

NUMERI COMPLESSI E POLINOMI

① DIVISIONE TRA POLINOMI

INIZIARO CON UNA OSSERVAZIONE SEMPLICE MA MOLTO UTILE QUANDO SI USANO I POLINOMI:

Se f è un polinomio di grado n e g è un polinomio di grado m allora $f \cdot g$ ha grado $n+m$.

QUALCHE ATTENZIONE VA FATTA NEL CASO IN CUI UNO DEI POLINOMI SIA IL POLINOMIO NULLO. SE ATTRIBUISSIMO $\text{grado} = 0$ A TALE POLINOMIO QUESTA OSSERVAZIONE SAREBBE FALSA. UNA SOLUZIONE CHE FUNZIONA IN MOLTI CASI È ATTRIBUIRE $\text{grado} = -\infty$ AL POLINOMIO NULLO. FISSEREMO QUINDI, PER CONVENZIONE, $\text{grado } 0 = -\infty$.

LA DIVISIONE TRA POLINOMI È MOLTO SIMILE ALLA DIVISIONE CON RESTO TRA NUMERI NATURALI.

DATI f e g POLINOMI CON $g \neq 0$ SI VOGLIONO DETERMINARE q e e TALI CHE

$$1) \quad f = qg + e$$

$$2) \quad \text{grado}(e) < \text{grado}(g)$$

IL POLINOMIO e SI DICE IL RESTO DELLA DIVISIONE.

I POLINOMI q e e ESISTONO SEMPRE, SONO UNICI E SI POSSONO CALCOLARE CON LO STESSO PROCEDIMENTO CHE SI USA PER (NUMERI) INTERI (ANZI UN PÒ PIÙ SEMPLICE).

NE RICORDO I PASSI FONDAMENTALI E LO ILLUSTRO CON UN ESEMPIO.

1° PASSO Se $\text{grado}(f) < \text{grado}(g)$

ALLORA $q = 0$ e $e = f$

2° PASSO Se $\text{grado}(f) \geq \text{grado}(g)$

$$\text{Sia } f = e_n x^n + e_{n-1} x^{n-1} + \dots + e_0 \quad e_n \neq 0$$

e se $g = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0 \quad b_m \neq 0$

allora il primo termine di q sarà $\frac{a_n}{b_m} x^{n-m}$
 e poi sottraggo a f IL POLINOMIO $\frac{a_n}{b_m} \cdot g \cdot x^{n-m}$
 E PROSEGUO IN QUESTO MODO

ESEMPIO

$f = x^5 + 3x^2 + x^3 + x^2 + x + 1$

$g = 2x^3 + x + 1$

$$\begin{array}{r}
 f = 1 \cdot x^5 + 3x^2 + x^3 + x^2 + x + 1 \\
 \underline{x^5} \\
 3x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \\
 \hline
 3x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 1 \\
 \underline{3x^2 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x} \\
 \frac{1}{2}x^3 - x^2 - x + 1 \\
 \underline{\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}} \\
 \hline
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 g \\
 \hline
 2x^3 + x + 1 \\
 \hline
 \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{4} \\
 \hline
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \frac{1}{2}x^3 \\
 \hline
 -x^2 - \frac{3}{4}x - \frac{3}{4} \\
 \hline
 \end{array}$$

A SINISTRA COLORATO C'È a_n E A DESTRA $\frac{a_n}{b_m}$

② REGOLA DI RUFFINI

DEFINIZIONE SE K È UN CAMPO INDICO CON $K[x]$ L'INSIEME DEI POLINOMI A COEFF IN K NELLA VARIABILE x .

DEFINIZIONE SE $f(x), g(x) \in K[x]$ DICO CHE f DIVIDE g SE $\exists h(x) \in K[x]$ TALE CHE $f(x) = g(x)h(x)$. SE $g \neq 0$ QUESTO È EQUIVALENTE A RICHIEDERE CHE IL RESTO DELLA DIVISIONE DI f PER g È UGUALE A 0.

DEFINIZIONE SE $f(x) \in K[x]$, UN NUMERO $\alpha \in K$, SI DICE UNA RADICE DI $f(x)$ SE E SOLO SE $f(\alpha) = 0$.

REGOLA DI RUFFINI SIA $f(x) \in K[x]$ E SIA $\alpha \in K$.

