IL TEOREMA FONDAMENTALE

Chiamo teorema fondamentale dell'algebra lineare il teorema che afferma che tutte le basi hanno la stessa cardinalità. Non è un nome convenzionale, non lo troverete enunciato allo stesso modo in un libro, è un nome però meritato. La dimostrazione di questo teorema che abbiamo dato a lezione e che trovate qui sotto, non è molto bella, ma spero sia più "concreta" e quindi più adatta a questo corso. Dimostreremo il teorema prima nel caso di K^m e poi per un qualsiasi spazio vettoriale di dimensione finita.

IL CASO DI K^m

La dimostrazione del teorema fondamentale nel caso di K^m usa due fatti che abbiamo osservato parlando di sistemi lineari.

Sia A una matrice $m \times n$. Allora

1. Il sistema $Ax = 0$ ha l'unica soluzione $x = 0$ se e solo se $\text{rango}(A) = n$.

2. Il sistema $Ax = b$ ha soluzione per ogni $b \in K^m$ se e solo se $\text{rango}(A) = m$.

Osserviamo che in ogni caso $\text{rango}\, A \leq n$ e $\text{rango}\, A \leq m$ quindi la condizione $\text{rango}\, A = n$ è equivalente alla condizione $\text{rango}\, A \geq n$. Similmente la condizione $\text{rango}\, A = m$ è equivalente a $\text{rango}\, A \geq m$.

Siano ora $v_1 \dots v_n \in K^n$, che pensiamo come vettori colonne e sia

$$A = \begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_n \end{pmatrix}$$

la matrice $m \times n$ le cui colonne sono i vettori $v_1 \dots v_n$.

LEMMA

ⓐ $v_1 \dots v_n$ sono linearmente indipendenti se e solo se $\text{rango}(A) = n$

ⓑ $v_1 \dots v_n$ generano K^m se e solo se $\text{rango}(A) = m$

<u>dim.</u> La dimostrazione sia di ⓐ che di ⓑ si basa sui due fatti richiamati in precedenza e sull'osservazione che:

$$x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Dimostriamo (a). $v_1 \dots v_n$ linearmente indipendenti vuol dire che se $x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n = 0$ allora $x_1 = \dots = x_n = 0$ ovvero che

$$A x = 0$$

ha come unica soluzione $x = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ e per il punto (1) ricordato sopra questo vuol dire rango $(A) = n$

Dimostriamo (b). $v_1 \dots v_n$ generatori di K^m vuol dire che $\forall\, b \in K^m$ $\exists\, x_1 \dots x_n$ tali che $b = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n$ ovvero che il sistema

$$A x = b$$

ha soluzione per ogni $b \in K^m$ e per il punto (2) ricordato sopra questo vuol dire rango $A = m$.

#

TEOREMA FONDAMENTALE PER K^m

Siano $v_1 \dots v_n \in K^m$

(a) Se $v_1 \dots v_n$ sono una base allora $n = m$

(b) Se $v_1 \dots v_n$ sono lin. indip. allora $n \leq m$

(c) Se $v_1 \dots v_n$ sono generatori di K^m allora $n \geq m$

(d) Se $n = m$ allora $v_1 \dots v_m$ sono una base se e solo sono linearmente indipendenti e se e solo se sono generatori di K^m

dim. Sia $A = (v_1 \dots v_n)$ la matrice $m \times n$ introdotta in precedenza. Usando il lemma precedente abbiamo

(b) Se $v_1 \dots v_n$ lin. indip. allora $n =$ rango (A). In ogni caso rango $(A) \leq m$ quindi $n \leq m$.

(c) Se $v_1 \dots v_n$ generatori allora $m =$ rango (A). In ogni caso rango $(A) \leq n$ quindi $m \leq n$.

(a) Se $v_1 \dots v_n$ base allora sono generatori e linearmente indipendenti, quindi da (b) otteniamo $n \leq m$ e da (c) otteniamo $m \leq n$. Quindi $n = m$.

(d) Se $n = m$ allora osserviamo che le condizioni $v_1 \dots v_m$ lin. indip se e solo se rango $(A) = m$

$v_1 \dots v_m$ generano K^m se e solo se rango$(A) = m$

sono equivalenti. Ne ricaviamo che $v_1 \dots v_m$ generano K^m se e solo se sono lin. indipendenti.

