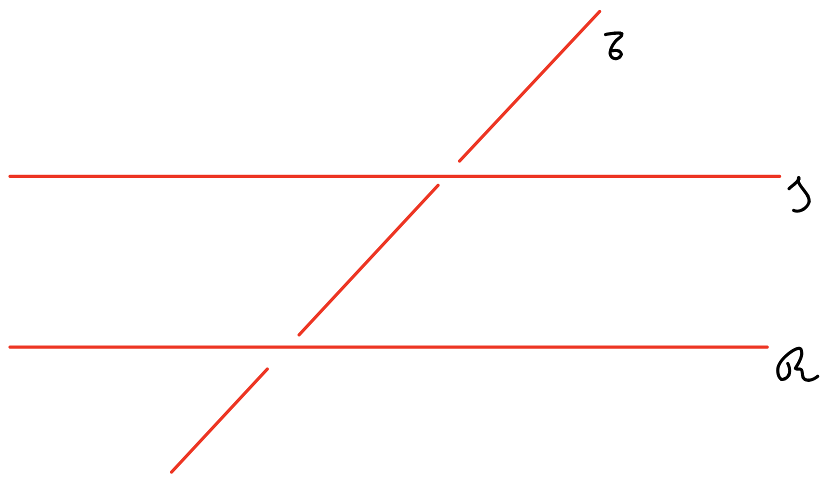
quindi $Q = Q' + R$ e Q' lo possiamo calcolare come nell'esercizio precedente e quindi possiamo calcolare Q.

[Se fate il calcolo dovrebbe venire $Q = (0, 1, -1)$].

PARALLELISMO DI RETTE E PIANI

DUE RETTE NEL PIANO SI DICONO PARALLELE SE NON SI INTERSECANO O, A SECONDA DELLE DEFINIZIONI, SE SONO COINCIDENTI. NEL CASO DELLO SPAZIO SI PREFERISCE DARE UNA DEFINIZIONE DI PARALLELISMO PIÙ STRINGENTE CHE NON DIPENDE SOLO DA COME LE RETTE SI INTERSECANO. SI VUOLE DISTINGUERE, PER ESEMPIO, TRA LA COPPIA DI RETTE r E s E LA COPPIA r E t.

$$r = \mathbb{R}(1,0,0) \qquad s = (0,0,1) + \mathbb{R}(1,0,0) \qquad t = (0,3,0) + \mathbb{R}(1,1,1)$$



ABBIAMO CHE $r \cap s = r \cap t = \emptyset$ MA, PER LA DEFINIZIONE CHE DAREMO r E s LE CONSIDEREREMO PARALLELE MENTRE r E t NO.

<u>DEFINIZIONE</u>

- DUE RETTE, O DUE PIANI, r e s SI DICONO PARALLELE SE ESISTE u TALE CHE

$$r + u = s.$$

- UNA RETTA $\mathcal{R}$ E UN PIANO Π SI DICONO PARALLELI SE ESISTE u TALE CHE

$$\mathcal{R} + u \subset \Pi$$

OSSERVAZIONE

POSSIAMO RIFORMULARE LA CONDIZIONE DI PARALLELISMO TRA DUE RETTE COME

SIANO $\mathcal{R} = p + \mathbb{R}u$ e $\mathcal{S} = q + \mathbb{R}v$ DUE RETTE. ALLORA $\mathcal{R}$ È PARALLELA AD $\mathcal{S}$ SE E SOLO SE $\mathbb{R}u = \mathbb{R}v$.

INFATTI SE $\mathbb{R}u = \mathbb{R}v$ ALLORA

$$\mathcal{S} = q - p + \mathcal{R}$$

VICEVERSA SE $\mathcal{R} + w = \mathcal{S}$ ALLORA

$$w + p + \mathbb{R}u = q + \mathbb{R}v$$

DA CUI $\mathbb{R}u = R + \mathbb{R}v$.

QUINDI $R = \lambda u$ DA CUI

$$\mathbb{R}v = -R + \mathbb{R}u = \mathbb{R}u$$

#

IN SEGUITO ANALIZZEREMO QUESTI CONCETTI PIÙ IN GENERALE.

ALTRI ESERCIZI ED ESEMPI

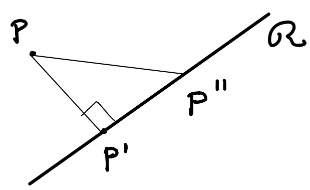
Negli esercizi che seguono trovate alcuni esempi di come utilizzare i concetti introdotti per risolvere alcuni esercizi di geometria analitica. Ora che abbiamo sviluppato qualche strumento ogni esercizio può essere risolto in più modi diversi. Ritroverete queste idee anche nella seconda parte del corso.

ESERCIZIO

Sia $P = (1,1,1)$, $Q = (0,0,1)$ e $R = (1,2,3)$

Calcolare la distanza tra P e la retta per Q e R.

DEFINIZIONE La distanza tra un punto P e una retta $\mathcal{R}$ è, per definizione, la distanza tra P e il punto di $\mathcal{R}$ più vicino a P.



Più concretamente è la distanza tra P e la proiezione P' di P su $\mathcal{R}$. Infatti se P'' è un altro punto di $\mathcal{R}$ avremo
$$\operatorname{dist}(P, P'') = \sqrt{\operatorname{dist}(P,P')^2 + \operatorname{dist}(P',P'')^2} > \operatorname{dist}(P,P').$$

Similmente si definisce e si calcola la distanza di un punto da un piano.

Svolgimento. Sia $u = \overrightarrow{QR}$, quindi la retta per Q e R è la retta $\mathcal{R} = Q + \mathbb{R}u$.

Invece di calcolare la distanza di P da $\mathcal{R}$ posso effettuare una traslazione che porta

Q nell'origine e calcolare la distanza tra $P_0 = P - Q$ e $\mathcal{R}_0 = \mathbb{R}u$. La proiezione di P_0 su $\mathcal{R}_0$ è uguale a

$$P_0' = \frac{P_0 \cdot u}{u \cdot u} u .$$

Nel nostro caso abbiamo $P_0 = (1, 1, 0)$ $u = (1, 2, 2)$ e $P_0' = \frac{3}{9}(1, 2, 2) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$. quindi

$$\operatorname{dist}(P, \mathcal{R}) = \operatorname{dist}(P_0, \mathcal{R}_0) = \operatorname{dist}(P_0, P_0') = \| P_0 - P_0' \|$$

$$= \sqrt{\left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(1 - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(0 - \frac{2}{3}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9}} = 1$$

//

Esercizio

Calcolare la distanza tra il punto $P = (1, 1, 1)$ e il piano di equazione $x - y + z = 2$.

[Procedere in modo analogo all'esercizio precedente calcolando la proiezione di P sul piano. Per semplificare i calcoli può essere conveniente effettuare una traslazione che porti un punto del piano nell'origine.]