α È UNA RADICE DI f SE E SOLO SE $(x-\alpha)$ DIVIDE $f(x)$.

dim

EFFETTUARE LA DIVISIONE DI f PER $(x-\alpha)$

OTTENIAMO

$$f(x) = (x-\alpha)q(x) + p(x)$$

CON $p(x)$ UN POLINOMIO DI GRADO MINORE DEL GRADO DI $x-\alpha$ CHE È 1. QUINDI $p(x)$ È UNA COSTANTE $C \in K$.

$$f(x) = (x - \alpha) q(x) + C$$

QUINDI

$$f(\alpha) = (\alpha - \alpha) q(\alpha) + C = C$$

QUINDI $f(\alpha) = 0$ SE E SOLO SE $C = 0$
 OVVERO SE E SOLO SE IL RESTO DELLA
 DIVISIONE È ZERO OVVERO $x - \alpha$ DIVIDE f .
 #

③ MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA DI UNA RADICE

SIA $f(x) \in K[x]$ UN POLINOMIO NON NULLO E SIA
 $\alpha \in K$. SUPPONIAMO CHE $f(\alpha) = 0$ OVVERO
 CHE $(x - \alpha)$ DIVIDA $f(x)$. LA MOLTEPLICITÀ
ALGEBRICA DI α IN $f(x)$ È IL MASSIMO
 INTERO k TALE CHE $(x - \alpha)^k$ DIVIDE $f(x)$
 E LA INDICHEREMO CON $m_{\alpha}(f)$. SE $f(\alpha) \neq 0$
 DICIAMO CHE LA MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA È
 ZERO OVVERO $m_{\alpha}(f) = 0$.

QUINDI LA MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA CI DICE
 QUANTE VOLTE POSSO DIVIDERE $f(x)$ PER $(x - \alpha)$

ESEMPIO

SIA $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$. $f(1) = 0$ E VOGLIAMO
 CALCOLARE $m_1(f)$. DA $f(1) = 0$ SAPPIAMO
 PER IL CRITERIO DI RUFFINI CHE $(x - 1)$ DIVIDE $f(x)$.
 EFFETTUANO LA DIVISIONE

$$\begin{array}{r}
 x^3 - x^2 - x + 1 \\
 \underline{x^3 - x^2} \\
 -x + 1 \\
 \underline{-x + 1} \\
 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 \overline{x-1} \\
 x^2 - 1
 \end{array}$$

QUINDI $x^3 - x^2 - x + 1 = (x-1)(x^2-1) = (x-1)f_2(x)$

OSSERVIAMO CHE $f_2(1) = 0$ QUINDI DI NUOVO

$(x-1)$ DIVIDE x^2-1 , EFFETUIAMO LA DIVISIONE E

OTTEMIAMO $x^2-1 = (x-1)(x+1)$. QUINDI

$$f(x) = (x-1)f_2(x) = (x-1)^2(x+1) = (x-1)^2 f_3(x)$$

ORA $f_3(1) \neq 0$ QUINDI NON POSSIAMO PIÙ

DIVIDERE PER $(x-1)$. CIOÈ

$$(x-1)^2 \text{ DIVIDE } f(x) \text{ MA } (x-1)^3 \text{ NON DIVIDE } f(x)$$

OVVERO $m_{x-1}(f) = 2$.

OSSERVAZIONE

USANDO IL CRITERIO DI RUFFINI POSSIAMO DESCRIVERE

LA MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA ANCHE NEL SEGUENTE

MODO: $m_{\alpha}(f) = k$ SE

$$f(x) = (x-\alpha)^k g(x) \text{ E } g(\alpha) \neq 0.$$

INFATTI DIRE CHE $(x-\alpha)^k$ DIVIDE $f(x)$

VUOL DIRE CHE ESISTE $g(x)$ TALE CHE

$$f(x) = (x-\alpha)^k g(x), \text{ DIRE CHE } k \text{ È IL MASSIMO}$$

INTERO CON QUESTA PROPRIETÀ VUOL DIRE

$$(x-\alpha)^{k+1} \text{ NON DIVIDE } (x-\alpha)^k g(x) \text{ OVVERO } (x-\alpha)$$

NON DIVIDE $g(x)$, OVVERO $g(\alpha) \neq 0$.