In particolare le tre condizioni
- essere una base
- essere generatori di K^m
- essere lin. indip.

sono equivalenti in questo caso #

AGGIUNGERE VETTORI LINEARMENTE INDIPENDENTI E ELIMINARE GENERATORI

Studieremo ora vettori linearmente indipendenti, generatori e basi nel caso di uno spazio vettoriale generale.
Iniziamo con due osservazioni, la prima che ci spiega come aggiungere un vettore ad una lista di vettori linearmente indipendenti.
Queste osservazioni sono utili, in alcuni casi, a costruire basi di uno spazio vettoriale.

LEMMA

Sia V uno spazio vettoriale su K e siano $v_1 \dots v_b \in V$ dei vettori linearmente indipendenti. Sia $v \in V$.

Allora $v_1, \dots, v_b, v$ sono lin. indip. se e solo se $v \notin \langle v_1 \dots v_b \rangle$.

dimostrazione Dimostriamo che $v_1, \dots, v_b, v$ sono lin. dipendenti se e solo se $v \in \langle v_1 \dots v_b \rangle$. Supponiamo che $v \in \langle v_1 \dots v_b \rangle$, allora $\exists\, \alpha_1 \dots \alpha_b \in K$ tali che

$$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_b v_b$$

ovvero

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_b v_b - 1 \cdot v = 0.$$

In particolare questa è una combinazione lineare che ha almeno il coeff. di v diverso da zero e che è uguale a zero. Quindi $v_1, \dots, v_b, v$ sono lin. dip.

Viceversa supponiamo che $v_1, \dots, v_b, v$ siano lin. dip.. Allora $\exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_b, \beta$ non tutti nulli tali che

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_b v_b + \beta v = 0 \qquad \text{ovvero} \qquad \beta v = -\alpha_1 v_1 - \alpha_2 v_2 - \dots - \alpha_b v_b$$

Se fosse $\beta = 0$ allora avremmo una combinazione lineare che annulla $v_1 \dots v_b$ che sono lin. indip. per ipotesi quindi avremmo $\alpha_1 = \dots = \alpha_b = 0$ contro il fatto che almeno uno tra gli α_i e β è non nullo.
Quindi $\beta \neq 0$. Dividendo per β la seconda formula ricaviamo

$$v = -\frac{\alpha_1}{\beta} v_1 \dots - \frac{\alpha_b}{\beta} v_b$$

e quindi $v \in \langle v_1 \dots v_b \rangle$ #

Questo lemma ha la seguente conseguenza immediata

COROLLARIO

Se $v_1 \dots v_b \in V$ sono un insieme di vettori lin. indipendenti massimale (cioè se non posso aggiungere a questa lista un altro vettore v in modo che $v_1, \dots, v_b, v$ siano lin. indip.) allora $\langle v_1 \dots v_b \rangle = V$ e quindi $v_1 \dots v_b$ sono una base di V

OSSERVAZIONE

Inoltre il lemma fornisce un modo per costruire una lista di vettori lin. indip. : si parte da $v_1 \in V$ con $v_1 \neq 0$.

- Se $\langle v_1 \rangle \neq V$ scelgo $v_2 \in V \setminus \langle v_1 \rangle$ e il lemma assicura che v_1, v_2 sono lin. indip.
- Se $\langle v_1, v_2 \rangle \neq V$ scelgo $v_3 \in V \setminus \langle v_1, v_2 \rangle$ e il lemma assicura che v_1, v_2, v_3 sono lin. indip.

e continuo così. Il processo termina solo se ad un certo punto $\langle v_1 \dots v_b \rangle = V$. In quel caso $v_1 \dots v_b$ è una base.

Esempio - esercizio.

Sia $V = \mathbb{R}^3$ e sia W il piano $x + y + z = 0$. Costruire una base v_1, v_2, v_3 di $\mathbb{R}^3$ tale che v_1, v_2 è una base di W.

Se riscriviamo l'equazione che definisce W nella forma
$$x = -y - z$$
sappiamo che possiamo trovare una base di W ponendo $y = 1$ $z = 0$ e in seguito $y = 0$ $z = 1$. Otteniamo quindi che

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ è una base di W.

Scegliamo ora $v_3 \notin W$, per esempio $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Allora $v_1\ v_2\ v_3$ sono lin. indip e per quanto osservato nel teorema fondamentale per K^m sono una base di $\mathbb{R}^3$.

Forniamo un risultato del tutto simmetrico nel caso di generatori di uno spazio vettoriale

LEMMA

Siano $v_1 \dots v_b$ dei generatori dello spazio vettoriale V, allora possiamo eliminarne uno (cioè $\exists i$ tale che i vettori $v_1 \dots v_{i-1}, v_{i+1}, \dots v_b$ sono generatori) se e solo se $v_1 \dots v_b$ sono lin. dip.

dimostrazione

Supponiamo di poter eliminare un vettore. Per semplicità di notazione supponiamo sia l'ultimo. Quindi $V = \langle v_1 \dots v_{b-1} \rangle$ e $v_b \in \langle v_1 \dots v_{b-1} \rangle$. Allora esistono $\lambda_1 \dots \lambda_{b-1}$ tali che

$$v_b = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{b-1} v_{b-1}$$

da cui

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{b-1} v_{b-1} - 1 \cdot v_b = 0$$

e quindi $v_1 \dots v_b$ sono lin. dip.

Viceversa supponiamo che $v_1 \dots v_b$ siano lin. dip. Allora esistono $\lambda_1 \dots \lambda_b$ non tutti nulli tali che

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_b v_b = 0.$$

Sappiamo che esiste $\lambda_i \neq 0$, sempre per semplicità di notazione che sia $\lambda_b \neq 0$. Quindi otteniamo

$$v_b = -\frac{\lambda_1}{\lambda_b} v_1 \dots - \frac{\lambda_{b-1}}{\lambda_b} v_{b-1} \in \langle v_1 \dots v_{b-1} \rangle = W$$

Quindi $v_1, \dots, v_b \in W$ e $\langle v_1 \dots v_b \rangle$ è il più piccolo sottospazio che contiene $v_1, \dots, v_b$, quindi

$$V = \langle v_1 \dots v_b \rangle \subset W \subset V$$

Possiamo allora eliminare v_b infatti

$$V = W = \langle v_1 \dots v_{b-1} \rangle \qquad \#$$

Una conseguenza immediata del lemma è il seguente corollario.

COROLLARIO

Se $v_1 \dots v_b$ sono un insieme minimale di generatori di V (cioè se non possiamo eliminare un elemento v_i dalla lista in modo che $v_1 \dots \check{v}_i \dots v_b$ siano generatori di V) allora sono lin. indip.

OSSERVAZIONE (estrazione di una base da un insieme di generatori)

Il lemma precedente fornisce un modo di estrarre una base da un insieme di generatori:

Siano $v_1 \dots v_b$ dei generatori di V.

- Se sono lin. indip. allora sono una base.
- Se sono lin. dip allora ne possiamo eliminare uno e quindi abbiamo che

$$v_1 \dots \check{v}_i \dots v_b \quad \text{sono generatori}$$

A questo punto riapplichiamo lo stesso ragionamento.

IL TEOREMA FONDAMENTALE NEL CASO GENERALE

Dimostriamo ora il teorema fondamentale per spazi vettoriali di dimensione finita.

DEFINIZIONE Uno spazio vettoriale si dice di dimensione finita se esistono $v_1 \dots v_n \in V$ che generano V.

L'ultima osservazione fatta implica che se V ha dimensione finita allora ha una base, infatti se $v_1 \dots v_n$ è un insieme di generatori di V allora ne possiamo estrarre una base. Quindi gli spazi vettoriali di dimensione finita sono esattamente gli spazi vettoriali che hanno una base.

OSSERVAZIONE. Nella nostra definizione di base è sottointeso finita, c'è un concetto più generale di base, che nel corso non è stato introdotto, per trattare anche il caso di dimensione infinita.

Dimostreremo ora per questi spazi vettoriali un analogo del teorema che abbiamo dimostrato per K^m. Il teorema seguirà da ciò che abbiamo dimostrato per K^m e dal seguente lemma.

LEMMA Sia $F : V \longrightarrow W$ una applicazione lineare tra spazi vettoriali

(a) Se F è iniettiva e $v_1 \dots v_n$ sono lin. indipendenti allora $F(v_1) \dots F(v_n)$ sono lin. indip.