PROPRIETÀ DELLA ROLT. ALG. $f, g \in K[x]$ non nulli

$$m_{\alpha}(fg) = m_{\alpha}(f) + m_{\alpha}(g)$$

dim

$$\text{Sia } k = m_{\alpha}(f) \text{ e } h = m_{\alpha}(g)$$

OVVERO

$$f(x) = (x-\alpha)^k \tilde{f}(x)$$

$$g(x) = (x-\alpha)^h \tilde{g}(x)$$

$$\text{con } \tilde{f}(\alpha), \tilde{g}(\alpha) \neq 0.$$

ALLORA

$$fg(x) = (x-\alpha)^{k+h} \tilde{f}\tilde{g}(x)$$

$$\text{e } \tilde{f}\tilde{g}(\alpha) = \tilde{f}(\alpha)\tilde{g}(\alpha) \neq 0 \text{ e quindi}$$

$$k+h = m_{\alpha}(fg)$$

#

④ PATTORI LINEARI DI UN POLINOMIO

EFFETTUANDO IL PROCEDIMENTO DESCRITTO SOPRA PER TUTTE LE RADICI DI UN POLINOMIO NON NULLO f OTTIENIAMO

$$f(x) = (x-\alpha_1)^{k_1} \cdots (x-\alpha_s)^{k_s} h(x) \quad (*)$$

CON $\alpha_1, \dots, \alpha_s \in K$ LE RADICI DI f .

$k_i = m_{\alpha_i}(f)$ E h UN POLINOMIO

CHE NON HA RADICI $\alpha \in K$.

Esempio

$$\text{Sia } f(x) = (x-1)^3 (x-2)^5 (x^4 + 2x^2 + 1)$$

vorremo calcolare le molteplicità algebriche delle radici di f e quindi scrivere $f(x)$ come nella formula $(*)$ sopra. Questo dipende dal campo K .

1° caso : $K = \mathbb{R}$. In questo caso non c'è più nulla da fare infatti il polinomio $h(x) = x^4 + 2x^2 + 1$ non ha radici $\alpha \in \mathbb{R}$, poiché per $\alpha \in \mathbb{R}$ $h(\alpha) \geq 1$. Quindi f è già scritto nella forma cercata:

$$f(x) = (x-1)^3 (x-2)^5 h(x)$$

f ha radici reali $\alpha = 1$ e $\alpha = 2$ e

$$m_{\alpha_1}(f) = 3 \quad m_{\alpha_2}(f) = 5$$

2° caso : $K = \mathbb{C}$. In questo caso il polinomio $h(x)$ ha radici.

$$\begin{aligned} h(x) &= x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2 = ((x+i)(x-i))^2 \\ &= (x+i)^2 (x-i)^2 \end{aligned}$$

Quindi

$$f(x) = (x-1)^3 (x-2)^5 (x+i)^2 (x-i)^2$$

quindi le radici complesse sono

$$\alpha = 1 \quad \alpha = 2 \quad \alpha = i \quad \alpha = -i$$

$$m_{\alpha_1}(f) = 3 \quad m_{\alpha_2}(f) = 5 \quad m_{\alpha_3}(f) = 2 \quad m_{\alpha_4}(f) = 2$$

Esempio Sia $f(x) = x^5 - x^4 - x + 1$

vogliamo calcolare le radici di f , le molteplicità algebriche di f . Osserviamo

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4(x-1) - (x-1) = (x-1)(x^4-1) \\ &= (x-1)(x^2-1)(x^2+1) \\ &= (x-1)(x-1)(x+1)(x+i)(x-i) \\ &= (x-1)^2(x+1)(x+i)(x-i) \end{aligned}$$

Se $K = \mathbb{R}$ le radici sono $\alpha = 1$ e $\alpha = -1$

$$m_{\alpha_1} = 2 \quad m_{\alpha_2} = 1$$

Se $K = \mathbb{C}$ le radici sono $\alpha = 1, -1, i, -i$
con mult. alg. $2, 1, 1, 1$.

OSSERVAZIONE Se uno calcola le molteplicità algebriche per tutte le $\alpha \in \mathbb{C}$ ha calcolato anche tutte le molt. algebriche per tutte le $\alpha \in \mathbb{R}$

⑤ TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA

TEOREMA Sia $f(x)$ un polinomio in $\mathbb{C}[x]$.
NON COSTANTE, OVVERO $\text{GRADO}(f) \geq 1$, ALLORA
ESISTE $\alpha \in \mathbb{C}$ TALE CHE $f(\alpha) = 0$.