(b) Se F è surgettiva e $v_1 \dots v_n$ sono generatori di V allora $F(v_1) \dots F(v_n)$ sono generatori di W.

(c) Se F è iniettiva e surgettiva e $v_1 \dots v_n$ è una base allora $F(v_1) \dots F(v_n)$ è una base.

dim

(a) Dobbiamo dimostrare che se

$$a_1 F(v_1) + \dots + a_n F(v_n) = 0$$

allora $a_1 = \dots = a_n = 0$. Osserviamo che

$$a_1 F(v_1) + \dots + a_n F(v_n) = F(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n)$$

quindi dall'iniettività di F segue che se

$$a_1 F(v_1) + \dots + a_n F(v_n) = 0$$

allora $a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = 0$ e dalla lineare indipendenza di $v_1, \dots v_n$ segue che $a_1 = \dots = a_n = 0$.

(b) Sia $w \in W$, voglio dimostrare che $\exists\, b_1, \dots b_n$ tali che

$$w = b_1 F(v_1) + \dots + b_n F(v_n).$$

Dalla surgettività di F segue che $\exists\, v \in V$ e $F(v) = w$. Dal fatto che $v_1, \dots v_n$ generano V $\exists\, b_1, \dots b_n$ e

$$v = b_1 v_1 + \dots + b_n v_n$$

e dalla linearità di F segue che

$$w = F(v) = b_1 F(v_1) + \dots + b_n F(v_n)$$

(c) Questo punto segue da (a) e da (b) #

TEOREMA (TEOREMA FONDAMENTALE IN DIMENSIONE FINITA)

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e sia $u_1, \dots u_m$ una base di V. Siano $v_1, \dots v_n \in V$

(a) Se $v_1 \dots v_n$ sono una base di V allora $n = m$

(b) Se $v_1, \dots v_n$ sono lin. indip. allora $n \leq m$

(c) Se $v_1, \dots v_n$ generano V allora $m \leq n$

(d) Se $n = m$ allora $v_1 \dots v_m$ sono una base di V se e solo se sono lin. indip. se e solo se sono generatori di V

dimostrazione

Sia $F : V \longrightarrow K^m$ $\quad F(v) = [v]_{\underline{u}}$ e sia

$G : K^m \longrightarrow V$ $\quad G\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = x_1 u_1 + \dots + x_m u_m$

Come abbiamo già osservato altre volte F e G sono una l'inversa dell'altra e quindi sono bigettive.

Dimostriamo (a). Se $v_1 \dots v_n$ sono una base allora per il lemma $F(v_1) \dots F(v_n)$ sono una base di K^m e per il teorema dimostrato per K^m riceviamo $n = m$.

La dimostrazione di ⓑ e ⓒ è del tutto analoga

Dimostriamo ⓓ. Supponiamo $v_1 \dots v_m$ lin. indip.
Per il lemma $F(v_1) \dots F(v_m)$ sono lin indip in K^m.
Quindi per quanto dimostrato nel caso di K^m $F(v_1) \dots F(v_m)$ sono una base di K^m. Allora, sempre per il lemma
$v_1 = G(F(v_1))$, . . . , $v_m = G(F(v_m))$
sono una base di V

Similmente dimostriamo che se $v_1 \dots v_m$ sono gen di V allora sono una base di #

DEFINIZIONE

Sia V un K-spazio vettoriale di dimensione finita e sia $v_1 \dots v_m$ una base di V allora diciamo che la dimensione di V è m e scriviamo

$$\dim V = m$$

Per il teorema precedente questo numero non dipende dalla base scelta.

ESEMPI

① $\dim K^m = m$ infatti $e_1 \dots e_m$ è una base di K^m

② $\dim Mat_{m \times n}(K) = m \cdot n$ infatti E_{ij} con

$i = 1 \dots m$ $j = 1 \dots n$ è una base di $Mat_{m \times n}(K)$

③ $\dim K[t]_{\leq n} = n+1$ infatti

$1, t, t^2, \dots, t^{n+1}$ è una base di $K[t]_{\leq n}$

Una proprietà importante degli spazi vettoriali di dimensione finita, che è intuitiva ma che non è immediatamente chiara dalla definizione è che un sottospazio di uno spazio di dimensione finita ha a sua volta dimensione finita.

TEOREMA

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e sia $W \subset V$ un sottospazio vettoriale.
Allora W ha dimensione finita e $\dim W \leq \dim V$.
Inoltre $\dim W = \dim V$ se e solo se $W = V$

dim Se $W = 0$ è ovvio. Se $W \neq 0$.
Dimostriamo prima che $\dim W$ è finita.
Procediamo p.a. supponiamo che W non sia di

dimensione finita. Allora costruisco una successione di vettori

$$v_1, v_2, \dots v_n \dots \in W$$

linearmente indipendenti. La successione la costruisco in questo modo:

$v_1 \in W$ e $v_1 \neq 0$

una volta costruiti $v_1 \dots v_{n-1}$ osservo che poiché per ipotesi assurda W non ha dimensione finita allora $W \neq \langle v_1 \dots v_{n-1} \rangle$ quindi $\exists\, v_n \in W \setminus \langle v_1 \dots v_{n-1} \rangle$. Per quanto osservato in una lezione precedente $v_1, \dots, v_n$ sono lin. indipendenti

In particolare se $m = \dim V$ allora ho costruito $v_1, \dots, v_{m+1} \in V$ linearmente indipendenti che è contro il teorema fondamentale, punto (b).

Quindi W ha dimensione finita e sia $v_1 \dots v_n$ una base di W. Allora $v_1 \dots v_n$ sono vettori linearmente indipendenti di V e quindi sempre per il teorema fond., punto (b) si ricava $n \leq m$ ovvero $\dim W \leq \dim V$.

Se infine $n = m$ allora $v_1; \dots; v_m$ sono vettori lin. indip. di V e quindi per il punto (d) sono una base di V. Quindi

$$W = \langle v_1 \dots v_n \rangle = V.$$

#

L'ultimo risultato che vogliamo dimostrare e di cui faremo spesso uso nel seguito è un analogo del lemma che abbiamo dimostrato sopra che dice che da un insieme di generatori si può estrarre una base. Dimostreremo che un insieme di vettori linearmente indipendenti si può completare ad una base. La dimostrazione è molto simile a quella del teorema appena enunciato.

LEMMA (ogni lista di vettori lin. indip. si può completare ad una base)

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e sia $\dim V = m$.

Siano $v_1 \dots v_n \in V$ dei vettori linearmente indipendenti. Allora

esistono $v_{n+1}, \dots, v_m \in V$ tali che $v_1 \dots v_m$ è una base.

dim. L'idea della dimostrazione è la stessa del teorema precedente. Se $\langle v_1 \dots v_n \rangle = V$ abbiamo finito altrimenti aggiungiamo un elemento in $V \setminus \langle v_1 \dots v_n \rangle$, grazie al teorema fondamentale questo procedimento termina. Ne organizziamo l'esposizione in modo diverso.

Osserviamo che per il teorema fondamentale (b), $\ell = m - n \geq 0$ e procediamo p.i. su ℓ.

$\boxed{\text{Se } \ell = 0}$ $n=m$ segue dal teorema fondamentale (d)

$\boxed{\ell-1 \Rightarrow \ell \text{ per } \ell \geq 1}$ $n = m - \ell < m$ quindi $V \neq \langle v_1 \dots v_n \rangle$ altrimenti V ha una base con $n < m$ elementi. Sia allora $v_{n+1} \in V \setminus \langle v_1 \dots v_n \rangle$
Allora $v_1 \dots v_{n+1}$ sono linearmente indipendenti e

$$m - (n+1) = \ell - 1 .$$

Allora per ipotesi induttiva esistono $v_{n+2} ; \dots ; v_m$ tali che

$$v_1 , \dots v_n \ v_{n+1} \ v_{n+2} \ v_m \text{ è una base}$$

#

Infine diamo le seguenti definizioni

DEFINIZIONE (retta, piano, iperpiano)

Se V è un K-spazio vettoriale di $\dim = 1$ V si dice una retta.
Se V è un K-spazio vettoriale di $\dim = 2$ V si dice un piano.
Queste due definizioni si applicano in particolare ai sottospazi di uno spazio dato. Infine se W è un sottospazio dello spazio vettoriale di dim finita V si dice che W è un iperpiano se $\dim W = \dim V - 1$