QUESTO TEOREMA È DETTO TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA. E NON LO DIMOSTREREMO. PER QUANTO DISCUSO SOPRA SI PUÒ RIFORMULARE IL TEOREMA NEL MODO SEGUENTE

TEOREMA SIA $f(x)$ UN POLINOMIO IN $\mathbb{C}[x]$

NON NULLO. ALLORA

$$f(x) = c \cdot (x - \alpha_1)^{h_1} \cdots (x - \alpha_s)^{h_s}$$

CON $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ DISTINTI E $h_i = m_{\alpha_i}(f)$.

e c una costante.

⑥ RADICI DI POLINOMI DI GRADO 2.

NEL CASO DEI POLINOMI DI GRADO DUE

$$f(x) = x^2 + ax + b$$

IL TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALG. È SEMPLICE DA VERIFICARE. INFATTI LA FORMULA RISOLUTIVA DELL'EQUAZIONE DI SECONDO GRADO

$$x^2 + ax + b = 0$$

SE E SOLO SE $x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$

VALE ANCHE SU \mathbb{C} , INAMMENTE

NEL CASO REALE PER ASSICURARE

L'ESISTENZA DI $\sqrt{a^2 - 4b}$ DOBBIAMO

ASSURERE $a^2 - 4b \geq 0$ NEL CASO

COMPLESSO LA RADICE QUADRATA ESISTE

SEMPRE. SIA $w = u + i v$ UN NUMERO

COMPLESSO CON $u, v \in \mathbb{R}$ E CERCHIAMO

$z = x + i y$ CON $x, y \in \mathbb{R}$ TALE CHE

$$z^2 = w$$

OTTENIAMO IL SISTEMA

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = u \\ 2xy = v \end{cases}$$

SE $v = 0$ e $u > 0$ OTTENIAMO

$$x = \pm \sqrt{u} \quad \text{e} \quad y = 0$$

2

SE $v = 0$ e $u \leq 0$ OTTENIAMO

$$x = 0 \quad \text{e} \quad y = \pm \sqrt{-u}$$

SE $v \neq 0$ ALLORA RICAVO $x, y \neq 0$ E

$$\begin{cases} x = \frac{v}{2y} \\ \frac{v^2}{4y^2} - y^2 = u \end{cases}$$

DA CUI $y^4 + uy^2 - \frac{v^2}{4} = 0$

$$\Delta = u^2 + v^2 > 0$$

$$y^2 = \frac{-u \pm \sqrt{\Delta}}{2}$$

POICHE $y \in \mathbb{R}$ $y^2 \geq 0$ E QUINDI

$$y^2 = \frac{-u + \sqrt{\Delta}}{2}$$

$$y = \pm \sqrt{\frac{-u + \sqrt{\Delta}}{2}}$$

$$x = \frac{v}{2y} \quad \text{E ABBIAMO RICAVATO 8.}$$

⑦ POLINOMI A COEFF. REALI E RADICI CONIUGATE

IN ALCUNI ESERCIZI ABBIAMO UTILIZZATO LA SEGUENTE OSSERVAZIONE:

SIA $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ E SIA $\alpha \in \mathbb{C}$ TALE CHE $f(\alpha) = 0$.

ALLORA $f(\bar{\alpha}) = 0$.

INFATTI SIA $f(x) = a_n x^n + \dots + a_0$

CON $a_i \in \mathbb{R}$ OVERO $\bar{a}_i = a_i$. ALLORA

$$f(\bar{\alpha}) = a_n \bar{\alpha}^n + \dots + a_0$$

E PER LE PROPRIETÀ DEL CONIUGIO

($\overline{x+y} = \bar{x} + \bar{y}$ E $\overline{xy} = \bar{x} \bar{y}$) OTTENIAMO

$$\begin{aligned} f(\bar{\alpha}) &= \bar{a}_n \bar{\alpha}^n + \dots + \bar{a}_0 \\ &= \overline{a_n \alpha^n + \dots + a_0} \\ &= \overline{f(\alpha)} \\ &= 0 \end{aligned}$$